

수학 영역

[나형]

성명	
----	--

수험 번호					-				
-------	--	--	--	--	---	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형 (가형 / 나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

당신은 죄악이 등을 타고 오르는 것을 느꼈다

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음에 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

수학 영역(나형)

1. $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $2^{\frac{1}{2}}$ ③ $2^{\frac{3}{2}}$
④ $2^{-\frac{1}{2}}$ ⑤ $2^{-\frac{3}{2}}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

3. 집합 $A = \{3, 5, 7\}$ 에 대하여 집합

$$B = \left\{ \frac{a+b}{2} \mid a \in A, b \in A \right\}$$
의 모든 원소의 합은?

[2점]

- ① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

4. 1이 아닌 양수 a 에 대하여 $\log_a 3 = 8$ 일 때

$\log_{\sqrt{a}} 9$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

5. 빨간 티셔츠 2장, 노란 티셔츠 2장, 파란 티셔츠 2장을 6명의 사람에게 한 장씩 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색의 티셔츠는 서로 구분되지 않는다.) [3점]

- ① 60 ② 90 ③ 120
 ④ 150 ⑤ 180

6. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 3$, $a_2 = 9$ 일 때

$\frac{a_{12} - a_{11}}{a_{10} - a_9}$ 의 값은? [3점]

- ① 9 ② 10 ③ 11
 ④ 12 ⑤ 13

7. $2x^3\left(x + \frac{k}{x^2}\right)^4$ 의 전개식에서 x^4 의 계수가 -16일 때 상수 k 의 값은? [3점]

- ① -1 ② -2 ③ -3
 ④ -4 ⑤ -5

8. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x \neq 0, x \neq 3) \\ a & (x=0) \\ a^2 & (x=3) \end{cases}$$

이 오직 한 점에서만 불연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -3 ② -1 ③ 1
 ④ 3 ⑤ 5

9. 함수 $f(x) = x^3 + 4x + 7$ 에 대해

$f'(a-3) = f'(a-1)$ 를 만족하는 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

10. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{4n-2} = n^2 + 1$,

$a_{4n} = 2n + 1$ 일 때 $\sum_{n=1}^{16} a_{2n}$ 의 값은? [3점]

- ① 290 ② 292 ③ 294
 ④ 296 ⑤ 298

11. 자연수 k 와 두 명제 $p: |x| < 5$,
 $q: |x-2| \leq k$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한
 충분조건이 되도록 하는 k 의 최솟값을 m ,
 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 k 의
 최댓값을 M 이라고 할 때 $M+m$ 의 값은?
 [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

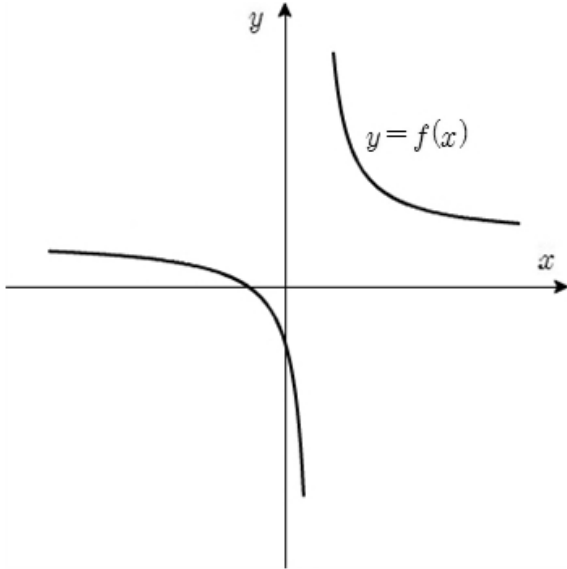
12. 다음을 만족하는 집합 A, B, C 의 순서쌍
 (A, B, C) 의 개수는? [3점]

- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- A, B, C 중 서로 다른 어느 두 집합도 공
 통원소를 갖지 않는다.
- A, B, C 중 어느 집합도 공집합이 아니다.

- ① 120 ② 130 ③ 140
 ④ 150 ⑤ 160

[13~14] 함수 $f(x) = \frac{3x+7}{x-2}$, ($x \neq 2$)의

그래프가 그림과 같다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 모든 양수 t 에 대하여

$f(a-t) + f(a+t) = b$ 를 만족하도록 하는 실수 a, b 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
- ④ 8 ⑤ 9

14. 이차함수 $g(x) = 2x^2 - 4px + 3p^2 - p + 1$ 의 그래프와 $y = f(x)$ 의 모든 점근선과의 서로 다른 교점의 개수가 2개일 때 상수 p 의 값은? [4점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
- ④ 1 ⑤ 2

15. 카르노 사이클은 1824년 카르노가 제안한 가장 이상적인 열기관 사이클이다. 사이클의 과정 중 등온방열 상태변화는 방열 전 기체의 부피 $V_1(\text{cm}^3)$, 방열 후 기체의 부피 $V_2(\text{cm}^3)$, 저열원의 온도 $T(\text{K})$ 에 대하여 방열량 $Q(\text{kJ})$ 가 다음 식을 만족한다.

$$Q = -kRT \log \frac{V_2}{V_1}$$

두 카르노 사이클 A, B 에 대하여 사이클 A 의 등온방열과정에서 방열 전 기체의 부피가 8cm^3 , 방열 후 기체의 부피가 5cm^3 , 저열원의 온도가 360K 일 때 발열량 Q_A 는 사이클 B 의 등온방열과정에서 방열 전 기체의 부피가 16cm^3 , 방열 후 기체의 부피가 1cm^3 , 저열원의 온도가 360K 일 때 발열량 Q_B 보다 60kJ 만큼 더 작다. 어떤 카르노 사이클의 등온방열과정에서 방열 전 기체의 부피가 70cm^3 , 방열 후 기체의 부피가 7cm^3 , 저열원의 온도가 300K 일 때 발열량을 $Q_0\text{kJ}$ 이라 하자. Q_0 의 값은?

(단, k 와 R 은 상수이다.) [4점]

- ① 30 ② 40 ③ 50
 ④ 60 ⑤ 70

16. 실수 전체집합 R 에서 R 로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} (a+3)x + a^2 + 6a & (x < 0) \\ (a^2 + 5a)x - 8 & (x \geq 0) \end{cases}$$

가 일대일대응일 때 상수 a 의 값은? [4점]

- ① -4 ② -2 ③ 0
 ④ 2 ⑤ 4

17. 이차함수 $y=f(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 고른 것은? [4점]

< 보기 >

- ㄱ. f 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.
- ㄴ. 함수 $y=|f(x)|$ 는 항상 홀수 개의 극값을 갖는다.
- ㄷ. 함수 $y=f(|x|)$ 는 항상 홀수 개의 극값을 갖는다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄴ, ㄷ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 다음은 모든 자연수 n 에 대해서

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 것이다.

(1) $n=1$ 일 때

(좌변) $= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

(우변) $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

에서 (*)가 성립한다.

(2) $n=k$ 일 때 (*)가 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$+ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}$$

이다. 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ 을

더한 후 정리하면

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$+ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left(\boxed{\text{가}} \right)$$

$$= \boxed{\text{나}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 (*)가 성립한다.

(1), (2)에 의하여

모든 자연수 n 에 대하여 (*)가 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각

$f(k), g(k)$ 라 할 때 $\frac{f(2)}{g(3)}$ 의 값은? [4점]

- ① 14
- ② 15
- ③ 16
- ④ 17
- ⑤ 18

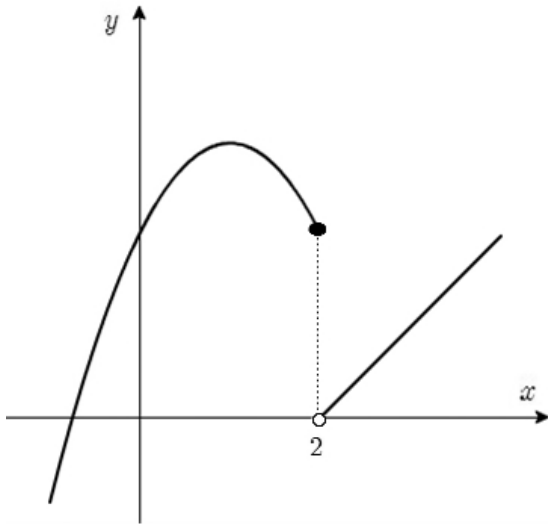
19. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 & (x \leq 2) \\ x - 2 & (x > 2) \end{cases}$$

에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(f(f(x)))$$

의 값은? [4점]

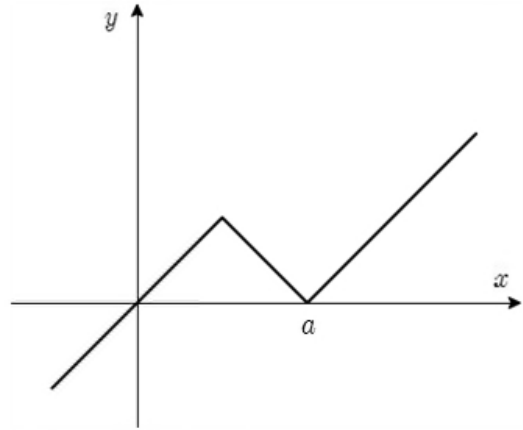


- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

20. 함수 $f(x) = |x-2| - |x-1| + x - 1$ 와 실수

a 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. <보기>에서 옳은 것만을 고른 것은?

[4점]



< 보기 >

- ㄱ. $a = 2$
- ㄴ. 함수 $y = \frac{\{f(x)\}^2}{|f(x)|}$ 가 미분 불가능한 점은 3개이다.
- ㄷ. 함수 $y = \{f(x)\}^2$ 가 미분 불가능한 점은 2개이다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{A_1D}=1$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D$ 에

내접하고 $\overline{C_1D}$ 를 지름으로 하는 반원의
넓이를 S_1 이라고 하자.

$\overline{C_1D}$ 위의 어떤 점 C_2 를 $\overline{C_2D}$ 를 지름으로
하고 직사각형 $A_1B_1C_1D$ 의 내부에 있는
반원의 호가 $\overline{A_1C_1}$ 에 접하도록 잡는다.

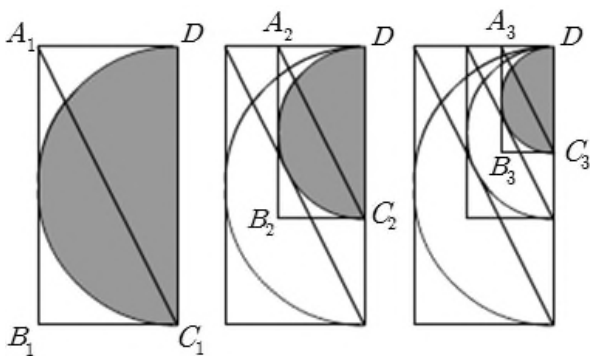
이렇게 만든 반원에 외접하는 가장 작은
직사각형을 $A_2B_2C_2D$ 라 하고 그 반원의
넓이를 S_2 라고 하자.

$\overline{C_2D}$ 위의 어떤 점 C_3 를 $\overline{C_3D}$ 를 지름으로
하고 직사각형 $A_2B_2C_2D$ 의 내부에 있는
반원의 호가 $\overline{A_2C_2}$ 에 접하도록 잡는다.

이렇게 만든 반원에 외접하는 가장 작은
직사각형을 $A_3B_3C_3D$ 라 하고 그 반원의
넓이를 S_3 라고 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 직사각형
 $A_nB_nC_nD$ 에 내접하는 가장 큰 반원의
넓이를 S_n ($n=1, 2, \dots$)이라고 할 때 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 는 수렴한다. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\pi(\sqrt{5}+1)}{2}$ ② $\frac{\pi(\sqrt{5}+2)}{2}$ ③ $\frac{\pi(\sqrt{5}+3)}{2}$
 ④ $\frac{\pi(\sqrt{5}+1)}{4}$ ⑤ $\frac{\pi(\sqrt{5}+2)}{4}$

※ 22번부터 30번까지는 주관식 문항입니다.

22. 함수 $f(x)=x+1$ 에 대하여

$(f \circ f^{-1} \circ f)(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 사건 A, B 에 대해 $P(A)=\frac{1}{3}$,

$P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$ 일 때

$P(A \cap B)=p$ 이다. $18p$ 의 값을 구하시오.

[3점]

24. 0, 1, 6, 8이 각각 하나씩 쓰여진 숫자카드 네 장이 있다. 6이 쓰여진 카드는 반 바퀴 회전하여 9가 쓰여진 것처럼 사용할 수 있다고 할 때 숫자카드 중 일부 또는 전부를 나열해서 만들 수 있는 자연수의 개수를 구하시오.
(단, 0으로 시작하는 경우는 제외한다) [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이
 $a_n = (n \text{의 약수의 개수}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(a_n)^2 + 3na_n + 4n^3}{n^3}$ 의 값을
 구하시오. [4점]

26. 실수 a 에 대하여 두 명제 p, q 의 식이 다음과 같다.

$$p : 3 < x < 6$$

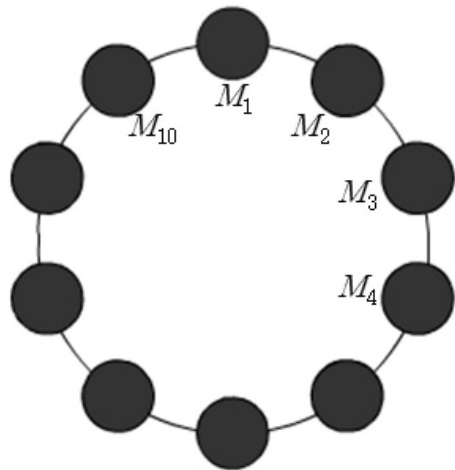
$$q : -a^2 + 4a < x < -4a + 18$$

- p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니도록 하는 a 의 최댓값을 구하시오. [4점]

27. 다음 조건을 만족 시키는 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오. [4점]

- a, b, c 는 각각 12, 80, 150의 약수이다.
- $\frac{abc}{300}$ 이 자연수이다.

28. 10명의 사람이 바닥에 그려진 원의 둘레를 10등분 하는 10개의 점 위에서 원의 중심을 바라보는 방향으로 서있다. 이 10명의 사람들은 어떤 신호에 따라 동시에 각각 임의로 몸을 왼쪽이나 오른쪽으로 돌려 양 옆 사람 중 임의로 한 명을 향해 서도록 한다. 그러면 각각의 사람은 몸을 돌린 후 앞사람과 마주보거나 마주보지 않거나 두 개의 가능성이 존재한다. 예를 들어 그림에서 M_1 이 M_2 가 있는 곳을 바라보기 위해 왼쪽으로 돌고, M_2 가 M_1 이 있는 곳을 바라보기 위해 오른쪽으로 돌다면, M_1, M_2 는 앞 사람과 마주본다. 어떤 신호가 주어진 후 앞 사람을 마주보고 있는 사람이 6명일 확률을 $\frac{p}{q}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 모든 열 명의 사람에게 대하여 몸을 왼쪽, 혹은 오른쪽으로 돌릴 확률은 각각 $\frac{1}{2}$ 이고 p, q 는 서로소인 자연수이다) [4점]



29. 다음 조건을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 존재한다.

- 모든 자연수 n 에 대하여 $|a_n|=1$
- 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = a_{n+1001}$$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{7n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{11n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{13n} = -1$

$\sum_{n=1}^{1001} a_n$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$ 인

삼차함수 $y=f(x)$ 와 임의의 양수 t 에 대하여 양의 실수 집합에서 실수 집합으로의 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하면 함수 g 는 연속이지만 한 점에서만 미분 불가능이다.

닫힌구간 $[-t, t]$ 에 대하여 $x \in [-t, t]$ 일 필요충분조건은 $g(t) \leq f(x)$ 인 것이다.

함수 $y=g(t)$ 가 $t=a$ 에서 미분 가능하면 $g'(a) \neq 0$ 이고 $\lim_{t \rightarrow 3^-} g'(t) = 0$ 이다. $f(10)$ 의

값을 구하시오. [4점]