1번 문제 답 3번 2번문제 27 3번문제 2
이 파트는 어렵다기보다 계산실수 안하도록 해야합니다.

1. ebs 수능완성 실모4회 20번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^x (e^{-x}-e^{-t})f(t)dt = g(x)$
(나) 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때, 극댓값 6을 갖는다.

$f(2)\times f(-2)$의 값은?

① 140 ② 160 ③ 180 ④ 200 ⑤ 220

$g(x)=\int_0^x (e^{-x}-e^{-t})f(t)dt$

$g(x)=\int_0^x e^{-x}f(t)dt - \int_0^x e^{-t}f(t)dt = e^{-x}\int_0^x f(t)dt - \int_0^x e^{-t}f(t)dt$

$x=0$**대입하면** $g(0)=0$

양변 x에 대해 미분하면,

$g'(x)=-e^{-x}\int_0^x f(t)dt + e^{-x}f(x)-e^{-x}f(x) = -e^{-x}\int_0^x f(t)dt$

$x=0$**대입하면** $g'(0)=0$

(나) 조건을 해석하면

$f(0)=6, f'(0)=0$**을 적용시켜야 되기 때문에** $f(x)$**를 끌어내야 합니다.**

$g'(x)=-e^{-x}\int_0^x f(t)dt$

$-g'(x)e^x = \int_0^x f(t)dt$ **이고, 양변 미분하면**

$f(x)=-g''(x)e^x - g'(x)e^x = -e^x\{3ax^2+(6a+12b)x+2b\}$

$f'(x)=-e^x\{3ax^2+(12a+2b)x+6a+4b\}$

($g(x)$는 삼차함수이므로 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $g'(x)=3ax^2+2bx+c$

$g''(x)=6ax+2b$ $g(0)=0$**이므로** $d=0$, $g'(0)=0$**이므로** $c=0$ **)**

$f(0)=6, f'(0)=0$**을 적용하면,** $a=2, b=-3$

$f(x)=-e^x(6x^2+6x-6)$

$\therefore f(2)\times f(-2)=180$

2. ebs 수능완성 실모1회 28번

양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정의역은 $\{x \mid 0 \le x \le a\}$**이다.**
(나) $f(x) = \int_0^a \left\| e^{-t} - e^{-x} \right\| dt$

$f(x)$의 최솟값을 $m(a)$라 할 때, $68\lim_{a \to 0+} \frac{m(a)}{a^2}$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x) = \int_0^a \left| e^{-t} - e^{-x} \right| dt$**를 해석 잘하셔야 합니다.**

절댓값이 있으니까, $e^{-t} - e^{-x} \ge 0, e^{-t} - e^{-x} < 0$ **으로 나누어 확인합니다.**

$t \ge x$ **에서는** $e^{-t} - e^{-x} < 0$, $t < x$**에서는** $e^{-t} - e^{-x} \ge 0$

-> 적분구간 나눠어서 하는 것 주의!

$f(x) = \int_0^x (e^{-t} - e^{-x}) dt - \int_x^a (e^{-t} - e^{-x}) dt$

$= -e^{-x} - xe^{-x} + 1 + e^{-a} + ae^{-x} - e^{-x} - xe^{-x}$

$= -2(x+1)e^{-x} + ae^{-x} + e^{-a} + 1$

$f'(x) = -2e^{-x} + 2(x+1)e^{-x} - ae^{-x} = (2x-a)e^{-x}$

$f'(x) = 0$**에서** $x = \frac{a}{2}$

x**가** $\frac{a}{2}$**보다 커지면** $f'(x)$**는 양수,** x**가** $\frac{a}{2}$**보다 작아지면** $f'(x)$**는 음수이므로,** $x = \frac{a}{2}$**에서 극소이며 최소이다.**

$m(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) = e^{-a} - 2e^{-\frac{a}{2}} + 1$

따라서 $68\lim_{a \to 0+} \frac{m(a)}{a^2} = 68\lim_{a \to 0+} \frac{e^{-a} - 2e^{-\frac{a}{2}} + 1}{a^2} = 68\lim_{a \to 0+} \frac{(e^{-\frac{a}{2}} - 1)^2}{a^2} = 68 \times \frac{1}{4} = 17$

답 17

3. ebs 수능완성 실모 2회 30번

열린 구간 (-2,2)에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = \int_1^x (x-t)g(t)dt + e^2(x-1)$
(나) $\int_1^x \frac{g(t)}{f(t)}dt = 1 - \tan\frac{\pi}{4}x$

$e \times \frac{g(1)}{g(0)}$**의 값을 구하시오. (단, $f(x) > 0$) [4점]**

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x (x-t)g(t)dt + e^2(x-1) = \int_1^x xg(t)dt - \int_1^x tg(t)dt + e^2(x-1)$$

양변 x에 대해 미분하면,

$$f(x) = \int_1^x g(t)dt + xg(x) - xg(x) + e^2 = \int_1^x g(t)dt + e^2$$

$x = 1$**대입하면** $f(1) = e^2$

$f'(x) = g(x)$

조건 (나)에 $g(t)$**대신** $f'(t)$**를 대입.** $\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \ln f(x) - \ln f(1) = 1 - \tan\frac{\pi}{4}x$

-> $\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt$ **적분하면 ln함수라는 것을 눈치채셔야 해요!**

$f(1) = e^2$ **이므로** $\ln f(x) = 3 - \tan\frac{\pi}{4}x$

$e \times \frac{g(1)}{g(0)}$**를 구해야하므로,** $g(x) = f'(x) = e^{3 - \tan\frac{\pi}{4}x}(-\frac{\pi}{4}sec^2\frac{\pi}{4}x)$

$\therefore e \times \frac{g(1)}{g(0)} = 2$

답 2