1. [정답] ④

해설

음이 아닌 정수 a', b', c', d'에 대하여

$a = 1+a'$, $b = 2+b'$, $c = 3+c'$, $d = 4+d'$

이라 하고 이를 등식 $a+b+c+d = 20$에 대입하여 정리하면

$a'+b'+c'+d' = 10$이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 방정식

$a'+b'+c'+d' = 10$

의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$의 개수와 같고, 그 개수는 서로 다른 4개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{13}\mathrm{C}_{10} = {}_{13}\mathrm{C}_{3} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2\cdot 1} = 286$$

2. [정답] ③

해설

$f(1)$의 값에 따라 각각의 경우를 나누어 구한다.

(i) $f(1) = 1$일 때, 세 수 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 세 수를 택한 후 작은 수부터 차례로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키면 되므로 가짓수는

${}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$

(ii) $f(1) = 2$일 때, 두 수 3, 4에 중복을 허락하여 세 수를 택한 후 작은 수부터 차례로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키면 되므로 그 가짓수는

${}_{2+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_1 = 4$

(iii) $f(1) = 3$일 때, $f(2) = f(3) = f(4) = 4$이고 그 가짓수는 1이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$10+4+1 = 15$

3. [정답] ⑤

해설

$\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r\,(x^3)^{n-r}x^{-2r} = {}_n\mathrm{C}_r\,x^{3n-5r}$이다. 여기서 n은 자연수이고 r은 0이상 n이하의 정수이므로 상수항이 존재하려면 $3n-5r = 0$에서 $3n = 5r$를 만족시키는 자연수 n의 값이 존재해야 한다. 즉, n은 5의 배수이어야 한다.

따라서 자연수 n의 최솟값인 a의 값은 5이다.

이때, $r = 3$이므로 $b = {}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$

$\therefore\ a+b = 5+10 = 15$

4. [정답] ④

해설

구하는 경우의 수는

${}_{25}\mathrm{C}_{13} + {}_{25}\mathrm{C}_{14} + {}_{25}\mathrm{C}_{15} + \cdots + {}_{25}\mathrm{C}_{25}$이다.

이때, ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}\,(0 \le r \le n)$이므로

${}_{25}\mathrm{C}_{13} + {}_{25}\mathrm{C}_{14} + {}_{25}\mathrm{C}_{15} + \cdots + {}_{25}\mathrm{C}_{25}$

$= {}_{25}\mathrm{C}_{12} + {}_{25}\mathrm{C}_{11} + {}_{25}\mathrm{C}_{10} + \cdots + {}_{25}\mathrm{C}_{0}$

이고

${}_{25}\mathrm{C}_{0} + {}_{25}\mathrm{C}_{1} + {}_{25}\mathrm{C}_{2} + \cdots + {}_{25}\mathrm{C}_{25} = 2^{25}$이므로

$${}_{25}\mathrm{C}_{13} + {}_{25}\mathrm{C}_{14} + {}_{25}\mathrm{C}_{15} + \cdots + {}_{25}\mathrm{C}_{25} = \frac{1}{2}\times 2^{25} = 2^{24}$$

5. [정답] ①

해설

빨간 공 4개를 각각 한 개씩 네 개의 상자 A, B, C, D에 넣은 후 흰 공 2개, 검은 공 2개를 각 상자에 한 개씩 넣으면 된다.

즉, 흰 공 2개, 검은 공 2개를 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times 2!} = 6$$

6. [정답] 144

해설

밑면에 칠할 한 가지 색을 고르는 경우의 수는

${}_6C_1 = 6$

나머지 5가지 색을 옆면에 칠하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times 24 = 144$

7. [정답] ①

1, 1, 1을 먼저 나열하면 숫자 1의 좌우에 0을 나열할 수 있는 곳이 4군데이다.

이 4군데에 나열된 숫자 0을 왼쪽부터 차례대로 a, b, c, d로 나타내자. 예를 들어 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0과 같이 나열되면 $aabcccd$임을 의미하고, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0과 같이

나열되면 $bbbdddd$임을 의미한다.

이것은 서로 다른 $\boxed{4}$개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 $\boxed{7}$개를 선택하는 방법의 수와 같다. 따라서 구하는 방법의 수는

$${}_{4+7-1}\mathrm{C}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = \boxed{120} \text{ 이다.}$$

$\therefore$ (가): 4, (나): 7, (다): 120

따라서 구하는 합은 $4+7+120=131$

8. [정답] 378

(ⅰ) $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$를 만족시키는 몇 가지 예는 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	
1	1	1	1	
1	2	3	4	
2	2	3	3	
3	4	4	4	

이와 같은 경우는 6개의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 다음 크기순으로 나열한 경우로 생각할 수 있다.

따라서 서로 다른 6개의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 방법의 수와 같으므로

$$p = {}_{6+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_{10}\mathrm{C}_5 = \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1} = 252$$

(ⅱ) $a_1 \le a_2 < a_3 \le a_4 \le a_5$를 만족시키는 경우의 수는

$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$를 만족시키는 경우의 수에서

$a_1 \le a_2 = a_3 \le a_4 \le a_5$를 만족시키는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

$a_1 \le a_2 = a_3 \le a_4 \le a_5$인 경우는 $a_1 \le a_2 \le a_4 \le a_5$와 같이 생각할 수 있으므로 (ⅰ)에서와 같이 서로 다른 6개의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 4개를 선택하는 방법의 수와 같다. 즉,

$${}_{6+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_{9}\mathrm{C}_4 = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$$

$\therefore q = 252 - 126 = 126$

$\therefore p+q = 252+126 = 378$

[다른 풀이]

(ⅰ) $1 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le 6$이므로

$a_1 - 1 = a \ (\ge 0)$

$a_2 - a_1 = b \ (\ge 0)$

$a_3 - a_2 = c \ (\ge 0)$

$a_4 - a_3 = d \ (\ge 0)$

$a_5 - a_4 = e \ (\ge 0)$

$6 - a_5 = f \ (\ge 0)$

라 하고 각 변끼리 더하면

$a+b+c+d+e+f=5$

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개의 문자 a, b, c, d, e, f에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 방법의 수와 같으므로

${}_{6+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_{10}\mathrm{C}_5 = 252$

(ⅰ) $1 \le a_1 \le a_2 < a_3 \le a_4 \le a_5 \le 6$이므로

$a_1 - 1 = a \ (\ge 0)$

$a_2 - a_1 = b \ (\ge 0)$

$a_3 - a_2 - 1 = c \ (\ge 0)$

$a_4 - a_3 = d \ (\ge 0)$

$a_5 - a_4 = e \ (\ge 0)$

$6 - a_5 = f \ (\ge 0)$

라 하고 각 변끼리 더하면

$a+b+c+d+e+f=4$

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개의 문자 a, b, c, d, e, f에서 중복을 허락하여 4개를 선택하는 방법의 수와 같으므로

${}_{6+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_{9}\mathrm{C}_4 = 126$

9. [정답] ①

$$(x+2)^{21} = \sum_{k=0}^{21} {}_{21}\mathrm{C}_k\, x^k\, 2^{21-k}$$

이므로 $a_k = {}_{21}\mathrm{C}_k \cdot\ 2^{21-k}$이다.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{{}_{21}\mathrm{C}_{k+1} \cdot\ 2^{21-k-1}}{{}_{21}\mathrm{C}_k \cdot\ 2^{21-k}}$$

$$= \frac{\dfrac{21!}{(k+1)!(21-k-1)!} \cdot\ 2^{21-k-1}}{\dfrac{21!}{k!(21-k)!} \cdot\ 2^{21-k}}$$

$$= \frac{21-k}{2(k+1)} > 1$$

즉, $21-k > 2k+2$에서 $3k<19$ $\quad\therefore\ k < 6.33\cdots$

따라서 구하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값은 6이다.

[참고]

위의 결과에서

$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_7 > a_8 > a_9 > \cdots > a_{21}$

임을 알 수 있다.

즉, $(x+2)^{21}$의 전개식에서 계수가 가장 큰 항은 x^7항이다.

10. [정답] ②

$\{(a+b)^3+c\}^5$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_k (a+b)^{3k} c^{5-k}$

$= {}_5\mathrm{C}_0 c^5 + {}_5\mathrm{C}_1 (a+b)^3 c^4 + {}_5\mathrm{C}_2 (a+b)^6 c^3 + {}_5\mathrm{C}_3 (a+b)^9 c^2$

$+{}_{5}\mathrm{C}_{4}(a+b)^{12}c+{}_{5}\mathrm{C}_{5}(a+b)^{15}$

이때 $(a+b)^{n}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 $n+1$이다. 따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$1+(3+1)+(6+1)+(9+1)+(12+1)+(15+1)$

$=51$

[다른 풀이]

$$\{(a+b)^{3}+c\}^{5}=\sum_{k=0}^{5}{}_{5}\mathrm{C}_{k}(a+b)^{3k}c^{5-k}$$

(단, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

이때 $(a+b)^{3k}$의 전개식의 항의 개수는 $3k+1$이다.

따라서 주어진 식의 항의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(3k+1)=51$이다.

[참고]

$(a+b+c+d+e)^{5}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$${}_{5+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{9}\mathrm{C}_{5}={}_{9}\mathrm{C}_{4}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

이다. 이와 같은 방법으로

$\{(a+b)^{3}+c\}^{5}=(a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}+c)^{5}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수도 126이 된다고 생각하면 옳지 않다. 왜냐하면 $(a+b+c+d+e)^{5}$의 전개식에서는 $a^{3}b^{2}$, $abc^{2}d$ 등과 같이 모든 항이 서로 다른 항으로 나타나지만

$(a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}+c)^{5}$의 전개식에서는

$(3a^{2}b)^{2}(3ab^{2})^{2}c=81a^{6}b^{6}c,\ (a^{3})^{2}(b^{3})^{2}c=a^{6}b^{6}c$

와 같이 중복된 항이 나타나기 때문이다.

11. [정답] ③

$k=1$인 경우는 예를 들어 다음과 같다.

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×

○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×

⋯

○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

위와 같은 경우의 수는 ○와 ×의 경계인 11개의 세로 막대 중 1개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{11}\mathrm{C}_{1}$이고 ○와 ×를 반대로 나열하는 경우를 생각하면

$a_{1}=2\times{}_{11}\mathrm{C}_{1}$

$k=2$인 경우도 ○와 ×의 경계인 세로 막대를 2개 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{11}\mathrm{C}_{2}$이고 ○와 ×를 반대로 나열하는 경우를 생각하면

$a_{2}=2\times{}_{11}\mathrm{C}_{2}$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{5}a_{k}=a_{1}+a_{2}+a_{3}+a_{4}+a_{5}$$

$=2({}_{11}\mathrm{C}_{1}+{}_{11}\mathrm{C}_{2}+{}_{11}\mathrm{C}_{3}+{}_{11}\mathrm{C}_{4}+{}_{11}\mathrm{C}_{5})$

$=2({}_{11}\mathrm{C}_{0}+{}_{11}\mathrm{C}_{1}+{}_{11}\mathrm{C}_{2}+{}_{11}\mathrm{C}_{3}+{}_{11}\mathrm{C}_{4}+{}_{11}\mathrm{C}_{5})-2$

$=2^{11}-2$

$=2046$

12. [정답] ⑤

(ⅰ) 가운데 세 자리를 만드는 경우

$*$, 0, #에서 3개를 뽑는 중복순열의 수는

${}_{3}\Pi_{3}=3^{3}=27$

이 중 숫자 0이 중복 사용된 경우는

000, 00$*$, 00#, 0$*$0, 0#0, $*$00, #00의 7가지이다.

따라서 가운데 세 자리를 만드는 경우의 수는

$27-7=20$

(ⅱ) 양 끝의 두 자리를 만드는 경우

맨 앞의 자리와 숫자 a와 맨 뒤의 자리의 숫자 b의 합이 10인 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 9)$, $(9,\ 1)$, $(2,\ 8)$, $(8,\ 2)$, $(3,\ 7)$, $(7,\ 3)$, $(4,\ 6)$, $(6,\ 4)$의 8가지이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $20\times8=160$

[다른 풀이]

(ⅰ) 가운데 세 자리를 만드는 경우

① 0이 사용되지 않는 경우

$*$, #에서 3개를 뽑는 중복순열의 수는

${}_{2}\Pi_{3}=2^{3}=8$

② 0이 사용되는 경우

0이 들어갈 자리를 택하는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{C}_{1}=3$

$*$, #에서 2개를 뽑는 중복순열의 수는

${}_{2}\Pi_{2}=2^{2}=4$

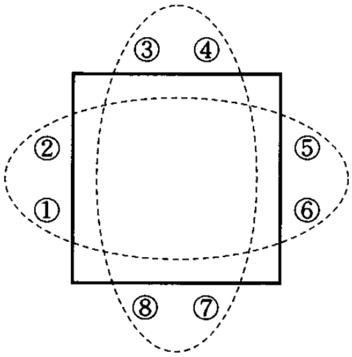
따라서 0이 사용되는 경우의 수는

$3\times4=12$

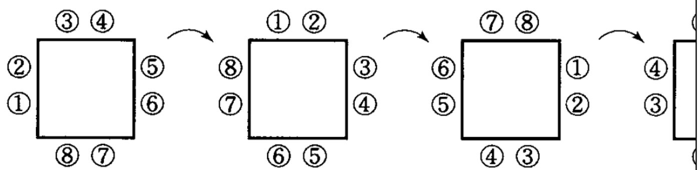
①, ②에서 구하는 경우의 수는 $8+12=20$

13. [정답] ④

그림과 같이 8개의 자리에 1번부터 8번까지 시계 방향으로 차례대로 번호를 매긴다. 1, 2, 5, 6번의 자리 중에서 남학생의 자리 2곳을 택하는 경우의 수는 $(1,\ 2)$, $(1,\ 5)$, $(2,\ 6)$, $(5,\ 6)$의 4이고, 마찬가지로 3, 4, 7, 8번의 자리 중에서 남학생의 자리 2곳을 택하는 경우의 수도 4이다.



또, 정해진 남학생의 자리에 남학생 4명을 앉히는 경우의 수는 $4! = 24$이고, 남은 4자리에 여학생 4명을 앉히는 경우의 수도 $4! = 24$이다.
그런데 그림과 같이 회전하여 일치하는 것이 각각 4개씩 생긴다.



따라서 구하는 경우의 수는

$$4\times4\times24\times24\times\frac{1}{4}=2304$$

14. [정답] ②

파란색 의자를 x, 빨간색 의자를 y, 노란색 의자를 z라 하자.
$x,\ x,\ x,\ x,\ y,\ y,\ y$의 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4!\times3!}=35$$

$x,\ x,\ x,\ x,\ y,\ y,\ y$를

$$(1)x(2)x(3)x(4)x(5)y(6)y(7)y(8)$$

과 같이 나열한 후, 2개의 z 사이에 짝수 개의 문자가 놓이도록 (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8)의 8개의 자리 중 z가 놓일 두 자리를 선택하는 경우의 수는
(1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 4), (2, 6), (2, 8),
(3, 5), (3, 7), (4, 6), (4, 8), (5, 7), (6, 8)
의 12이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $35\times12=420$

15. [정답] ③

P지점에서 Q지점까지 가려면 P지점에 가까운 원형 교차로와 Q지점에 가까운 원형 교차로를 반드시 하나씩 통과해야 하는데 최단거리로 가야 하므로 A지점 또는 B지점을 통과하고 C지점 또는 D지점을 통과해야 한다.

(i) P → A → C → Q

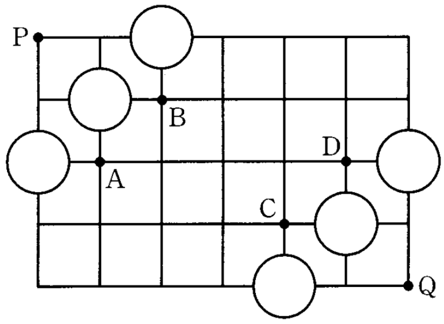
$$2\times\frac{4!}{3!}\times2=16(\text{가지})$$

(ii) P → A → D → Q

$$2\times1\times2=4(\text{가지})$$

(iii) P → B → C → Q

$$2\times\frac{4!}{2!2!}\times2=24(\text{가지})$$



(iv) P → B → D → Q

$$2\times\frac{4!}{3!}\times2=16(\text{가지})$$

따라서 (i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$16+4+24+16=60$$

16. [정답] 10

선택하는 장미, 튤립, 국화의 개수를 각각 x,y,z라 하면
$x+y+z=10,\ x\geq\ 4,\ y\geq\ 2,\ z\geq\ 1$
$x=x'+4,\ y=y'+2,\ z=z'+1\ (x',y',z'$은 0 이상의 정수)로
놓으면
$x'+4+y'+2+z'+1=10$에서 $x'+y'+z'=3$
따라서 구하는 꽃다발의 개수는 방정식 $x'+y'+z'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x',y',z')의 개수와 같으므로

$$_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

17. [정답] ③

ㄱ. 흰공이 4개이므로 ●○●○●○●○●●●과 같이 색깔의 변화는 최대 8번까지 일어날 수 있다.
즉 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)$의 값은 흰 공 4개, 검은 공 7개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{11!}{4!7!}={}_{11}C_4\ (\text{참})$$

ㄴ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)$의 값은 색깔의 변화가 홀수 번 일어나는 모든 경우의 수이므로
●○●●●○●●●○○,　○●●○●●○●○●●
과 같이 양 끝에 각각 다른 색의 공이 오는 경우이다.
흰 공 1개와 검은 공 1개를 뺀 나머지인 흰 공 3개, 검은 공 6개를 일렬로 배열한 다음 양 끝에 흰 공과 검은 공을 배열하면 되므로

$$\frac{9!}{3!6!}\times2=168(\text{참})$$

ㄷ. $f(4)$의 값은 색깔의 변화가 네 번 일어나는 경우의 수이므로

(흰,검,흰,검,흰) 또는 (검,흰,검,흰,검) 의 경우이다.
(ⅰ) (흰,검,흰,검,흰) 의 경우
흰 공의 자리에 들어가는 각각의 흰 공의 개수를 x,y,z라 하면
방정식 $x+y+z=4$ 를 만족하는 자연수해의 순서쌍 (x,y,z)의
개수는
$${}_{3}\mathrm{H}_{1}={}_{3}\mathrm{C}_{1}=3$$
검은 공의 자리에 들어가는 각각의 검은 공의 개수를 p,q라 하면 방정식 $p+q=7$을 만족시키는 자연수해의 순서쌍 (p,q)의 개수는
$${}_{2}\mathrm{H}_{5}={}_{6}\mathrm{C}_{5}={}_{6}\mathrm{C}_{1}=6$$
$\therefore\ 3\times6=18$
(ⅱ) (검,흰,검,흰,검)의 경우
검은 공의 자리에 들어가는 각각의 검은 공의 개수를x,y,z라 하면
방정식 $x+y+z=7$ 를 만족하는 자연수해의 순서쌍 (x,y,z)의
개수는
$${}_{3}\mathrm{H}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$
흰 공의 자리에 들어가는 각각의 흰 공의 개수를 p,q라 하면 방정식 $p+q=4$을 만족시키는 자연수해의 순서쌍 (p,q)의 개수는
$${}_{2}\mathrm{H}_{2}={}_{3}\mathrm{C}_{2}={}_{3}\mathrm{C}_{1}=3$$
$\therefore\ 15\times3=45$
$\therefore\ f(4)=18+45=63$(거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

18. [정답] 10

(가)에서 공역의 두 원소를 더하여 10이 되는 경우는
$3+7=4+6=5+5=10$이므로 순서쌍으로 나타내면 $(3,7),(4,6),(5,5)$와 같다. 이 세 순서쌍 중에서 중복을 허락하여 세 순서쌍을 선택하기만 하면 자동으로 (나)를 만족하도록 $f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6)$을 정할 수 있다. 예를 들어 $(3,7),(3,7),(4,6)$을 선택한다면 $f(1)=3,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=6,$ $f(5)=7,\ f(6)=7$이 된다. 따라서 구하는 함수의 개수는
$${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

19. [정답] ①

$(1+2x)^{10}$의 전개식의 일반항은 ${}_{10}\mathrm{C}_{r}(2x)^{r}$이므로 x^{r}의 계수를 $a_r\ (0\le r\le 10)$라 하면
$$a_r=\boxed{{}_{10}\mathrm{C}_{r}\cdot\ 2^{r}}$$
$$\therefore f(r)={}_{10}\mathrm{C}_{r}\cdot\ 2^{r}$$
$$\frac{a_{r+1}}{a_r}=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_{r+1}2^{r+1}}{{}_{10}\mathrm{C}_{r}2^{r}}=\frac{2\times10!}{(r+1)!(9-r)!}\times\frac{r!(10-r)!}{10!}$$
$$=\boxed{\frac{2(10-r)}{r+1}}\ (0\le\ r\le\ 9)$$
$$\therefore\ \mathrm{g}(r)=\frac{2(10-r)}{r+1}$$
$\dfrac{2(10-r)}{r+1}>1$에서 $r<\dfrac{19}{3}=6.\times\times\times$이므로
$a_1<a_2<\cdots<a_6<a_7$ …… ㉠
$\dfrac{2(10-r)}{r+1}<1$에서 $r>\dfrac{19}{3}=6.\times\times\times$이므로
$a_7>a_8>a_9>a_{10}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 x^7의 계수가 가장 크다.
$\therefore\ k=\boxed{7}$
$\therefore f(2)={}_{10}\mathrm{C}_{2}\cdot\ 2^2=45\times4=180,$
$\mathrm{g}(k)=\mathrm{g}(7)=\dfrac{2(10-7)}{7+1}=\dfrac{3}{4}$
$\therefore\ f(2)\times\mathrm{g}(k)=180\times\dfrac{3}{4}=135$

20. [정답] 12

$(1+x)^n={}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}x+{}_{n}\mathrm{C}_{2}x^2+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}x^n$의 양변을 x에 대하여 적분하면
$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}={}_{n}\mathrm{C}_{0}x+\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{1}}{2}x^2+\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}{3}x^3+\cdots+\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{n}}{n+1}x^{n+1}+C$$
(단, C는 적분상수)
이 식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$$C=\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore\ \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$$
$$={}_{n}\mathrm{C}_{0}x+\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{1}}{2}x^2+\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}{3}x^3+\cdots+\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{n}}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{n+1}$$
이 식의 양변에 $n=15,\ x=1$을 대입하면
$$\frac{2^{16}}{16}=2^{12}=\frac{{}_{15}\mathrm{C}_{0}}{1}+\frac{{}_{15}\mathrm{C}_{1}}{2}+\frac{{}_{15}\mathrm{C}_{2}}{3}+\cdots+\frac{{}_{15}\mathrm{C}_{15}}{16}+\frac{1}{16}$$
$$\therefore\log_2\left(\frac{{}_{15}\mathrm{C}_{0}}{1}+\frac{{}_{15}\mathrm{C}_{1}}{2}+\frac{{}_{15}\mathrm{C}_{2}}{3}+\cdots+\frac{{}_{15}\mathrm{C}_{15}}{16}+\frac{1}{16}\right)$$
$$=\log_2 2^{12}=12$$

21. [정답] ③

$(1+x)^m$의 전개식에서 일반항은

${}_m\mathrm{C}_r\ x^r\ (r=0, 1, 2, \cdots, m)$

$(1+x^2)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_n\mathrm{C}_s\ (x^2)^s={}_n\mathrm{C}_s\ x^{2s}\ (s=0, 1, 2, \cdots, n)$

$(1+x)^m(1+x^2)^n$의 전개식에서 x^2항은

$m=1$일 때, ${}_n\mathrm{C}_1\ x^2$

$m\geq 2$ 일 때,

${}_m\mathrm{C}_0\cdot\ {}_n\mathrm{C}_1x^2+{}_m\mathrm{C}_2x^2\cdot\ {}_n\mathrm{C}_0=({}_n\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2)x^2$

x^2의 계수가 16이므로

(ⅰ) $m=1$일 때, ${}_n\mathrm{C}_1=16$에서 $n=16$ 이므로 자연수 m, n

의 순서쌍 (m, n)은 $(1, 16)$

(ⅱ) $m\geq 2$ 일 때, ${}_n\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2=16$ 에서

$n+\dfrac{m(m-1)}{2}=16$ …… ㉠

$m(m-1)=32-2n\leq 30$

$m\geq 2$ 이므로 $m=2, 3, 4, 5, 6$

따라서 ㉠을 만족시키는 두 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n)은

$(2, 15), (3, 13), (4, 10), (5, 6), (6, 1)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 mn의 최댓값은

$4\times 10=40$

22. [정답] ②

(ⅰ) B에게 흰 공을 나누어 주는 경우

A, B, C 가 받는 흰 공의 개수를 각각 a, b, c 라 하면

$a+b+c=6\ (a\geq 2,\ b\geq 1, c\geq 0)$ …… ㉠

$a=2+a_1, b=1+b_1, c=c_1$ 로 놓고 ㉠에 대입하면

$(2+a_1)+(1+b_1)+c_1=6$

따라서 방정식 $a_1+b_1+c_1=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1, b_1, c_1 의 순서쌍 (a_1, b_1, c_1)의 개수는

${}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

이 때 B는 검은 공을 받지 않으므로 A, C 가 받는 검은 공의 개수를 각각 a_2, c_2 라 하면

$a_2+c_2=3\ (a_2\geq 2, c_2\geq 0)$

이고, 이를 만족시키는 a_2, c_2 의 순서쌍 (a_2, c_2)는

$(2, 1), (3, 0)$의 두 개이다.

따라서 세 사람에게 9개의 공을 나누어 주는 방법의 수는 $10\times 2=20$

(ⅱ) B에게 검은 공을 나누어 주는 경우

A, B, C가 받는 검은 공의 개수를 x, y, z 라 하면

$x+y+z=3\ (x\geq 2, y\geq 1, z\geq 0)$

이를 만족시키는 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 는

$(2, 1, 0)$의 한 개이다.

이때 B는 흰 공을 받지 않으므로 A, C 가 받는 흰 공의 개수를 각각 x_1, z_1 이라 하면

$x_1+z_1=6\ \ (x_1\geq 2, z_1\geq 0)$ …… ㉡

$x_1=2+x_2, z_1=z_2$ 로 놓고 ㉡에 대입하면

$(2+x_2)+z_2=6$

방정식 $x_2+z_2=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_2, z_2 의 순서쌍 (x_2, z_2)의 개수는

${}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

따라서 세 사람에게 9개의 공을 나누어 주는 방법의 수는

$1\times 5=5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 A, B, C 세 사람에게 9개의 공을 모두 나누어 주는 방법의 수는

$20+5=25$

23. [정답] 495

$n=3$일 때, 변 AD 위의 네 점 P, Q, R, S를 각각 1, 2, 3, 4 와 대응시키고, 변 BC 위의 세 점을 점 B 에 가까운 점부터 차례로 1, 2, 3 과 대응시키면 [그림1]과 [그림2]는 각각 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3\}$으로의 함수 f 중에서 조건

[$x_1\in X, x_2\in X$ 이고 $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)\leq f(x_2)$ 이다] …… ㉠

를 만족시키는 것의 두 가지 예이다.

따라서 a_n은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y_n=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$으로의 함수 f 중 조건 ㉠을 만족시키는 것의 개수와 같다.

a_9는 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y_9=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$로의 함수 f 중 조건 ㉠을 만족시키는 것의 개수와 같으므로 이는 9개 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ a_9={}_{9+4-1}\mathrm{C}_4={}_{12}\mathrm{C}_4=\dfrac{12\times 11\times 10\times 9}{4\times 3\times 2\times 1}=495$

24. [정답] 397

후보 5명의 득표수의 총합은

$30\times 3-90$ 이므로

$21+27+x+y+z=90$ 에서

$x+y+z=42$ …… ㉠

이때 x, y, z 는 30보다 클 수 없으므로

$5\leq x\leq 30, 5\leq y\leq 30, 5\leq z\leq 30$

$x=5+x', y=5+y', z=5+z'$ 으로 놓고 ㉠에 대입하면

$(5+x')+(5+y')+(5+z')=42$

$\therefore\ x'+y'+z'=27$ …… ㉡

$0\leq x'\leq 25, 0\leq y'\leq 25, 0\leq z'\leq 25$

방정식 ㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍

(x', y', z')의 개수는

$$_{3+27-1}C_{27} = {}_{29}C_{27} = {}_{29}C_2 = \frac{29\times28}{2\times1} = 406$$

이때 $x' \neq 26$, $x' \neq 27$ 이므로

$(26, 1, 0), (26, 0, 1), (27, 0, 0)$의 3개는 제외된다.

y' , z' 의 경우도 마찬가지이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$406 - 3\times3 = 397$

25. [정답] ①

(i) 1, 3, 5 를 모두 사용하는 경우

나머지 두 자리는 2 와 4 를 중복 사용하여 만든다. 일의 자리부터

만의 자리까지 다섯 자리 중 세 자리를 택하여 차례대로 1, 3, 5 를 대응시키는 방법의 수는

$_5P_3 = 5\times4\times3 = 60$

나머지 두 자리에 2 와 4 를 중복을 허용하여 대응시키는 방법의 수는

$_2\Pi_2 = 2^2 = 4$

$\therefore\ 60\times4 = 240$

(ii) 1, 3, 5 중 2 개만 사용하는 경우

1, 3, 5 중 두 수를 선택하는 방법의 수는

$_3C_2 = 3$

다섯 자리 중 두 자리를 택하여 선택된 2 개의 숫자를 차례대로 대응시키는 방법의 수는

$_5P_2 = 5\times4 = 20$

나머지 세 자리에 2 와 4 를 중복을 허용하여 대응시키는 방법의 수는

$_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

$\therefore\ 3\times20\times8 = 480$

(iii) 1, 3, 5 중 1 개만 사용하는 경우

1, 3, 5 중 한 수를 선택하는 방법의 수는

$_3C_1 = 3$

다섯 자리 중 한 자리를 택하는 방법의 수

$_5P_1 = 5$

나머지 네 자리에 2 와 4 를 중복을 허용하여 각 자리에 대응시키는 방법의 수는

$_2\Pi_4 = 2^4 = 16$

$\therefore\ 3\times5\times16 = 240$

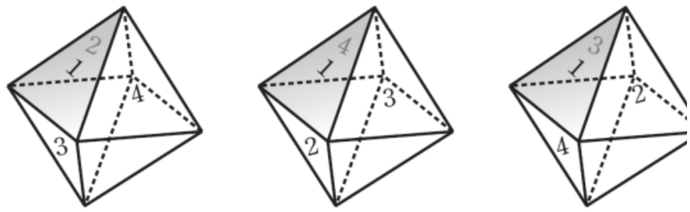
(iv) 1, 3, 5 를 모두 사용하지 않는 경우

$_2\Pi_5 = 2^5 = 32$

따라서 구하는 수는

$240 + 480 + 240 + 32 = 992$

26. [정답] ①



정팔면체에 1 부터 8 까지의 자연수를 한 면에 하나씩 적는 방법의 수는 원순열의 수를 이용하여 구할 수 있다. 즉, 한 수를 하나의 면에 고정한 후 나머지 7 개의 수가 차례대로 각 면에 적혀 있는 방법의 수 7! 을 구한다. 그런데 그림에서와 같이 먼저 고정한 면을 기준으로 120° 만큼씩 회전하면 같은 정팔면체가 생기므로 3 으로 나누어 준다.

$\therefore\ a = \frac{7!}{3} = 7\times6\times5\times4\times2 = 1680$

또 1 과 2 가 인접하는 두 면에 적혀 있는 정팔면체의 수는 3 부터 8 까지 나머지 6 개의 숫자가 차례대로 각 면에 적혀 있는 방법의 수와 같으므로

$b = 6! = 720$

$\therefore\ a - b = 1680 - 720 = 960$

27. [정답] ④

(i) 흰 돌 3 개를 더 놓는 경우

$_7C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$

(ii) 흰 돌 4 개와 검은 돌 1 개를 더 놓는 경우

돌이 놓일 5 곳을 정하고 이 곳에 돌을 놓는 방법의 수를 생각한다.

$_7C_5 \times \frac{5!}{4!1!} = \frac{7\times6}{2}\times5 = 105$

(iii) 흰 돌 5 개와 검은 돌 2 개를 더 놓는 경우

돌 7 개를 놓을 순서로 생각한다.

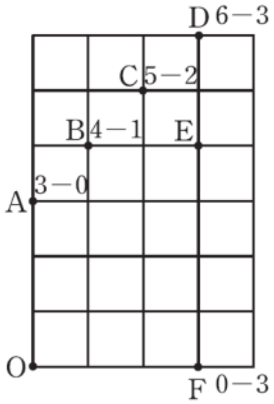
$\frac{7!}{5!2!} = \frac{7\times6}{2} = 21$

따라서 구하는 수는

$35 + 105 + 21 = 161$

28. [정답] 27

갑팀과 을팀의 게임 결과를 그림으로 표현할 수 있다.



처음에 점 O 에 있는 점 P 가 갑팀이 승리하면 위쪽 방향으로, 을팀이 승리하면 오른쪽 방향으로 움직인다고 하자.

만일 점 P 가 점 A 에 도착하면 갑팀이 3 승으로 우승하는 것을 의미하고, 점 B 에 도착하면 4 승 1 패로 우승하는 것을 의미한다.

갑팀이 6 승 3 패로 우승하는 것은 점 E 를 거쳐 점 D 로 가는 것과 동일하다.

그러므로 구하는 경우의 수는 점 A 와 B 를 거치지 않고 점 E 에 도착한 후 점 D 로 가는 최단 경로의 수와 같다.

점 E 에 도착한 후 점 D 로 가는 최단 경로의 수와 같다.

점 E 로 가는 모든 경로의 수는 $\dfrac{7!}{3!4!}=35$ 인데 그 중에서 점 A 를 거쳐 가는 경로의 수는 $1\times\dfrac{4!}{3!1!}=4$ 이고, 점 B 를 거쳐 가는 경로의 수는 $\dfrac{5!}{4!1!}\times1=5$ 이며, 점 A 와 점 B 를 모두 거쳐 가는 경로의 수는 $1\times\dfrac{2!}{1!1!}\times1=2$ 이다.

또한 갑팀이 세 번 연속 지면 을팀이 이기게 되므로 점 F 를 지나 점 D 로 가는 경우 한 가지도 빼야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$35-4-5+2-1=27$

29. [정답] ③

$(x+y+z)^n$의 전개식의 모든 항은 차수가 n이다.

서로 다른 항의 개수는 x, y, z의 3 개 중에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3+n-1}\mathrm{C}_n={}_{2+n}\mathrm{C}_n={}_{2+n}\mathrm{C}_2$

$$\therefore\ f(n)={}_{2+n}\mathrm{C}_2=\frac{(2+n)(1+n)}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{f(k)}&=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{(k+1)(k+2)}\\&=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\Big(\right.\\&=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)\\&=2\times\frac{5}{12}\\&=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

30. [정답] 360

(ⅰ) 조건 (나)에서 $f(4)=4$, $f(6)=6$이므로
$f(5)$의 값은 4 또는 5 또는 6이다.

(ⅱ) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 공역의 원소 1, 2, 3, 4의 4개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 크기순으로 정하면 된다.
즉, 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

(ⅲ) $f(7)$, $f(8)$의 값은 공역의 원소 6, 7, 8의 3개 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 크기순으로 정하면 된다.
즉, 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$3\times20\times6=360$

31. [정답] ③

(ⅰ) 이항정리에 의하여

$(1+x)^n$

$={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\ \cdots\ +{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nx^n$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\ \cdots\ +{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n$

$$2^n - {}_nC_0 - {}_nC_1 = {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{n-1}$$

$$2^n - 2 = {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{n-1}$$

이므로

$$f(n) = 2^n - 2$$

(ⅱ) 이항정리에 의하여

$$(1+x)^{2n}$$

$$= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 x + {}_{2n}C_2 x^2 + {}_{2n}C_3 x^3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} x^{2n}$$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$$2^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}$$

이므로

$$g(n) = 2^{2n} = 4^n$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\dfrac{f(n)}{g(n)} = \dfrac{2^n-2}{4^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} - 2 \times \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

32. [정답] ③

주머니 A에 들어 있는 흰 공의 개수를 x라 하면 주머니 B에 들어 있는 흰 공의 개수는 $6-x$이므로 주머니 A, B에서 같은 색의 공이 나올 확률 p는

$$p = \frac{x}{6} \cdot \frac{6-x}{10} + \frac{6-x}{6} \cdot \frac{10-(6-x)}{10}$$

$$= -\frac{1}{30}(x^2 - 4x - 12)$$

$$= -\frac{1}{30}\{(x-2)^2 - 16\}$$

$$= -\frac{1}{30}(x-2)^2 + \frac{8}{15} \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

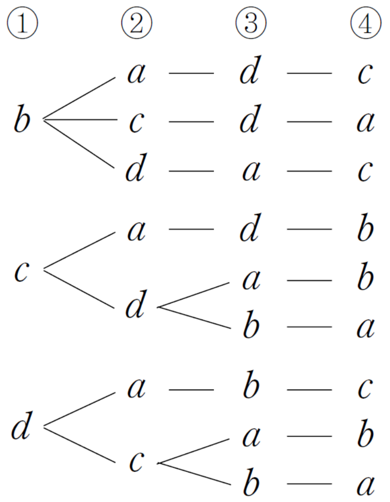
따라서 p의 최댓값은 $\dfrac{8}{15}$이다.

33. [정답] 13

4개의 자물쇠에 4개의 열쇠를 대응시키는 방법의 수는

$4! = 24$

자물쇠 ①, ②, ③, ④를 열 수 있는 열쇠를 각각 a, b, c, d라 하면 자물쇠 4개 중 하나도 열리지 않는 경우는 다음과 같이 9가지이다.



따라서 적어도 하나의 상자가 열릴 확률은

$$1 - \frac{9}{24} = \frac{5}{8}$$

$\therefore\ p + q = 8 + 5 = 13$

34. [정답] 21

5번의 게임을 한 후 갑이 을보다 점수가 높은 사건을 A, 갑이 점수를 얻은 횟수가 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다. 갑이 점수를 얻은 횟수를 $k\,(k=0, 1, 2, \cdots, 5)$라 하면 을이 점수를 얻은 $5-k$이다.

갑과 을이 각각 0점, 4점에서 게임을 시작하여 5번의 게임을 하면 갑과 을의 점수는 각각 $3k, 4+(5-k)$가 되므로 갑의 점수가 을의 점수보다 높으려면

$$3k > 4 + (5-k),\ 4k > 9,\ k > \frac{9}{4}$$

즉, k의 값은 $3, 4, 5$이어야 한다.

따라서 한 개의 주사위를 던져 갑이 점수를 얻을 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(A) = {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= \left({}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

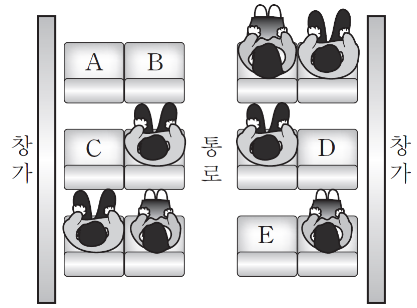
$$\therefore \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5}{16\times\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{5}{16}$$

$\therefore p+q=16+5=21$

35. [정답] 20

5 개의 빈 좌석을 각각 A , B , C , D , E 라 하자.



5 명의 승객을 5 개의 좌석에 임의로 배정하는 방법의 수는
$5!=120$ (가지)
이때 이웃하는 좌석을 순서쌍으로 나타내면
(A , B), (A , C)
의 2 가지이므로 2 명의 남자 승객을 이웃하도록 배정하고 나머지 3 개의
좌석에 남은 3 명의 여자 승객을 배정하는 방법의 수는
$2\times2!\times3!=24$ (가지)
따라서 구하는 확률 p 의 값은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ 이므로

$100p=100\times\frac{1}{5}=20$

36. [정답] ⑤

주머니 A 에서 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 A , 주머니 B 에서 꺼낸
공이 흰 공일 사건을 B 라 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(B\mid A^C)=\frac{1}{7}$ 이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\mid A)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$$
$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B\mid A^C)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{7}$$
$$=\frac{2}{21}$$

$\therefore$ $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$$=\frac{1}{7}+\frac{2}{21}=\frac{5}{21}$$
$\therefore$ $\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$
$$=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{5}{21}}=\frac{3}{5}$$

37. [정답] 34

A_i는 $\{1\}$ 또는 $\{1,\ 2\}$ 또는 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 중의 하나이므로 $B_3=\{1,\ 2\}$가 되려면 B_2는 1을 원소로 가지고 있어서는 안 된다.

(ⅰ) $B_2=\varnothing$인 경우

$A_1=A_2$이고 $A_3=\{1,\ 2\}$이면 되므로 주사위를 던져 첫 번째와 두 번째의 눈이 같아야 하고 세 번째는 2의 눈이 나와야 한다.

그 확률은 $1\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$

(ⅱ) $B_2=\{2\}$인 경우

$A_1=\{1,\ 2\}$, $A_2=\{1\}$이거나
$A_1=\{1\}$, $A_2=\{1,\ 2\}$이고
$A_3=\{1\}$이면 된다.

즉, 첫 번째와 두 번째에 각각 2의 눈, 1의 눈이 나오거나 1의 눈, 2의 눈이 나오고 세 번째에 1의 눈이 나오면 된다.

그 확률은 $\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\right)\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{27}$

(ⅲ) $B_2=\{3\}$인 경우

$A_1=\{1,\ 2,\ 3\}$, $A_2=\{1,\ 2\}$이거나
$A_1=\{1,\ 2\}$, $A_2=\{1,\ 2,\ 3\}$이고 $A_3=\{1,\ 2,\ 3\}$이면 된다.

즉, 첫 번째와 두 번째에 각각 3의 눈, 2의 눈이 나오거나 2의 눈, 3의 눈이 나오고 세 번째에 3의 눈이 나오면 된다.

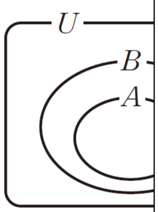
그 확률은 $\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\right)\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{27}$

(ⅳ) $B_2=\{2,\ 3\}$인 경우

이 경우에는 A_3이 어떤 집합이 되더라도 $B_3=\{1,\ 2\}$가 되지 못한다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 확률은
$\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}=\frac{7}{27}$
$\therefore$ $p+q=34$

38. [정답] 16



오른쪽 벤다이어그램에서와 같이 $A\subset B$인 조건을 만족시키려면 원소 1, 2, 3, ⋯, 8은 A, $B-A$, $U-B$ 중 하나의 원소이어야 한다. 1부터 8까지의 자연수를 집합 A, $B-A$, $U-B$ 중 하나의 원소가 되도록 하는 방법의 수는 3^8이다.

이때 $n(B)=5$인 경우는

$${}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\cdot\ 7\cdot\ 6}{3\cdot\ 2\cdot\ 1}=56$$

이때 집합 B의 원소 5개를 $A\subset B$를 만족시키도록 집합 A, $B-A$ 중 하나의 원소가 되도록 하는 방법의 수는 2^5이다.

따라서 구하는 확률 $\mathrm{P}(S|T)=\dfrac{56\cdot\ 2^5}{3^8}=\dfrac{7\cdot\ 2^8}{3^8}$이므로

$a+b=8+8=16$

39. [정답] ②

양면이 모두 흰색인 카드가 나오는 사건을 A, 한 면은 흰색이고 다른 면은 검은 색인 카드가 나오는 사건을 B라 하자.

$$\mathrm{P}(A|A\cup B)$$
$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap(A\cup B))}{\mathrm{P}(A\cup B)}$$
$$=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A\cup B)}$$
$$=\frac{\frac{n+2}{4n+1}}{\frac{3n+1}{4n+1}}$$
$$=\frac{n+2}{3n+1}$$

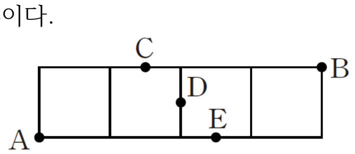
에서

$\dfrac{n+2}{3n+1}=\dfrac{6}{13}$, $13n+26=18n+6$

$\therefore\ n=4$

40. [정답] 77

A,B 지점에서 같은 속력으로 걸어오는 두 사람이 중간에서 만나게 되는 경우는 그림에서 도로망의 중간지점인 C, D, E 지점에
서 만나는 경우이다.



갈림길에서 양쪽 방향으로 지나갈 확률은 각각 $\dfrac{1}{2}$이므로

(ⅰ)A 지점에서 출발하는 소영이의 경우

각 갈림길에서 C, D, E 지점에 최단거리로 갈 확률은 각각

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{1}{2}\right)^3,\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

(ⅱ)B 지점에서 출발하는 영훈이의 경우

각 갈림길에서 C, D, E 지점에 최단거리로 갈 확률은 각각

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3,\left(\frac{1}{2}\right)^3,\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

(ⅰ),(ⅱ)에서

① 두 사람이 C 또는E 지점에서 만날 확률은

$$\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{8}\times 2=\frac{3}{16}$$

② 두 사람이 D 지점에서 만날 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{64}$$

그러므로 구하는 확률은

$$\frac{3}{16}+\frac{1}{64}=\frac{13}{64}$$

따라서$p=64, q=13$이므로 $p+q=77$

41. [정답] ④

(i) A팀이 3층 301호, 302호, 2층 201호, 203호, 1층 101호, 104호 중 한 사무실에 배치되는 경우 B팀의 사무실은 자동으로 그 옆 사무실에 배치되어야 한다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6}{9}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{12}$

(ii) A팀이 2층 202호, 1층 102호, 103호 중 한 사무실에 배치되는 경우 B팀의 사무실은 A팀의 사무실의 양 옆 사무실 중 한 사무실에 배치되어야 한다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{9}\times\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{12}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

[다른풀이]

9개의 사무실에 9개의 팀을 배치하는 경우의 수는 9!이다.

이웃하는 두 사무실을 선택하는 경우의 수는

(301호, 302호), (201호, 202호), (202호, 203호), (101호, 102호), (102호, 103호), (103호, 104호)

의 6이고 두 사무실에 A팀과 B팀을 배치하는 경우의 수는 2, 나머지 팀을 배치하는 경우의 수는 7!이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6\times 2\times 7!}{9!}=\frac{1}{6}$$

42. [정답] 139

9개의 공에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수는

$${}_{9}\mathrm{C}_{3}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

세 수의 곱이 6의 배수가 되려면 세 수의 곱이 2와 3을 약수로 가져야 하므로

(i) 세 수에 6이 포함되는 경우

나머지 8개의 수에서 2개의 수를 뽑는 경우의 수는

$${}_{8}\mathrm{C}_{2}=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

(ii) 세 수에 6이 포함되지 않는 경우

나머지 8개의 수를 2의 배수, 3의 배수, 2의 배수 또는 3의 ㅐ수가 아닌 수의 집합 A, B, C로 나누면

$A=\{2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{3,\ 9\}$, $C=\{1,\ 5,\ 7\}$

① 세 집합 A, B, C에서 각각 하나씩 뽑는 경우의 수는

$${}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{2}\mathrm{C}_{1}\times{}_{3}\mathrm{C}_{1}=3\times2\times3=18$$

② 집합 A에서 2개, 집합 B에서 1개를 뽑는 경우의 수는

$${}_{3}\mathrm{C}_{2}\times{}_{2}\mathrm{C}_{1}=3\times2=6$$

③ 집합 A에서 1개, 집합 B에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{2}\mathrm{C}_{2}=3\times1=3$$

따라서 (i), (ii)에서 세 수의 곱이 6의 배수가 되는 경우의 수는

$28+18+6+3=55$

이므로 구하는 확률은 $\frac{55}{84}$이다.

$\therefore\ p=84,\ q=55$

$\therefore\ p+q=84+55=139$

43. [정답] 22

동전을 1번 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

원점에서 점 (2, 8) 또는 점 (8, 2)까지의 거리 d는

$d=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}<9$이고 마찬가지로 원점에서 점 (3, 7),

점 (4, 6), 점 (5, 5), 점 (6, 4), 점 (7, 3)까지의 거리 또한 모두 9보다 작다.

원점에서 점 (1, 9) 또는 점 (9, 1)까지의 거리 d'는

$d'=\sqrt{1^2+9^2}=\sqrt{82}>9$이다.

따라서 10번 이동한 결과 점 P가 원 $x^2+y^2=81$의 외부에 있으려면

동전을 10번 던져 앞면이 나온 횟수가 0, 1, 9, 10이어야 하므로

$$p={}_{10}\mathrm{C}_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}$$

$$+{}_{10}\mathrm{C}_{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$$

$$=\frac{1}{2^{10}}({}_{10}\mathrm{C}_{0}+{}_{10}\mathrm{C}_{1}+{}_{10}\mathrm{C}_{9}+{}_{10}\mathrm{C}_{10})$$

$$=\frac{1}{2^{10}}(1+10+10+1)=\frac{22}{2^{10}}$$

$$\therefore\ 2^{10}P=2^{10}\times\frac{22}{2^{10}}=22$$

44. [정답] ②

(i) 흰 공만 5번 나오는 경우

검은 공이 연속하여 나올 수 없으므로 $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{3^5}$

(ii) 흰 공 4번, 검은 공 1번 나오는 경우

검은 공이 연속하여 나올 수 없으므로

$${}_{5}\mathrm{C}_{1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{80}{3^5}$$

(iii) 흰 공 3번, 검은 공 2번 나오는 경우

검은 공이 연속하여 나오지 않는 경우는

∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨

위 의 ∨ 표시 중 2군데에서 검은 공이 나오는 경우이므로 그 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{48}{3^5}$$

(iv) 흰 공 2번, 검은 공 3번 나오는 경우

● ○ ● ○ ●

와 같은 경우이므로 그 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4}{3^5}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{32+80+48+4}{3^5}=\frac{164}{3^5}$이다.

45. [정답] 508

1번의 시행에서 문자, 숫자가 적힌 카드가 각각 하나씩 나올 확률은

$$\frac{{}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{3}\mathrm{C}_{1}}{{}_{6}\mathrm{C}_{2}}=\frac{3\times3}{\frac{6\times5}{2\times1}}=\frac{3}{5}$$

문자가 적힌 카드 2개 또는 숫자가 적힌 카드 2개가 나올 확률은

$$\frac{{}_{3}\mathrm{C}_{2}}{{}_{6}\mathrm{C}_{2}}+\frac{{}_{3}\mathrm{C}_{2}}{{}_{6}\mathrm{C}_{2}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

3번의 시행에서 게임판에 돌이 1개만 놓여있는 경우는 다음과 같은 3가지로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 3번 모두 같은 칸이 선택된 경우

처음 1칸이 선택될 확률은 $\frac{3}{5}$이고 그 칸이 다시 선택될 확률은

$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

따라서 3번 모두 같은 칸이 선택될 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{15}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{375}$

(ii) 2번은 같은 칸이 선택되고, 1번은 다른 칸이 선택될 경우

2번 같은 칸이 선택될 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{15}$

1번은 다른 칸이 선택될 확률은 $\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1-1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

3번 중 다른 칸이 1번 나오는 경우의 수 ${}_3C_1$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{15}\times\frac{8}{15}\times{}_3C_1=\frac{8}{125}$

(iii) 1번은 칸이 선택되고 2번은 칸을 선택하지 않는 경우

1번 칸이 선택될 확률 $\frac{3}{5}$

2번 칸을 선택하지 않을 확률 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$

3번 중 1번 칸이 선택되는 경우의 수 ${}_3C_1$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{4}{25}\times{}_3C_1=\frac{36}{125}$

(i), (ii), (iii)에서 게임판에 돌이 1개만 놓여 있을 확률은

$\frac{1}{375}+\frac{8}{125}+\frac{36}{125}=\frac{133}{375}$

$\therefore\ p+q=375+133=508$

46. [정답] 47

탁자 위에 놓인 5장의 카드 중 위를 향하도록 놓인 면의 색이 흰 색, 검은 색인 카드의 수를 각각 a, b라 하면 주사위를 던지기 전에는 $(a,\ b)=(3,\ 2)$이다.

한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수에 따라 나올 수 있는 경우는 다음과 같다.

(i) 2 이하인 경우: $(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$, $(5,\ 0)$

(ii) 3 이상인 경우: $(0,\ 5)$, $(2,\ 3)$, $(4,\ 1)$

이때 검은 색인 면이 위를 향하도록 놓인 카드의 수가 3 이상인 경우는 $(1,\ 4)$, $(0,\ 5)$, $(2,\ 3)$이고 각각의 사건은 서로 배반이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}+\frac{2}{3}\times\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}+\frac{2}{3}\times\frac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{10}$

$=\frac{17}{30}$

따라서 $p=30,\ q=17$이므로

$p+q=30+17=47$

47. [정답] ④

4개의 전구를 4개의 전기 장치에 연결하는 경우의 수는 $4!=24$(가지)이고, 각 전구에 불이 켜지는 경우에 대하여 전기 장치 1번부터 4번까지에 연결되는 전구의 번호를 나열하면 각각 다음과 같다.

1번 전구 : $\underline{1}342$, $\underline{1}423$

2번 전구 : $1\underline{2}43$, $3\underline{2}41$, $4\underline{2}13$

3번 전구 : $24\underline{3}1$, $42\underline{3}1$, $14\underline{3}2$, $41\underline{3}2$

4번 전구 : $123\underline{4}$, $132\underline{4}$, $213\underline{4}$, $231\underline{4}$, $312\underline{4}$, $321\underline{4}$

전구에 불이 켜지는 사건을 A, 홀수 번호에 불이 켜지는 사건을 B라 하면

$P(A\cap B)=\frac{6}{4!}=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B^c)=\frac{9}{4!}=\frac{3}{8}$이므로

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}}=\frac{2}{5}$

48. 정답 23

유리와 성준이가 비길 사건을 A, 두 사람 모두 3점을 받을 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

두 사람이 비기는 경우는 두 사람이 같은 점수를 받는 경우이다.

두 사람 모두 n점이 나올 확률을 P_n이라 하면 주사위 눈에는 0, 7이 없으므로

$P_0=0$, $P_7=0$

$P_n=\frac{1}{6}\times{}_7C_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{7-n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6)$

$\therefore\ P(A)=P_0+P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2^7}({}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+{}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6)$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2^7}\times(2^7-2)$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P_3}{P(A)}$

$$=\frac{\frac{1}{6}\times{}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{6}\times\frac{1}{2^7}\times(2^7-2)}$$

$$=\frac{{}_7C_3}{2^7-2}$$

$$=\frac{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}{128-2}$$

$$=\frac{35}{126}$$

$$=\frac{5}{18}$$

$\therefore\ p=18,\ q=5$

$\therefore\ p+q=18+5$

$=23$

<참고>

$${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+{}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7=2^7$$

49. 정답 ④

B를 검은 바둑돌, W를 흰 바둑돌이라 하자.

(i) 첫 번째 시행에서 서로 같은 바둑돌을 선택하는 경우

$(B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

첫 번째 시행에서 서로 같은 색의 바둑돌을 선택하고 두 번째 시행에서도 서로 같은 색의 바둑돌을 선택하여 교환하여야 하므로 흰 바둑돌을 선택하는 경우와 검은 바둑돌을 선택하는 경우로 2가지 경우가 있고 각 상자에서 하나의 바둑돌을 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$$\left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

(ii) 첫 번째 시행에서 서로 다른 색의 바둑돌을 선택하는 경우

$(B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to (B,\ B),\ (W,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

$\to (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W),\ (B,\ W)$

한 상자에서 바둑돌을 한 개 선택하면 다른 한 상자에서 그와 다른 색 바둑돌을 한 개 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$, 두 번째 시행에서 네 상자 중에서 $(B,\ B)$, $(W,\ W)$인 상자를 선택한 다음 바둑돌을 하나씩 꺼내 교환하면 되므로

$$\left(1\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{{}_4C_2}\times1=\frac{1}{12}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

50. 정답 220

동전 A가 앞면이 a 번 나오고, 동전 B가 앞면이 b번 나왔다고 하면 이동된 점 P의

x좌표는 $a-(6-a)=2a-6\ (0\le\ a\le\ 6)$

y좌표는 $b-(6-b)=2b-6\ (0\le\ b\le\ 6)$

이 된다.

옮겨진 점이 직선 $x+y=6$ 위에 있으므로

$(2a-6)+(2b-6)=6$에서

$a+b=9$

조건을 만족시키는 $a,\ b$를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(6,\ 3),\ (5,\ 4),\ (4,\ 5),\ (3,\ 6)$

동전 A가 앞면이 a번, 동전 B가 앞면이 b번 나올 확률은

$${}_6C_a\left(\frac{1}{2}\right)^6\times{}_6C_b\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{{}_6C_a\cdot\ {}_6C_b}{2^{12}}$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_6C_6\cdot\ {}_6C_3+{}_6C_5\cdot\ {}_6C_4+{}_6C_4\cdot\ {}_6C_5+{}_6C_3\cdot\ {}_6C_6}{2^{12}}$$

$$=\frac{2({}_6C_6\cdot\ {}_6C_3+{}_6C_5\cdot\ {}_6C_4)}{2^{12}}$$

$$=\frac{2(1\times20+6\times15)}{2^{12}}$$

$$=\frac{220}{2^{12}}$$

$$\therefore\ p=\frac{220}{2^{12}}$$

$$\therefore\ 2^{12}\times p=2^{12}\times\frac{220}{2^{12}}$$

$=220$

51. 정답 ②

9장의 카드 중에서 임의로 3장을 선택하는 모든 경우의 수는

$${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84\text{(가지)}$$

3장의 카드를 뒤집을 때, 앞면이 보이는 카드 3장 중에서 m장,

뒷면이 보이는 카드 6장 중에서 n장을 뒤집었다고 하면

$0\le\ m\le\ 3,\ 0\le\ n\le\ 3$

$m+n=3$ …… ㉠

$m+(6-n)=5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$m=1, n=2$

그러므로 뒷면이 보이는 카드가 5장이 되는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_6C_2=3\times\frac{6\times5}{2\times1}=45$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_3C_1\times{}_6C_2}{{}_9C_3}=\frac{45}{84}=\frac{15}{28}$$

52. 정답 ④

사각형을 만들 수 있는 모든 경우의 수는

$${}_7C_2\times{}_7C_2=\left(\frac{7\times6}{2\times1}\right)^2=(7\times3)^2\text{가지}$$

정사각형의 개수는 한 변의 길이가 $i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6)$ 인 정사각형의 개수가

$(7-i)^2$

이므로 한 변의 길이가 1부터 6까지인 정사각형의 개수는

$$\sum_{i=1}^{6}(7-i)^2=\sum_{k=1}^{6}k^2$$
$$=\frac{6\times7\times13}{6}$$
$$=7\times13$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{7\times13}{(7\times3)^2}=\frac{13}{7\times9}$$
$$=\frac{13}{63}$$

53. 정답 193

주사위를 4번 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

6^4(가지)

두 선분이 만나려면

$a-c\ge 0,\ b-d\le 0$

$a\ge c,\ b\le d$

$a\ge c$를 만족시키는 $a,\ c$의 순서쌍 $(a,\ c)$의 개수는 1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 두 수를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6H_2={}_{6+2-1}C_2$$
$$={}_7C_2$$
$$=\frac{7\times6}{2\times1}$$

21(가지)

같은 방법으로 $(b,\ d)$를 선택하는 경우의 수도

${}_6H_2=21$(가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{21\times21}{6^4}=\frac{49}{144}$$

$\therefore\ p=144,\ q=49$

$\therefore\ p+q=144+49=193$

다른 풀이

$a\ge c$를 만족시키는 $a,\ c$의 순서쌍 $(a,\ c)$는

$(1,\ 1)$,

$(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$,

$(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$,

$(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$, $(4,\ 4)$,

$(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 3)$, $(5,\ 4)$, $(5,\ 5)$,

$(6,\ 1)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 3)$, $(6,\ 4)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 6)$

이므로 $a,\ c$의 순서쌍 $(a,\ c)$의 개수는

$$1+2+3+4+5+6=\frac{6\times7}{2}$$
$$=21$$

같은 방법으로 $b\le d$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ d)$의 개수도 21이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{21\times21}{6^4}=\frac{49}{144}$$

$\therefore\ p=144,\ q=49$

$\therefore\ p+q=144+49=193$

54. 정답 ①

방정식 $x^3-3x+a-b=0$, 즉 $x^3-3x=b-a$에서

$f(x)=x^3-3x$, $g(x)=b-a$라 할 때,

방정식 $x^3-3x+a-b=0$이 서로 다른 두 실근만을 가지려면 함수 $f(x)=x^3-3x$의 그래프와 직선 $g(x)=b-a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

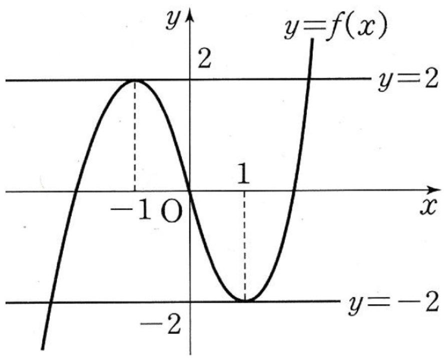
$f'(x)=3x^2-3$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 두 실근만을 가지려면

$b-a=-2$ 또는 $b-a=2$이어야 한다.

이때 a와 b는 6 이하의 자연수이므로

(ⅰ) $b-a=-2$, 즉 $a-b=2$인 경우를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(3,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 4)$

(ⅱ) $b-a=2$, 즉 $a-b=-2$인 경우를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(1,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 6)$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

55. 정답 ⑤

9개의 사탕이 들어 있는 상자에서 임의로 3개의 사탕을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$$_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$$
$$=84$$

사탕 3개가 적어도 2가지 종류의 사탕으로 나오는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^c은 3개의 사탕 모두 청포도 맛 사탕이거나 멜론 맛 사탕일 것이다.

(ⅰ) 3개 모두 청포도 맛 사탕일 확률

청포도 맛 사탕 4개에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

이므로 이때의 확률은

$\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$

(ⅱ) 3개 모두 멜론 맛 사탕일 확률

멜론 맛 사탕 3개에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_3C_3=1$

이므로 이때의 확률은

$\frac{1}{84}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 3개 모두 청포도 맛 사탕일 사건과 3개 모두 멜론 맛 사탕일 사건은 서로 배반사건이므로

$$P(A^c)=\frac{1}{21}+\frac{1}{84}$$
$$=\frac{5}{84}$$

따라서 구하는 확률은

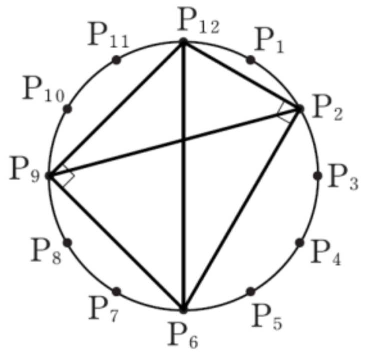
$$P(A)=1-P(A^c)$$
$$=1-\frac{5}{84}$$
$$=\frac{79}{84}$$

56. [정답] ⑤

주어진 12개의 점 중에서 서로 다른 4개를 택하여 만들 수 있는 사각형의 개수는

$$_{12}C_4=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495$$

사각형의 내각 중 예각, 직각, 둔각인 각이 모두 존재하려면 사각형의 두 대각선 중 하나는 원의 지름이고, 다른 하나는 지름이 아니어야 한다.



주어진 12개의 점 중에서 2개를 이어서 만들 수 있는 원의 지름의 개수는 $\overline{P_1P_7}$, $\overline{P_2P_8}$, $\cdots$, $\overline{P_6P_{12}}$의 6이다.

그림과 같이 지름 P_6P_{12}를 대각선으로 하고 다른 대각선은 원의 지름이 아닌 사각형의 개수는 다음과 같다.

(ⅰ) 5개의 점 P_1, P_2, $\cdots$, P_5 중에서 1개를 택하는 방법의 수는 5이다.

(ⅱ) 5개의 점 P_7, P_8, $\cdots$, P_{11} 중에서 (ⅰ)에서 택한 점과 지름의 양 끝점을 이루는 점 1개를 택하는 방법의 수는 4이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\overline{P_6P_{12}}$를 대각선으로 하고 다른 대각선은 원의 지름이 아닌 사각형의 개수는

$5\times4=20$

따라서 6개의 지름에 대하여 주어진 조건을 만족시키는 사각형이 각각 20개씩 존재하므로 구하는 확률은

$\frac{6\times20}{495}=\frac{8}{33}$

57. [정답] 21

동전을 6번 던져서 나온 면을 다음 6개의 자리에 차례로 나열한다.

□ □ □ □ □ □

이때 모든 경우의 수는 $2^6=64$이다.

맨 처음에 앞면이 나왔다고 하자.

나머지 5개의 자리 중에서 점수를 얻을 2개의 자리를 임의로 택한다.

예를 들어

앞 □ 1점 □ □ 2점

이라 하자.

나머지 3개의 빈 칸을 채우는 경우는 항상 유일하게 정해진다.

즉, 위의 예에서는 6개의 자리에 차례로

앞, 뒤, 뒤, 앞, 뒤, 뒤

가 된다.

따라서 맨 처음에 앞면이 나와서 2점을 얻는 경우의 수는

$_5C_2=10$

마찬가지로 맨 처음에 뒷면이 나와서 2점을 얻는 경우의 수는

$_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{_5C_2\times2}{2^6}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$

$\therefore p+q=16+5=21$

58. [정답] 91

빨간 공이 한 번 나오는 사건을 A, 파란 공이 한 번 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$\mathrm{P}(A)={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{4^4}{5^4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)$는 5번의 시행 중 빨간 공이 한 번 나오고, 나머지 4번의 시행 중 한 번은 파란 공이, 3번은 흰 공이 나왔을 확률이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)={}_5\mathrm{C}_1\times\frac{1}{5}\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3$$
$$=\frac{4\times3^3}{5^4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4\times3^3}{5^4}}{\frac{4^4}{5^4}}=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}$$

이므로 $p=64,\ q=27$

$\therefore\ p+q=64+27=91$

59. [정답] ②

3개의 주사위 A, B, C의 눈의 수를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $a,\ b,\ c$ 모두 4일 확률은

$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$

(ⅱ) $a,\ b,\ c$ 중 두 개만 4일 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{15}{216}$

(ⅲ) $a,\ b,\ c$ 중 하나는 4이고 다른 한 수는 4보다 크며 나머지 한 수는 4보다 작을 확률은

$3!\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\right)=\frac{36}{216}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{1+15+36}{216}=\frac{13}{54}$

60. [정답] ④

갑이 주머니 A를 선택하는 사건을 A, 주머니 B를 선택하는 사건을 B라 하고, 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 9 이하인 사건을 C라 하자.

을의 판단이 옳기 위한 필요충분조건은 A주머니가 선택되면 9 이하의 수가 적힌 카드가 나오고, B주머니가 선택되면 10 이상의 수가 적힌 카드가 나오는 것이다.

따라서 을의 판단이 옳을 확률은

$\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C^C)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^C|B)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{11}{20}=\frac{29}{40}$

[오답 피하기]

을의 판단이 옳기 위한 필요충분조건은 9 이하의 수가 적힌 카드가 나왔다면 그 카드는 A주머니에서 나오고, 10 이상의 수가 적힌 카드가 나왔다면 그 카드는 B주머니에서 나오는 것이다.

그런데 이를 이용하여 을의 판단이 옳을 확률을 구하려면 계산과정이 매우 복잡하므로 다음 성질을 이용하여 위의 풀이와 같은 방법으로 구할 수 있다.

즉, 을의 판단이 옳을 확률은

$\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A|C)+\mathrm{P}(C^C)\mathrm{P}(B|C^C)$

$=\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C^C)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^C|B)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{11}{20}$

$=\frac{29}{40}$

61. [정답] ⑤

이 시행을 한 번 할 때, 앞면이 한 번 나올 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

…… ㉠

이 시행을 한 번 할 때, 앞면이 두 번 나올 확률은

$\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}$

…… ㉡

이 시행을 한 번 할 때, 앞면이 나오지 않을 확률은

$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$

…… ㉢

(ⅰ) 이 시행을 세 번 할 때, 세 번 모두 앞면이 한 번씩 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(ⅱ) 이 시행을 세 번 할 때, 한 번은 앞면이 한 번 나오고 한 번은 앞면이 두 번 나오고 나머지 한 번은 앞면이 나오지 않을 확률은

$3!\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{3+4}{24}=\frac{7}{24}$

[오답 피하기]
다음은 위의 풀이에서 (ⅱ)의 경우를 나타낸 것이다.

첫 번째	두 번째	세 번째
㉠	㉡	㉢
㉠	㉢	㉡
㉡	㉠	㉢
㉡	㉢	㉠
㉢	㉠	㉡
㉢	㉡	㉠

62. [정답] ①

5개의 당첨번호를 $1,2,3,4,5$라 하고 1개의 행운번호를 6이라 하자.
또, 1등, 2등, 3등 번호의 구슬을 뽑는 사건을 각각 A, B, C라 하자.
(i) 1등 번호를 뽑기 위해서는 $1,2,3,4,5$가 적힌 5개의 구슬을 뽑아야 하므로

$$P(A)=\frac{{}_5C_5}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{\frac{10!}{5!5!}}=\frac{1}{252}$$

(ii) 2등 번호를 뽑기 위해서는 $1,2,3,4,5$가 적힌 5개의 구슬 중에서 4개를 뽑고, 6이 적힌 1개의 구슬을 뽑아야 하므로

$$P(B)=\frac{{}_5C_4\times{}_1C_1}{{}_{10}C_5}=\frac{5\times1}{252}=\frac{5}{252}$$

(iii) 3등 번호를 뽑기 위해서는 $1,2,3,4,5$가 적힌 5개의 구슬 중에서 4개를 뽑고, $7,8,9,10$이 적힌 4개의 구슬 중에서 1개의 구슬을 뽑아야 하므로

$$P(C)=\frac{{}_5C_4\times{}_4C_1}{{}_{10}C_5}=\frac{5\times4}{252}=\frac{20}{252}$$

이때 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 상금을 받게 될 확률은

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$=\frac{1}{252}+\frac{5}{252}+\frac{20}{252}=\frac{26}{252}=\frac{13}{126}$$

63. [정답] ②

이 시행을 2번 반복한 후 ×가 보이도록 놓인 카드가 1개인 사건을 A, 첫 번째 시행에서 ×가 보이도록 놓인 카드를 뒤집는 사건을 B라 하자.
2번의 시행을 한 후 ×가 보이도록 놓인 카드가 1개인 경우는 다음과 같다.
(i) ×가 보이도록 놓인 카드를 뒤집고 ○가 보이도록 놓인 카드를 뒤집는 경우
이때의 확률은 $\frac{1}{6}\times1=\frac{1}{6}$
(ii) ○가 보이도록 놓인 카드를 뒤집고 ×가 보이도록 놓인 카드를 뒤집는 경우
이때의 확률은 $\frac{5}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{18}$
따라서 $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{5}{18}=\frac{4}{9}$이고, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{8}$$

64. [정답] 33

(i) 주사위를 5번 던져 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 $a(0\le a\le 5)$라 하면 3의 배수가 아닌 눈이 나온 횟수는 $5-a$이다.
x좌표가 3만큼 증가했으므로
$1\times a+(-1)\cdot(5-a)=3$
$\therefore\ a=4$
(ii) 주사위를 5번 던져 앞면이 나온 횟수를 $b(0\le b\le 5)$라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $5-b$이다.
y좌표가 1만큼 증가했으므로
$1\times b+(-1)\cdot(5-b)=1$
$\therefore\ b=3$
한 개가 주사위를 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 한 개의 동전을 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1\times{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{3^5}\times\frac{10}{2^5}=\frac{25}{3^5\times8}$$

따라서 $p=8,\ q=25$이므로
$p+q=33$

65. [정답] ②

해설
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하면 각 자리의 수들의 합이 7이 되는 경우는
$a+b+c+d=7$ (단, $a\ge1$, $b,\ c,\ d$는 음이 아닌 정수)
$a=a'+1$이라 하면
$(a'+1)+b+c+d=7$
$\therefore\ a'+b+c+d=6$ (단, $a',\ b,\ c,\ d$는 음이 아닌 정수) ⋯ ㉠
방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a',\ b,\ c,\ d$의 순서쌍 $(a',\ b,\ c,\ d)$의 개수는
${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3$

$=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{84}{6000}=\dfrac{7}{500}$

66. [정답] ③

해설

여섯 장의 카드를 모두 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!2!}=180$

주어진 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $\boxed{\boxed{4},\boxed{1},\boxed{4}}$, $\boxed{\boxed{3},\boxed{2},\boxed{3}}$

위 그림과 같이 $\boxed{4}$, $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 카드를 묶고, $\boxed{3}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 카드를 묶은 두 묶음을 배열하는 경우의 수는 $2!=2$ (가지)

(ⅱ) $\boxed{\boxed{3},\boxed{2},\boxed{1},\boxed{4}}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$

위 그림과 같이 $\boxed{3}$, $\boxed{2}$, $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 카드를 묶고, 이 묶음과 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ 를 배열하는 경우의 수는 $3!=6$ (가지)

(ⅲ) $\boxed{\boxed{4},\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3}}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$

위 그림과 같이 $\boxed{4}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 카드를 묶고, 이 묶음과 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ 를 배열하는 경우의 수는 $3!=6$ (가지)

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 확률은

$\dfrac{2+6+6}{180}=\dfrac{7}{90}$

67. [정답] 489

해설

원소가 2 개 이상인 부분집합의 개수는

${}_9C_2+{}_9C_2+{}_9C_4+\cdots+{}_9C_9=2^9-({}_9C_0+{}_9C_1)$

$=2^9-(1+9)$

$=502$

부분집합의 모든 원소의 곱이 짝수인 사건을 A 라 하면 그 여사건 A^c 은 부분집합의 모든 원소의 곱이 홀수인 사건이고, 부분집합의 모든 원소의 곱이 홀수가 되는 경우는 부분집합의 모든 원소가 홀수이어야 한다.

집합 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개 이상인 부분집합의 개수는

${}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5-({}_5C_0+{}_5C_1)=26$

$\therefore\ P(A^c)=\dfrac{26}{502}=\dfrac{13}{251}$

$\therefore\ P(A)=1-P(A^c)=1-\dfrac{13}{251}=\dfrac{238}{251}$

$\therefore\ p+q=251+238=489$

68. [정답] ③

해설

0 을 a 번, 1 을 b 번, 2 를 c 번 사용했다고 하면

$a+b+c=5,\ b+2c=6$

을 만족시키는 $a,\ b,\ c$ 의 경우와 이 숫자를 표에 넣는 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) $c=3,\ b=0,\ a=2$ 인 경우

$a,\ a,\ c,\ c,\ c$ 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!3!}=10$

(ⅱ) $c=2,\ b=2,\ a=1$ 인 경우

$a,\ b,\ b,\ c,\ c$ 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$

(ⅲ) $c=1,\ b=4,\ a=0$ 인 경우

$b,\ b,\ b,\ b,\ c$ 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{4!}=5$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 확률은

$\dfrac{10}{10+30+5}=\dfrac{10}{45}=\dfrac{2}{9}$

69. [정답] ①

해설

주머니 A 에서 B 로 옮겨진 공의 숫자를 a, 주머니 B 에서 A 로 옮겨진 공의 숫자를 b 라 하자.

(ⅰ) $a=1,\ b=1$ 일 때,

주머니 A 에서 숫자 1 의 공을 꺼내고, 주머니 B 에서 숫자 1 의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

공을 옮긴 후 주머니 A 와 B 에서 꺼낸 공의 숫자의 곱이 홀수일 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$$\therefore\ \frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{4}{81}$$

(ⅱ) $a=1,\ b=2$ 일 때,

주머니 A 에서 숫자 1 의 공을 꺼내고, 주머니 B 에서 숫자 2 의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

공을 옮긴 후 주머니 A 와 B 에서 꺼낸 공의 숫자의 곱이 홀수일 확률은

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$\therefore\ \frac{4}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{8}{81}$$

(ⅲ) $a=2,\ b=1$ 일 때에는 공을 옮긴 후 주머니 A 에는 숫자 1 의 공만 들어 있고, 주머니 B 에는 숫자 2 의 공만 들어 있으므로 공을 옮긴 후 주머니 A 와 B 에서 꺼낸 공의 숫자의 곱이 홀수가 될 수 없다.

(ⅳ) $a=2,\ b=2$ 일 때,

주머니 A 에서 숫자 2 의 공을 꺼내고, 주머니 B 에서 숫자 2 의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

공을 옮긴 후 주머니 A 와 B 에서 꺼낸 공의 숫자의 곱이 홀수일 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$$\therefore\ \frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{4}{81}$$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{81}+\frac{8}{81}+\frac{4}{81}=\frac{16}{81}$$

70. [정답] ②

해설

두 장의 카드에 적혀 있는 수가 연속된 홀수인 경우는 $(1,\ 3),\ (3,\ 5),\ \cdots,\ (2n-1,\ 2n-1)$ 인 경우이다. 그러므로 총 n 가지의 경우가 나타난다.

그런데 $(2n+1)$ 장의 카드에서 2 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{2n+1}C_2=\frac{(2n+1)(2n+1-1)}{2}=n(2n+1) \text{ 이므로}$$

$$p_n=\frac{n}{n(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} n p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

71. [정답] ②

해설

집합 S 의 원소의 개수는 6 개의 수에서 중복을 허용하여 5 개의 수를 고르는 방법의 수와 같다. 즉,

$${}_{6+5-1}C_5={}_{10}C_5=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2}=252$$

이 중 $a_1\le a_2\le a_3\le a_4=a_5$ 인 사건을 A,

$a_1\le a_2=a_3\le a_4\le a_5$ 인 사건을 B 라 하면 사건 A 나 사건 B 는 6 개의 수에서 중복을 허용하여 4 개의 수를 고르는 방법이므로

$$n(A)=n(B)={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4$$
$$=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2}=126$$

또, $a_1\le a_2=a_3\le a_4=a_5$ 는 사건 A 와 사건 B 의 곱사건으로

$$n(A\cap B)={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$$

$$P(A)=P(B)=\frac{126}{252}=\frac{1}{2} \text{ 이고}$$

$$P(A\cap B)=\frac{56}{252}=\frac{2}{9} \text{ 이므로}$$

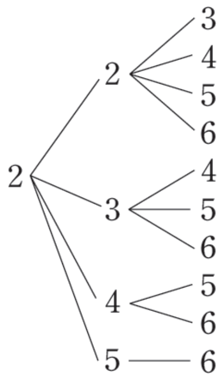
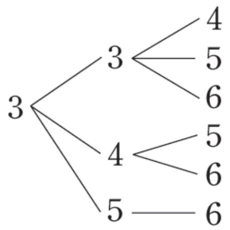
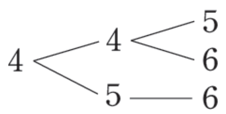
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

따라서 구하는 사건은 $A^c\cap B^c$ 이므로

$$P(A^c\cap B^c)=P\left((A\cup B)^c\right)=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}$$

[다른풀이]

$a_1\le a_2<a_3\le a_4<a_5$ 인 경우의 수는 a_3 을 기준으로 수형도로 나타내어 보면

<table>
<tr><td colspan="2">a_1
a_2</td><td>a_3 a_4 a_5</td><td>경우의</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 1</td><td></td><td>$4+3+2+$</td></tr>
<tr><td>${}_{2+2-1}C_2$
$={}_3C_2$</td><td>1 1
1 2
2 2</td><td></td><td>${}_3C_2(3+2$
$=3\times6=$</td></tr>
<tr><td>${}_{3+2-1}C_2$
$={}_4C_2$</td><td>1 1
1 2
⋮
3 3</td><td></td><td>${}_4C_2(2+$
$=6\times3=$</td></tr>
<tr><td>${}_{4+2-1}C_2$
$={}_5C_2$</td><td>1 1
1 2
⋮
4 4</td><td>5 —— 5 —— 6</td><td>${}_5C_2\times1=$</td></tr>
<tr><td colspan="3">합계</td><td>56</td></tr>
</table>

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{56}{252}=\dfrac{2}{9}$

72. [정답] 743

해설

지환이가 심층면접시험을 합격할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{3}+{}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{48}{81}=\frac{16}{27}$$

민재가 심층면접시험을 합격할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}+{}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$$

두 학생이 모두 심층면접시험을 합격하지 못할 확률은

$$\left(1-\frac{16}{27}\right)\left(1-\frac{5}{16}\right)=\frac{121}{432}$$

따라서 구하는 확률은 $1-\dfrac{121}{432}=\dfrac{311}{432}$ 이므로

$p+q=432+311=743$

73. [정답] 1

해설

4 개의 공을 4 개의 상자에 하나씩 나누어 넣는 방법의 수는 $4\neq 24$ 이다. 따라서 1, 2, 3, 4 가 적힌 상자에 들어간 공의 숫자를 순서쌍으로 하여 이 24 가지의 경우를 분류하면 다음과 같다.

(i) $X=0$ 인 경우 : 1 번 상자에 2 번 공을 넣었을 때, 나머지 3 개의 공을 자신의 번호와 다른 상자에 넣는 경우의 순서쌍은 (2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3) 으로 3 가지가 나옸다. 1 번 상자에 3 번 또는 4 번 공을 넣었을 때도 각각 3 가지가 나오므로 경우의 수는 $3\times3=9$ 이다.

(ii) $X=1$ 인 경우 : 4 개의 숫자 중 같은 번호의 공이 들어갈 1 개의 상자를 택하는 방법은 4 가지이다. 예를 들어 1 번 공을 1 번 상자에 넣었을 때, 나머지 3 개의 공을 자신의 번호와 다른 상자에 넣는 경우의 순서쌍은 (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3) 으로 2 가지이다. 따라서 경우의 수는 $4\times2=8$ 이다.

(iii) $X=2$ 인 경우 : 4 개의 숫자 중 같은 번호의 공이 들어갈 2 개의 상자를 택하는 방법은 ${}_4C_2=6$ (가지)이고, 나머지 2 개의 공을 자신의 번호와 다른 상자에 넣는 방법은 한 가지이다. 따라서 경우의 수는 $6\times1=6$ 이다.

(iv) $X=3$ 인 경우는 없다.

(v) $X=4$ 인 경우는 (1, 2, 3, 4) 의 1 가지이다.

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	4	합
$P(X=x)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$	1

$$E(X)=0\times\frac{9}{24}+1\times\frac{8}{24}+2\times\frac{6}{24}+3\times\frac{1}{24}=1$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{9}{24}+1^2\times\frac{8}{24}+2^2\times\frac{6}{24}+3^2\times\frac{1}{24}=2$$

$$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-1^2=1$$

74. [정답] ②

해설

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2 이고 A 주머니에서 꺼낸 공이 검은 공인 경우와 흰 공인 경우로 나누어 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}+\frac{1}{3}\times\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{22}{63}$$

$$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}+\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_1\times{}_5C_1}{{}_7C_2}=\frac{34}{63}$$

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$

$\therefore\ E(X)=0\times\frac{22}{63}+1\times\frac{34}{63}+2\times\frac{1}{9}=\frac{48}{63}=\frac{16}{21}$

75. [정답] ④

해설

ㄱ. 1 부터 20 까지의 자연수 중 임의로 택한 서로 다른 두 수를 각각 a, b ($a<b$ 이고 $a=1, 2, 3, \cdots, 19, b=2, 3, 4, \cdots, 20$)라 하자.

(가)에서 $X=\frac{a+b}{2}$ 이므로 확률변수 X 의 값이 $\frac{21}{2}$ 인 경우를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

$(1, 20), (2, 19), (3, 18), \cdots, (10, 11)$ 의 10 가지이다.

따라서 그 확률은

$P\left(X=\frac{21}{2}\right)=\frac{10}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{19}$ (거짓)

ㄴ. 1 이상 40 이하의 홀수 중 임의로 택한 서로 다른 두 수는 각각 $2a-1, 2b-1$ ($a<b$ 이고 $a=1, 2, 3, \cdots, 19, b=2, 3, 4, \cdots, 20$)로 나타낼 수 있다.

따라서 확률변수 Y 는

$Y=\frac{(2a-1)+(2b-1)}{2}=2\cdot\frac{a+b}{2}-1=2X-1$

로 나타낼 수 있으므로

$E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1$ (참)

ㄷ. 41 이상 80 이하의 짝수 중 임의로 택한 서로 다른 두 수는 각각 $2a+40, 2b+40$ ($a<b$ 이고 $a=1, 2, 3, \cdots, 19, b=2, 3, 4, \cdots, 20$)로 나타낼 수 있다.

따라서 확률변수 Z 는

$Z=\frac{(2a+40)+(2b+40)}{2}=2\cdot\frac{a+b}{2}+40=2X+40$

로 나타낼 수 있으므로

$V(Z)=V(2X+40)=4V(X)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

76. [정답] 18

해설

확률변수 X 는 이항분포 $B(4, p)$ 를 따르므로

$P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2p^2(1-p)^2=6p^2(1-p)^2$

또, 확률변수 Y 는 이항분포 $B(4, 1-p)$ 를 따르므로

$P(Y<2)=P(Y=0)+P(Y=1)$

$={}_4\mathrm{C}_0p^4+{}_4\mathrm{C}_1(1-p)p^3$

$=p^4+4p^3(1-p)$

$P(Y<2)=P(X=2)$ 에서

$p^4+4p^3(1-p)=6p^2(1-p)^2$

$p^2+4p(1-p)=6(1-p)^2$ ($\because\ 0<p<1$)

$9p^2-16p+6=0$

$\therefore\ p=\frac{8-\sqrt{10}}{9}$ ($\because\ 0<p<1$)

따라서 $m=8, n=10$ 이므로 $m+n=18$

77. [정답] ⑤

해설 ㄱ. 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수는 평균에서 최댓값을 가지므로 $\mathrm{E}(X)=a<b=\mathrm{E}(Y)$ (참)

ㄴ. $\mathrm{P}(X\geq a)=0.5$

$\mathrm{P}(Y\geq a)>\mathrm{P}(Y\geq b)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(X\geq a)<\mathrm{P}(Y\geq a)$ (참)

ㄷ. $\sigma(X)=\sigma$, $\sigma(Y)=\sigma'$이라 하자.

$\mathrm{P}(a\leq X\leq c)=\mathrm{P}(b\leq Y\leq c)$에서

$\mathrm{P}(a\leq X\leq c)=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{c-a}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(b\leq Y\leq c)=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{c-b}{\sigma'}\right)$

이므로 $\frac{c-a}{\sigma}=\frac{c-b}{\sigma'}$

$2b=a+c$에서 $c-a=2(c-b)$이므로

$\frac{c-a}{\sigma}=\frac{2(c-b)}{\sigma}=\frac{c-b}{\sigma'}$

$\therefore\ \sigma=2\sigma'$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

78. [정답] 62

해설 신입생 모집 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ 4^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \geq 60) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{60-56}{4}\right)\\ &= \mathrm{P}(Z \geq 1)\\ &= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)\\ &= 0.16\end{aligned}$$

따라서 100명의 응시생 중 시험 점수가 60점 이상인 학생 수는 $100 \times 0.16 = 16$(명)이다.

$\therefore k = 16 - 9 = 7$(명)

이때, 최초 합격자로 결정되기 위한 최저 점수를 a점이라 하면

$$\mathrm{P}(X \geq a) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{a-56}{4}\right) = \frac{7}{100} = 0.07$$

이때, $\mathrm{P}(Z \geq 1.5) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.07$이므로

$$\frac{a-56}{4} = 1.5$$

$\therefore a = 62$(점)

79. [정답] 38

해설 주사위를 162번 던져 1또는 2의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르며, $n = 162$는 충분히 큰 수이므로 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$을 따른다. 이때, 주사위를 162번 던져 1 또는 2의 눈이 X번 나오면 그 나머지 눈은 $(162 - X)$번 나오므로 도착한 점의 좌표 $(x,\ y)$에 대하여 다음이 성립한다.

$x = y = 2X - (162 - X) = 3X - 162$

$\therefore x^2 + y^2 = 2x^2 = 2(3X - 162)^2 = 18(X - 54)^2 \leq 162$

$(X-54)^2 \leq 9$이므로 $51 \leq X \leq 57$

$$\begin{aligned}&\therefore \mathrm{P}(51 \leq X \leq 57)\\ &= \mathrm{P}\left(\frac{51-54}{6} \leq Z \leq \frac{57-54}{6}\right)\\ &= \mathrm{P}(-0.5 \leq Z \leq 0.5)\\ &= 2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.5)\\ &= 0.38\end{aligned}$$

$\therefore 100p = 100 \times 0.38 = 38$

80. [정답] ③

해설

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 16인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{16}\right)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X) = m$ (참)

ㄴ. $\mathrm{V}(4\overline{X}) = 4^2\mathrm{V}(\overline{X}) = 16 \times \frac{\sigma^2}{16} = \sigma^2 = \mathrm{V}(X)$ (참)

ㄷ. $\mathrm{E}\left(\overline{X^2}\right) = \mathrm{V}(\overline{X}) + \{\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}})\}^2 = \frac{\sigma^2}{16} + m^2$

$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \sigma^2 + m^2$

$\mathrm{E}(4\overline{X}^2) = \mathrm{E}(X^2)$에서

$4\left(\frac{\sigma^2}{16} + m^2\right) = \sigma^2 + m^2$

$3m^2 = \frac{3}{4}\sigma^2, \qquad 4m^2 = \sigma^2$

$\therefore\ \sigma = 2m$ $(\because\ m > 0)$

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{16}\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X} \leq \sigma) &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{\sigma - m}{\frac{\sigma}{4}}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{2m - m}{\frac{m}{2}}\right)\\ &= \mathrm{P}(Z \leq 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \leq 2\sigma) &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{2\sigma - m}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{4m - m}{2m}\right)\\ &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X} \leq \sigma) \neq \mathrm{P}(X \leq 2\sigma)$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

81. [정답] ③

해설

크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\left[\overline{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

이므로

$T_n = \left(\overline{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

ㄱ. $T_{16} = \frac{4\sigma}{\sqrt{16}} = \sigma$ (참)

ㄴ. $T_{2n} = \frac{4\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} T_n$

$\therefore\ {T_{2n}}^2 = \frac{1}{2}{T_n}^2$ (참)

ㄷ. $\frac{1}{4}\sigma < T_n \leq \frac{1}{2}\sigma$에서 $\frac{1}{4}\sigma < \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}\sigma$

즉, $8 \leq \sqrt{n} < 16$ $\therefore 64 \leq n < 256$

따라서 부등식 $\frac{1}{4}\sigma < T_n \leq \frac{1}{2}\sigma$를 만족시키는 자연수 n의 개수는

$256 - 64 = 192$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

82. [정답] ②

해설

이 해수욕장의 $10\,\mathrm{m}^2$당 수거되는 쓰레기의 무게를 확률변수 X(톤)이라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 0.3^2)$을 따른다. 이때, 이 해수욕장의 면적이 $250\,\mathrm{m}^2$인 어느 구역에서 수거된 쓰레기의 무게가 78톤 이상이려면 $10\,\mathrm{m}^2$당 수거된 쓰레기의 무게의 평균이 $\frac{78}{25} = 3.12$(톤) 이상이어야 한다. 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3,\ \frac{0.3^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(3,\ 0.06^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{x} \geq 3.12) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{3.12-3}{0.06}\right)\\ &= \mathrm{P}(Z \geq 2)\\ &= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)\\ &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228\end{aligned}$$

83. [정답] 80

해설

어떤 양수 k에 대하여 $\mathrm{P}(-k \leq Z \leq k) = \frac{\alpha}{100}$라 하면

크기가 256인 표본의 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간은

$$\overline{x} - k\frac{10}{\sqrt{256}} \leq m \leq \overline{x} + k\frac{10}{\sqrt{256}}$$

$\therefore a = \frac{5}{8}k$

한편, $\mathrm{P}(Z \leq 0.8) = 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.8) = 0.79$이므로 $\mathrm{P}(Z \leq a) = 0.79$에서 $a = 0.8$이다.

$\therefore k = \frac{8}{5}a = \frac{8}{5} \times 0.8 = 1.28$

이때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.28) = 0.40$이므로

$$\begin{aligned}\alpha &= 100\mathrm{P}(-1.28 \leq Z \leq 1.28)\\ &= 100 \times 2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.28)\\ &= 80\end{aligned}$$

84. [정답] ②

해설

모비율 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\left[\hat{p} - 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

이때, $n = 400$, $\hat{p} = 0.64$, $\hat{q} = 0.36$ 이므로

$$\begin{aligned}\left|\hat{p} - p\right| &\leq 2.58\sqrt{\frac{0.64 \times 0.36}{400}}\\ &= 2.58 \times \frac{0.8 \times 0.6}{20}\\ &= 0.06192\end{aligned}$$

따라서 $\left|\hat{p} - p\right|$의 최댓값은 0.06192 이다.

85. [정답] ④

주머니에서 임의로 한 장의 카드를 뽑은 다음 나머지 5장의 카드 중에서 다시 한 장의 카드를 임의로 꺼냈을 때, $\mathrm{P}(X=x) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$ $(x = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6)$이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\mathrm{E}(3X-a) = 3\mathrm{E}(X) - a = \frac{21}{2} - a$$

이때 $\mathrm{E}(3X-a) = \mathrm{E}(X)$이므로 $\frac{21}{2} - a = \frac{7}{2}$

$\therefore a = 7$

86. [정답] 35

세 개의 동전을 동시에 던질 때, 세 개 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{8}$이다.

따라서 k번째 시행에서 처음으로 세 개 모두 앞면이 나올 확률은

$\mathrm{P}(X=k)=\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1}\cdot\ \frac{1}{8}\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\mathrm{P}(X\le\ n)$

$$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\ \cdots\ +\mathrm{P}(X$$

$$=\frac{1}{8}\left\{1+\frac{7}{8}+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\ \cdots\ +\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{1-\left(\frac{7}{8}\right)^n}{1-\frac{7}{8}}$$

$$=1-\left(\frac{7}{8}\right)^n$$

$1-\left(\frac{7}{8}\right)^n\ \ge\ 0.99,\ \left(\frac{7}{8}\right)^n\ \le\ \frac{1}{100}$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log\frac{7}{8}\le -2$

$$\therefore\ \ n\ge\ \frac{2}{\log 8-\log 7}=\frac{2}{0.9030-0.8450}=\frac{2}{0.058}$$
$$=34.\times\times\times$$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 35이다.

87. [정답] ⑤

제품이 불량품일 확률이 $\frac{1}{10}$, 상자가 불량품일 확률이 $\frac{1}{9}$이므로 2개의 제품과 상자가 모두 합격품일 확률은

$\left(1-\frac{1}{10}\right)^2\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{18}{25}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5000,\ \frac{18}{25}\right)$을 따른다.

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=5000\times\frac{18}{25}\times\frac{7}{25}=144\times 7$

이므로 $\sigma(X)=12\sqrt{7}$

88. [정답] ⑤

흰 공 4개가 모두 나올 때가지 꺼낸 공의 개수가 X이므로 X번째에 마지막 흰 공이 나와야 한다.
이때 확률변수 $X=4,\ 5,\ \cdots,\ 11,\ 12$이고, 확률 $\mathrm{P}(X=k)$는 다음과 같다.

(ⅰ) $k=4$일 때 : 4번 모두 흰 공을 꺼내야 한다.

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{495}$$

(ⅱ) $k=5$일 때 : 4번째까지 흰 공 3개와 검은 공 1개를 꺼내야 한다.

$$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_1\times\left(\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\right)\times\frac{1}{8}=\frac{1}{495}\times_4$$

(ⅲ) $k=6$일 때 : 5번째까지 흰 공 3개와 검은 공 2개를 꺼내야 한다.

$$\mathrm{P}(X=6)={}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\right)\times\frac{1}{7}=\frac{1}{49}$$

$\therefore\ \ \mathrm{P}(X\ge\ 7)=1-\mathrm{P}(4\le\ X\le\ 6)$

$$=1-\frac{1}{495}\times(1+{}_4\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2)$$

$$=1-\frac{1}{495}\times(1+4+10)$$

$$=1-\frac{1}{33}$$

$$=\frac{32}{33}$$

89. [정답] ①

$\mathrm{P}(X\ge\ 70)=\mathrm{P}\left(Z\ge\ \frac{70-54.8}{10}\right)$

$$=\mathrm{P}(Z\ge\ 1.52)=0.5-\mathrm{P}(0\le\ Z\le\ 1.52)$$
$$=0.5-0.436=0.064$$

따라서 올해 신입생 중 수학성적이 70점 이상인 학생은 $500\times 0.064=32$(명)이므로 작년 신입생 중 수학 성적이 70점 이상인 학생은 48명이다.

따라서 $\mathrm{P}(Y\ge\ 70)=\frac{48}{500}=0.096$이므로

$\mathrm{P}(Y\ge\ 70)=\mathrm{P}\left(Z\ge\ \frac{70-m}{10}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le\ Z\le\ \frac{70-m}{10}\right)$

$$=0.096$$

$\mathrm{P}\left(0\le\ Z\le\ \frac{70-m}{10}\right)=0.404$이므로

$\frac{70-m}{10}=1.31$

$\therefore m=56.9$

90. [정답] ⑤

180번의 독립시행에서 100점을 얻는 횟수를 확률변수 X, 20점을 잃는 횟수를 확률변수 Y라 하자.
이때 점수를 1200점 이상 얻으려면

$\begin{cases}X+Y=180\\100X-20Y\ge\ 1200\end{cases}$

$Y=180-X$이므로

$100X-20(180-X)\ge\ 1200$에서

$120X\ge\ 4800\qquad\therefore X\ge\ 40$

한편 주사위와 동전을 동시에 던지는 시행을 1번 했을 때, 주사위가 5이상의 눈이 나오고 동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

이때 $\mathrm{E}(X)=180\times\frac{1}{6}=30,\ \mathrm{V}(X)=180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=5^2$이고,

$n=180$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq 40)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{40-30}{5}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

91. [정답] ⑤

5번의 슛 중에서 2번 이상 성공할 사건을 A, 3번 이하 성공할 사건을 B라 하면 $A\cup B$는 전체 사건이므로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{6},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cup B)=1$$

또한, 연속으로 던진 5번의 슛 중에서 2번 또는 3번 성공할 사건은 $A\cap B$이므로 다음을 얻는다.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-1=\frac{1}{2}$$

64회의 연습 가운데 연속으로 던진 5번의 슛 중에서 2번 또는 3번 성공하는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$m=64\times\frac{1}{2}=32,\ \sigma^2=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=4^2$$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 4^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\geq n)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{n-32}{4}\right)\leq 0.0228$$

즉, $\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{n-32}{4}\right)\geq 0.4772$

그런데 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로 $\frac{n-32}{4}\geq 2$

$n\geq 40$에서 n의 최솟값은 40이다.

92. [정답] ⑤

ㄱ. 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+b=1$$
$$\therefore a+b=\frac{1}{2}\text{(참)}$$

ㄴ. $\mathrm{E}(X)=0\times a+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}+3\times b$

$$=3b+\frac{2}{3}$$

$0\leq b\leq \frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{E}(X)$의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.(참)

ㄷ. $\mathrm{V}(X)$

$$=0^2\times a+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times b-\left(3b+\frac{2}{3}\right)^2$$
$$=-9b^2+5b+\frac{5}{9}$$
$$=-9\left(b-\frac{5}{18}\right)^2+\frac{5}{4}$$

이므로 $b=\frac{5}{18}$일 때, $\mathrm{V}(X)$가 최댓값을 갖는다.

$a+b=\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{1}{2}-\frac{5}{18}=\frac{2}{9}$일 때, $\mathrm{V}(X)$는 최댓값을 갖는다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

93. [정답] 854

공이 구역 k에 떨어질 때 얻는 점수는 k가 10이하일 때에는 k이고, k가 11 이상이면 0이므로 $\mathrm{E}(R_n)$을 최대로 하는 n은 8, 9, 10 중 하나이다.

(ⅰ) $n=8$ 이면 공은 6, 7, 8, 9, 10구역 중 한 곳에 떨어지므로

$\mathrm{P}(R_8=6)=\mathrm{P}(R_8=10)=0.05$,
$\mathrm{P}(R_8=7)=\mathrm{P}(R_8=9)=0.2$,
$\mathrm{P}(R_8=8)=0.5$이고
$\mathrm{E}(R_8)$
$=6\times0.05+7\times0.2+8\times0.5+9\times0.2+10\times0.05$
$=8$

(ⅱ) $n=9$이면 공은 $7, 8, 9, 10, 11$구역 중 한 곳에 떨어지므로

$\mathrm{P}(R_9=7)=\mathrm{P}(R_9=0)=0.05$,
$\mathrm{P}(R_9=8)=\mathrm{P}(R_9=10)=0.2$,
$\mathrm{P}(R_9=9)=0.5$이고
$\mathrm{E}(R_9)$
$7\times0.05+8\times0.2+9\times0.5+10\times0.2+0\times0.05$
$=8.45$

(ⅲ) $n=10$이면 공은 8, 9, 10, 11, 12구역 중 한 곳에 떨어지므로

$\mathrm{P}(R_{10}=8)=0.05, \mathrm{P}(R_{10}=9)=0.2$,
$\mathrm{P}(R_{10}=10)=0.5, \mathrm{P}(R_{10}=0)=0.25$이고
$\mathrm{E}(R_{10})=8\times0.05+9\times0.2+10\times0.5+0\times0.25$
$=7.2$

(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)에서 $\mathrm{E}(R_n)$은 $n=9$일 때 최댓값 8.45를 갖는다.

따라서 $\alpha=9$, $\beta=8.45$이므로

$\alpha+100\beta=9+845=854$

94. [정답] 31

검은 공의 개수를 x라 하면 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{24}$에서

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{{}_x\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{x(x-1)}{288}=\frac{1}{24}$$

$x(x-1)=12$

$\therefore\ x=4$

따라서 주머니 안에는 흰 공 5개와 검은 공 4개가 들어 있고, 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 $0, 1, 2$이다.

$X=1$일 경우는 동전 2개 중 앞면이 한 개 나오고 검은 공을 1개 꺼내는 경우와 동전 2개 모두 앞면이 나오고 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나오는 경우이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_{1\times 4}\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{13}{36}$$

또한 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{24}$이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=1-\mathrm{P}(X=1)-\mathrm{P}(X=2)$$
$$=1-\frac{13}{36}-\frac{1}{24}=\frac{43}{72}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{43}{72}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{24}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{43}{72}+1\times\frac{13}{36}+2\times\frac{1}{24}=\frac{4}{9}$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(36X+15)=36\mathrm{E}(X)+15$$
$$=36\times\frac{4}{9}+15=31$$

95. [정답] 504

영희와 희정이가 만든 인형이 모두 불량이 아닐 확률은

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{9}{10}\times\frac{4}{5}=\frac{18}{25}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2500,\ \frac{18}{25}\right)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{V}(X)=2500\times\frac{18}{25}\times\frac{7}{25}$$
$$=504$$

96. [정답] ⑤

ㄱ. $\mathrm{P}(-a\leq X\leq 3a)=1$이므로 $\frac{1}{2}\times 4a\times b=1$

$\therefore\ ab=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $b=\frac{1}{2a}$이므로 확률밀도함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a^2}x+\frac{1}{2a} & (-a\leq x\leq 0)\\ -\frac{1}{6a^2}x+\frac{1}{2a} & (0\leq x\leq 3a)\end{cases}$$

이고, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$

$$=\int_{-a}^{3a}xf(x)dx$$
$$=\int_{-a}^{0}\left(\frac{1}{2a^2}x^2+\frac{1}{2a}x\right)dx+\int_{0}^{3a}\left(-\frac{1}{6a^2}x^2+\frac{1}{2a}x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6a^2}x^3+\frac{1}{4a}x^2\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{1}{18a^2}x^3+\frac{1}{4a}x^2\right]_{0}^{3a}$$
$$=-\left(-\frac{a}{6}+\frac{a}{4}\right)+\left(-\frac{3}{2}a+\frac{9}{4}a\right)=\frac{2}{3}a$$

이고, $a>0$이므로 $\mathrm{E}(X)<a$이다. (참)

ㄷ. X의 분산 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=\int_{-a}^{3a}x^2f(x)dx-\left(\frac{2}{3}a\right)^2$$
$$=\int_{-a}^{0}\left(\frac{1}{2a^2}x^3+\frac{1}{2a}x^3\right)dx+\int_{0}^{3a}\left(-\frac{1}{6a^2}x^3+\frac{1}{2a}x^2\right)dx-\cdot$$
$$=\left[\frac{1}{8a^2}x^4+\frac{1}{6a}x^3\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{1}{24a^2}x^4+\frac{1}{6a}x^3\right]_{0}^{3a}-\frac{4}{9}a^2$$
$$=-\left(\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{6}\right)+\left(-\frac{27}{8}a^2+\frac{9}{2}a^2\right)-\frac{4}{9}a^2$$
$$=\frac{13}{18}a^2$$

이므로 $\mathrm{V}(X)<\frac{4}{3}a^2$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

97. [정답] 7

$P(0\le X\le 1)=1$이므로

$$\int_0^1 at^n(1-t)dt=a\int_0^1(t^n-t^{n+1})dt$$

$$=a\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=a\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{a}{(n+1)(n+2)}=1$$

$\therefore a=(n+1)(n+2)$ …… ㉠

X의 확률밀도함수를 $f(X)$라 하면

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x at^n(1-t)dt$$

이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=ax^n(1-x)$ …… ㉡

$E(X)=\frac{4}{5}$에서

$$E(X)=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 at^{n+1}(1-t)dt\ (\because ㉡)$$

$$=a\int_0^1(t^{n+1}-t^{n+2})dt$$

$$=a\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}-\frac{t^{n+3}}{n+3}\right]_0^1$$

$$=a\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{a}{(n+2)(n+3)}=\frac{4}{5}$$

$\therefore a=\frac{4}{5}(n+2)(n+3)$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하면

$$(n+1)(n+2)=\frac{4}{5}(n+2)(n+3)$$

$5(n+1)=4(n+3)\quad \therefore n=7$

98. [정답] ①

$f(x)$를 표준정규분포의 확률밀도함수라 하면

$g(t)=\int_0^t f(x)dx$ (단, $t>0$)

ㄱ. $\lim_{t\to+0}g(t)=0$이다. (참)

ㄴ. $g'(t)=f(t)$이므로 $\lim_{t\to+0}g'(t)=\lim_{t\to+0}f(t)>0$ (거짓)

ㄷ. 모든 양수 t에 대하여 $g'(t)$는 감소함수이므로 $g''(t)\le 0$

따라서 $g(t)$의 그래프는 위로 볼록하므로 $g(t)$의 그래프는 변곡점을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

99. [정답] ⑤

ㄱ. 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$이므로

$$f(n)=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

또 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\left[\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$이므로

$$g(n)=2\times2.58\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$\therefore\ f(n)\le g(n)$ (참)

ㄴ. $f(100)=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}$

$$=\frac{2\times1.96}{10}\sqrt{-\left(\hat{p}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

이므로 $f(100)$의 최댓값은 $\hat{p}=\frac{1}{2}$일 때

$\frac{2\times1.96}{10}\times\sqrt{\frac{1}{4}}=0.196$ (참)

ㄷ. $g(n)=2\times2.58\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$$=2\times2.58\times\sqrt{\frac{-\left(\hat{p}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}{n}}$$

에서 $g(n)$의 최댓ㄱ밧 M은 $\hat{p}=\frac{1}{2}$일 때

$$M=2\times2.58\times\sqrt{\frac{1}{4n}}$$

$$=\frac{2.58}{\sqrt{n}}$$

이때 $g(4n)$의 최댓값은

$$\frac{2.58}{\sqrt{4n}}=\frac{1}{2}\times\frac{2.58}{\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{2}M\ (참)$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

100. [정답] 300

모비율에 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\left[\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

이고, 이 구간이 $[0.6855,\ 0.8145]$와 같으므로

$$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.6855 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.8145 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$2\hat{p}=1.5$

$\therefore\ \hat{p}=0.75$

이를 ㉠에 대입하면

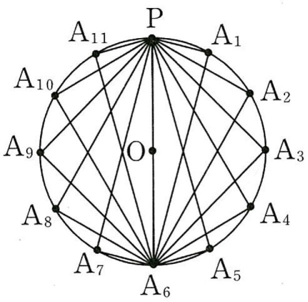
$$0.75-2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}=0.6855$$

$\therefore\ n=300$

101. 정답 ④

주어진 12개의 점 중에서 점 P를 포함한 서로 다른 3개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는 ${}_{11}\mathrm{C}_2=\dfrac{11\times10}{2\times1}=55$

(i) 점 O는 삼각형 T의 변 위에 있는 경우
삼각형의 세 변 중 한 변이 원의 중심을 지나므로 직각삼각형이 된다.



위의 그림과 같이 선분 PA_6을 빗변으로 하는 직각삼각형과 선분$\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+6}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$을 빗변으로 하는 직각삼각형의 개수는 $5\times2+5=15$

(ii) 점 O가 삼각형 T의 변 위에 있지 않고 내부에 있는 경우
점 P와 다음 두 점
$(\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_7)$
$(\mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_7)$, $(\mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_8)$
$(\mathrm{A}_4,\ \mathrm{A}_7)$, $(\mathrm{A}_4,\ \mathrm{A}_8)$, $(\mathrm{A}_4,\ \mathrm{A}_9)$
$(\mathrm{A}_5,\ \mathrm{A}_7)$, $(\mathrm{A}_5,\ \mathrm{A}_8)$, $(\mathrm{A}_5,\ \mathrm{A}_9)$, $(\mathrm{A}_5,\ \mathrm{A}_{10})$
을 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 이들의 개수는 10이다.

(iii) 점 O가 삼각형 T의 변 위에 있지 않고 외부에 있는 경우
구하는 삼각형의 개수는 (i), (ii)에서
$55-15-10=30$

따라서 (i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{30}{55}=\dfrac{6}{11}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{15}{55}=\dfrac{3}{11}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{10}{55}=\dfrac{2}{11}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{6}{11}+1\times\dfrac{3}{11}+2\times\dfrac{2}{11}=\dfrac{7}{11}$

[참고]

(iii) 점 O가 삼각형 T의 변 위에 있지 않고 외부에 있는 경우
점 P와 다음 두 점
$(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2)$, $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_3)$, $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_4)$, $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_5)$
$(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_8)$, $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_9)$, $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_{10})$, $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_{11})$
$(\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3)$, $(\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_4)$, $(\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_5)$, $(\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_9)$
$(\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_{10})$, $(\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_{11})$
$(\mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_4)$, $(\mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_5)$, $(\mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_{10})$, $(\mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_{11})$
$(\mathrm{A}_4,\ \mathrm{A}_5)$, $(\mathrm{A}_4,\ \mathrm{A}_{11})$
$(\mathrm{A}_7,\ \mathrm{A}_8)$, $(\mathrm{A}_7,\ \mathrm{A}_9)$, $(\mathrm{A}_7,\ \mathrm{A}_{10})$, $(\mathrm{A}_7,\ \mathrm{A}_{11})$
$(\mathrm{A}_8,\ \mathrm{A}_9)$, $(\mathrm{A}_8,\ \mathrm{A}_{10})$, $(\mathrm{A}_8,\ \mathrm{A}_{11})$
$(\mathrm{A}_9,\ \mathrm{A}_{10})$, $(\mathrm{A}_9,\ \mathrm{A}_{11})$
$(\mathrm{A}_{10},\ \mathrm{A}_{11})$
을 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 이들의 개수는 30이다.

102. 정답 31

A가 B에게 지는 경우 $X=0$

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{2}$

A, B, C중 C가 가진 카드에 적힌 수가 가장 크고, B가 가진 카드에 적힌 수가 가장 작은 경우 $X=1$

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

A, B, C, D중 D가 가진 카드에 적힌 수가 가장 크고, A가 가진 카드에 적힌 수가 다음으로 큰 경우 $X=2$

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

A, B, C, D중 A가 가진 카드에 적힌 수가 가장 큰 경우 $X=3$

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{12}+3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}$

$\therefore\ \mathrm{E}(24X+5)=24\mathrm{E}(X)+5=24\times\dfrac{13}{12}+5=31$

[참고]

A, B, C, D가 각각 가진 카드에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 하자.

(i) $X=0$인 경우는 $a<b$이어야 하고 c, d는 서로 바꿀 수 있으므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times 2!}{4!}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

(ii) $X=1$인 경우는 $b<a<c$이어야 하고 D는 나머지 한 장의 카드를 가져가게 되므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times 1}{4!}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

(iii) $X=2$인 경우는 $b<a<d$이고 $c<a<d$이어야 하므로 반드시 $d=4$, $a=3$이다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{2!}{4!}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

(iv) $X=3$인 경우는 $a=4$이어야 하므로 b, c, d만 정해주면 된다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{3!}{4!}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

103. 정답 35

$\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=11$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=np=5$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=29-25=4$

즉, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $n=25$, $p=\dfrac{1}{5}$

따라서 $\mathrm{P}(X=2)={}_{25}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\left(\dfrac{4}{5}\right)^{23}$,

$\mathrm{P}(X=3)={}_{25}\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\left(\dfrac{4}{5}\right)^{22}$ 이므로

$$\frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=3)}=\frac{{}_{25}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{23}}{{}_{25}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^{22}}=\frac{\frac{25\times24}{2\times1}\times\frac{4}{5}}{\frac{25\times24\times23}{3\times2\times1}\times\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{12}{23}$$

따라서 $a=23$, $b=12$이므로 $a+b=35$

104. 정답 ①

$0\le x\le 2$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면

$$F(t)=\mathrm{P}(0\le X\le t)=\int_0^t f(x)\,dx$$

$F(2)=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=1$이므로

$F(2)=4a+2=1$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ F(t)=-\dfrac{1}{4}t^2+t$

$F(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$F'(t)=f(t)$

$F(t)=-\dfrac{1}{4}t^2+t$ 이므로

$f(x)=F'(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\int_0^2 xf(x)\,dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=-\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3}$$

105. 정답 ④

ㄱ. 연속확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$F(2)=\mathrm{P}(m-2\le X\le m+2)=2\mathrm{P}(m\le X\le m+2)$

$=2\{0.5-\mathrm{P}(X\ge m+2)\}=1-2G(2)$ (참)

ㄴ. [반례] $x=0$일 때

$F(0)=\mathrm{P}(m\le X\le m)=0$

$G(0)=\mathrm{P}(X\ge m)=0.5$이므로 $F(0)<G(0)$ (거짓)

ㄷ. $\mathrm{P}(m-a\le X\le m+b)$

$=\mathrm{P}(m-a\le X\le m+a)+\mathrm{P}(m+a\le X\le m+b)$

$=\mathrm{P}(m-a\le X\le m+a)+\mathrm{P}(m\le X\le m+b)$

$-\mathrm{P}(m\le X\le m+a)$

$=F(a)+\dfrac{1}{2}F(b)-\dfrac{1}{2}F(a)$

$=\dfrac{1}{2}\{F(a)+F(b)\}$ ⋯⋯ ㉠

한편 임의의 음이 아닌 실수 x에 대하여

$F(x)=\mathrm{P}(m-x\le X\le m+x)$

$=1-2\mathrm{P}(X\ge m+x)$

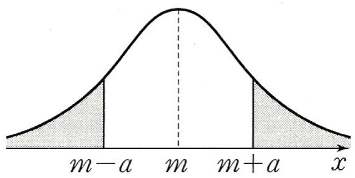
$=1-2G(x)$

이므로 ㉠에서

$\dfrac{1}{2}\{F(a)+F(b)\}=\dfrac{1}{2}\{1-2G(a)+1-2G(b)\}$

$=1-G(a)-G(b)$

(참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
[참고]



연속확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, X의 확률밀도함수의 그래프인 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로
$G(a)=\mathrm{P}(X\le m+a)=\mathrm{P}(X\le m-a)$
$\therefore\ \mathrm{P}(m-a\le X\le m+b)$
$=1-\mathrm{P}(X\le m-a)-\mathrm{P}(X\ge m+b)$
$=1-G(a)-G(b)$

106. 정답 56

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{2}=200$

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=100$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따르며 확률변수 $Z=\frac{X-200}{10}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le 230)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{230-200}{10}\right)=\mathrm{P}(Z\le 3)$

$\cdots\cdots$ ㉠

또한 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=400\times\frac{1}{5}=80$

$\mathrm{V}(Y)=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=64$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따르며 확률변수 $Z=\frac{Y-80}{8}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(Y\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-80}{8}\right)$

$\cdots\cdots$ ㉡

$\mathrm{P}(X\le 230)=\mathrm{P}(Y\ge a)$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$\mathrm{P}(Z\le 3)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-80}{8}\right)$이고

$\mathrm{P}(Z\le 3)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.5+\mathrm{P}(-3\le Z\le 0)$
$=\mathrm{P}(Z\ge -3)$

이므로

$\frac{a-80}{8}=-3$

$\therefore\ a=56$

107. 정답 ①

확률밀도함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$\int_{200-x}^{m} f(t)dt=\int_{m}^{100+x} f(t)dt$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선

$x=\frac{200-x+100+x}{2}=150$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ m=150$

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(150,\ \frac{\sigma^2}{36}\right)$을 따르며 확률변수

$Z=\frac{\overline{X}-150}{\frac{\sigma}{6}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m\le \overline{X}\le m+2)=\mathrm{P}(150\le \overline{X}\le 152)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{152-150}{\frac{\sigma}{6}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{12}{\sigma}\right)=0.3413$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{12}{\sigma}=1\quad \therefore\ \sigma=12$

$\therefore\ \mathrm{P}(144\le \overline{X}\le 162)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{144-150}{12}\le Z\le \frac{162-150}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.1915+0.3413=0.5328$

108. 정답 62

모평균이 m, 모분산이 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{4}{n}\right)$를 따르고 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le \frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(|Z|\le \frac{\sqrt{n}}{4}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{4}\right)\ge 0.95$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{4}\right)\ge 0.475$

주어진 표준정규분포에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.964)=0.475$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{4}\ge 1.96$

$\sqrt{n}\ge 7.84\qquad \therefore\ n\ge 61.4656$

따라서 자연수 n의 최솟값은 62이다.

109. **정답** 7

임의로 선택한 36명의 한 달 동안 스포츠 센터 이용 시간의 평균 $\bar{x}$는

$$\bar{x}=\frac{12\times36+24\times30}{36}=32$$

이므로 신뢰도 95%로 모평균 m을 추정하면 신뢰구간은

$$\left[32-1.96\times\frac{12}{\sqrt{36}},\ 32+1.96\times\frac{12}{\sqrt{36}}\right]$$

즉, $[28.08,\ 35.92]$

따라서 이 신뢰구간에 속하는 정수는

29, 30, 31, 32, 33, 34, 35의 7개다.

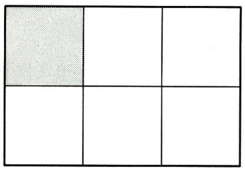
110. **정답** 30

그림의 선분으로 만들 수 있는 모든 직사각형의 개수는

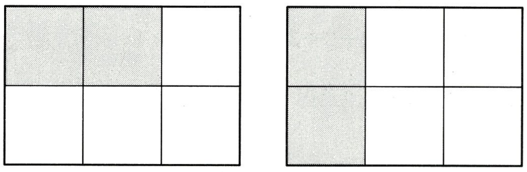
$$\begin{aligned}{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2&=3\times\frac{4\times3}{2\times1}\\&=3\times6\\&=18\end{aligned}$$

이다.

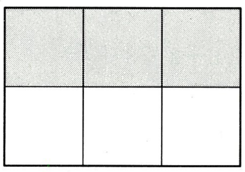
(ⅰ) 그림과 같이 넓이가 1인 직사각형의 개수는 6이다.



(ⅱ) 그림과 같이 넓이가 2인 직사각형의 개수는 $4+3=7$이다.

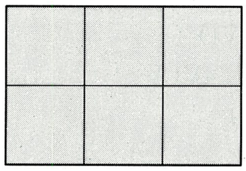


(ⅲ) 그림과 같이 넓이가 3인 직사각형의 개수는 2이다.



(ⅳ) 그림과 같이 넓이가 4인 직사각형의 개수는 2이다.

(ⅴ) 그림과 같이 넓이가 6인 직사각형의 개수는 1이다.



(ⅰ)~(ⅴ)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	6
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(X)&=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{7}{18}+3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{9}+6\times\frac{1}{18}\\&=\frac{20}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(18X-10)&=18\mathrm{E}(X)-10\\&=18\times\frac{20}{9}-10\\&=30\end{aligned}$$

111. **정답** ④

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(X)&=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{4}(1+2+3+4)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{4\times5}{2}\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{4}(1^2+2^2+3^2+4^2)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{4\times5\times9}{6}\\&=\frac{15}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{15}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2\\&=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

한편 $Y=2X-1$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{V}(2X-1)\\&=4\mathrm{V}(X)\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(X)+4\mathrm{V}(X)$

$= 5\mathrm{V}(X)$

$= 5 \times \frac{5}{4}$

$= \frac{25}{4}$

{다른 풀이}

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{E}(X) = 1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}(1+2+3+4)$

$= \frac{1}{4}\times\frac{4\times5}{2}$

$= \frac{5}{2}$

$\mathrm{E}(X^2) = 1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}(1^2+2^2+3^2+4^2)$

$= \frac{1}{4}\times\frac{4\times5\times9}{6}$

$= \frac{15}{2}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$

$= \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$= \frac{5}{4}$

또한 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	3	5	7
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y) = 1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}(1+3+5+7)$

$= \frac{1}{4}\times16$

$= 4$

$\mathrm{E}(Y^2) = 1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+5^2\times\frac{1}{4}+7^2\times\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}(1^2+3^2+5^2+7^2)$

$= \frac{1}{4}(1+9+25+49)$

$= \frac{1}{4}\times84$

$= 21$

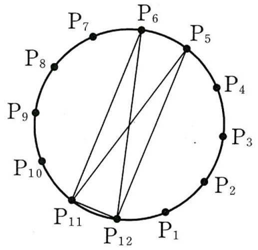
$\therefore\ \mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \{\mathrm{E}(Y)\}^2$

$= 21 - 4^2$

$= 5$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y) = \frac{5}{4}+5 = \frac{25}{4}$

112. 정답 ③



그림과 같이 두 꼭짓점이 P_{11}, P_{12}인 삼각형 $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_{12}$중에서 직각삼각형인 것은 삼각형 $\mathrm{P}_5\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_{12}$, 삼각형$\mathrm{P}_6\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_{12}$뿐이므로 임의로 택한 점 $\mathrm{P}_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$에 대하여 삼각형$\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_{12}$가 작각삼각형일 확률은

$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

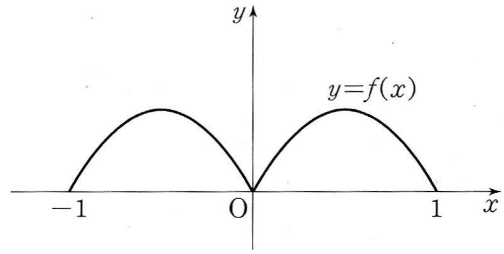
따라서 $\mathrm{V}(X) = 100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5} = 16$이므로

$\mathrm{V}(2X+4) = 4\mathrm{V}(X)$

$= 4\times16 = 64$

113. 정답 ③

함수$y=f(x)$의 그래프는 개형은 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} kx(1-x)\,dx$

$= 2k\int_{0}^{1}(x-x^2)dx = 2k\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$= 2k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 2k\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3}k$

$\frac{1}{3}k = 1$에서 $k=3$

$\therefore\ f(x) = \begin{cases} -3x(1+x) & (-1 \le x < 0) \\ 3x(1-x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

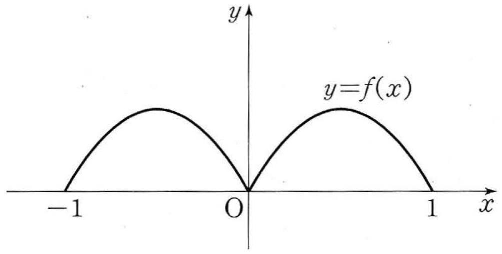
$\mathrm{E}(X) = \int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = 0$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)$

$$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)=\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx=2\int_{0}^{1} x^2 f(x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1} x^2\{3x(1-x)\}dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(3x^3-3x^4)\,dx$$
$$=2\left[\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{5}x^5\right]_0^1=2\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\right)$$
$$=2\times\frac{3}{2}=\frac{3}{10}$$

[다른 풀이]

함수$y=f(x)$의 그래프는 개형은 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2\int_{0}^{1} f(x)\,dx=2\int_{0}^{1} kx(1-x)\,dx$$
$$=2k\int_{0}^{1}(x-x^2)dx=2k\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=2k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}k$$

$\frac{1}{3}k=1$에서 $k=3$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

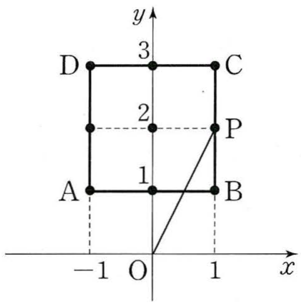
$$\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx=0$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)$

$g(x)=3x(1-x)(0\leq x\leq 1)$로 놓으면

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)=\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} x^2 f(x)\,dx$$
$$+\int_{0}^{1} x^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0} x^2 g(x+1)\,dx+\int_{0}^{1} x^2 g(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x-1)^2 g(x)\,dx+\int_{0}^{1} x^2 g(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}(2x^2-2x+1)\,g(x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1} x^2 g(x)\,dx-2\int_{0}^{1} x\,g(x)\,dx+$$
$$\int_{0}^{1} g(x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(3x^3-3x^4)\,dx-$$
$$2\int_{0}^{1}(3x^2-3x^3)dx+\frac{1}{2}$$
$$=2\left[\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{5}x^5\right]_0^1-2\left[x^3-\frac{3}{4}x^4\right]_0^1+\frac{1}{2}$$
$$=2\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\right)-2\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}$$
$$=2\times\frac{3}{20}-2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{10}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

114. 정답 ①



사각형 ABCD의 경계와 내부의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 9이고, $\overline{\mathrm{OP}}\geq 2$를 만족시키는 점의 개수는 6이므로 임의로 택한 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}\geq 2$를 만족시킬 확률은 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$이다

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

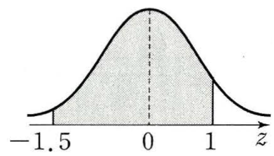
$$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{2}{3}=300,$$

$$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100=10^2$$

이고, 450이 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-300}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(285\leq X\leq 310)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{285-300}{10}\leq\frac{X-300}{10}\leq\frac{310-300}{10}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 1)$$



$\therefore\ \mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 1)$

$=\mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$=0.4332+0.3413=0.7745$

115. 정답 ⑤

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X})=m$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 모두
직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.
$\therefore\ a=b$ (참)

ㄴ. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$이라
하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(m \le X \le k)=\mathrm{P}\left(\dfrac{m-m}{\sigma} \le \dfrac{X-m}{\sigma} \le \dfrac{k-m}{\sigma}\right)$
$=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{k-m}{\sigma}\right)$

또한 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로
$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을
따른다.

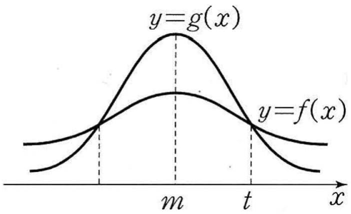
$\therefore\ \mathrm{P}(m \le \overline{X} \le k)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{m-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \dfrac{k-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$
$=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{k-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

$n \ge 2$이므로 $\dfrac{k-m}{\sigma}<\dfrac{k-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{k-m}{\sigma}\right)<\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{k-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

즉, $\mathrm{P}(m \le X \le k)<\mathrm{P}(m \le \overline{X} \le k)$ (참)

ㄷ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X \ge t)>\mathrm{P}(\overline{X} \ge t)$이므로

$\dfrac{1}{2}=\mathrm{P}(m \le X \le t)+\mathrm{P}(X \ge t)$
$>\mathrm{P}(m \le X \le t)+\mathrm{P}(\overline{X} \ge t)$

에서 $\mathrm{P}(m \le X \le t)+\mathrm{P}(\overline{X} \ge t)<\dfrac{1}{2}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

116. 정답 ①

A 팀이 얻은 표본비율을 $\hat{p_1}$이라 하면 $\hat{p_1}=\dfrac{3}{5}$이므로 A 팀이 얻은
이 고등학교 전체 학생 중 기호 1번 후보를 지지하는 학생의 비율에
대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[\frac{3}{5}-1.96\times\frac{\sqrt{\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}}}{\sqrt{n+30}},\ \frac{3}{5}+1.96\times\frac{\sqrt{\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}}}{\sqrt{n+30}}\right]$$

$$\therefore\ b-a=2\times1.96\times\frac{\sqrt{\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}}}{\sqrt{n+30}}=2\times1.96\times\frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{n+30}}$$

한편 B 팀이 얻은 표본비율을 $\hat{p_2}$이라 하면 $\hat{p_2}=\dfrac{4}{5}$이므로 B 팀이 얻은
이 고등학교 전체 학생 중 기호 1번 후보를 지지하는 학생의 비율에
대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[\frac{4}{5}-1.96\times\frac{\sqrt{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}}{\sqrt{n}},\ \frac{4}{5}+1.96\times\frac{\sqrt{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\therefore\ d-c=2\times1.96\times\frac{\sqrt{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}}{\sqrt{n}}=2\times1.96\times\frac{2}{5\sqrt{n}}$$

$b-a=d-c$에서

$2\times1.96\times\dfrac{\sqrt{6}}{5\sqrt{n+30}}=2\times1.96\times\dfrac{2}{5\sqrt{n}}$

$\sqrt{6}\sqrt{n}=2\sqrt{n+30}$ 양변을 제곱하면

$6n=4n+120$ $\quad\therefore\ n=60$