제 2 교시

2017학년도 고3 5월 귤모의고사

수학 영역
(나형)

성명			수험 번호					-				

○ 자신이 선택한 유형 (가형 / 나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

뭐어 바보야 미국이 아니라 하늘나라겠지

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음에 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

수학 영역(나형)

1. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 2　② 4　③ 8　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{1}{4}$

2. 두 집합 $A=\{1,2,3,6\}$, $B=\{3,4\}$에 대하여 집합 $C=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}$의 원소의 개수는? [2점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$의 값은? [2점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $\sqrt{3}$　⑤ $2\sqrt{2}$

4. 실수 $a=\log_{\sqrt{2}}4$에 대하여 $\log_2 a+\log_a 2$의 값은? [3점]

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{17}{4}$　④ 4　⑤ 8

5. 다항함수 $f(x) = x^3 + 2$에 대하여

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 10}{x - 2}$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 + a_7 = 12$이고 $a_5 + a_7 = 14$일 때 a_{10}의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

7. 실수 전체집합에서 정의 된 함수 f의 함숫값이

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 3) \\ a & (x = 3) \\ 2x + b & (x > 3) \end{cases}$$

일 때 f는 실수 전체 집합에서 연속이다. 상수 a, b에 대하여 $a + b$의 값은? [3점]

① -2 ② 0 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

8. ${}_{n}C_{2}+{}_{7}C_{3}={}_{8}C_{3}$을 만족하는 자연수 n의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

9. 무리함수 $y=-3\sqrt{2(x+m)}+9$의 그래프가 제3사분면을 지날 때, 정수 m의 최솟값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

10. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sqrt{n+7}$를 만족할 때

$\sum_{k=1}^{10} a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{10} a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{9} a_{3k}$의 값은? [3점]

① $4\sqrt{2}$ ② $\sqrt{33}$ ③ $\sqrt{34}$
④ $\sqrt{35}$ ⑤ 6

11. 다항함수 $f(x)=2x^3-6x+7$에 대하여 함수 g의 식이

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le a) \\ c & (x > a) \end{cases}$$

로 정의 되었을 때 g는 미분가능이다. 상수 c의 최댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

12. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 X에서 X로의 두 함수 f, g가 다음 조건을 만족한다.

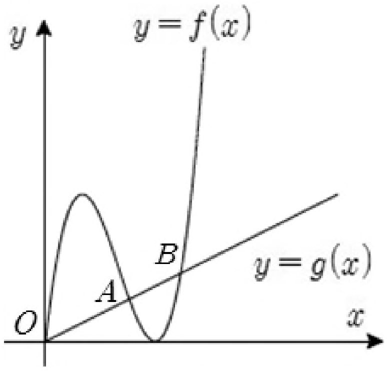
$$(g \circ f)(x)=x$$
$$f(1)=1$$

다음 중 옳은 것만을 고른 것은? [3점]

ㄱ. $g(1)=1$
ㄴ. $(f \circ g)(x)=x$
ㄷ. $f(x)=g(x)$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[13~14] 음이 아닌 실수의 집합 $X=\{x|x\geq 0\}$에서 X로의 두 함수 $f(x)=x(x-m)^2\,(m>0)$와 $g(x)=nx\,(n>0)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점 중 원점이 아닌 것을 x좌표가 작은 순서대로 A, B라고 하자. 13번과 14번의 물음에 답하시오.



13. $m=3$일 때 O, A, B의 x좌표가 각각 순서대로 등차수열을 이루도록 하는 n의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ 1 ④ $\frac{10}{9}$ ⑤ $\frac{11}{9}$

14. $n=t$일 때 선분 $\overline{AB}$의 길이를 $h(t)$라고 할 때 $\lim_{t\to 0}\frac{h(t)}{\sqrt{t}}$의 값은? [4점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

15. 실수집합의 부분집합 P, Q, R에 대하여 진리집합이 각각 P, Q, R인 명제 p, q, r에 대하여 다음을 만족한다.

q는 p이기 위한 필요조건이다. p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

정수 m, n에 대하여 $P=\{x|3 \le x \le 5\}$, $Q=\{x|x<m\}$, $R=\{x|x<n\}$ 일 때 m의 최솟값과 n의 최댓값의 합은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

16. 어떤 파쇄기로 입자의 평균 크기가 $P(cm)$인 폐기물 1톤을 입자의 평균 크기가 $Q(cm)$가 되도록 파쇄 할 때 필요한 에너지 $E(kW)$에 대하여 다음과 같은 공식이 성립한다.

$$E = C + m\log\frac{P}{Q}$$

이 파쇄기로 입자의 평균 크기가 $20cm$인 폐기물을 입자의 평균 크기가 $4cm$가 되도록 파쇄 하기 위해 필요한 에너지는 $65\log5\,kW$이고 입자의 평균 크기가 $10cm$인 폐기물을 입자의 평균 크기가 $1cm$가 되도록 파쇄 하기 위해 필요한 에너지는 $(60+5\log5)kW$ 일 때, 입자의 평균 크기가 $10cm$인 폐기물을 입자의 평균 크기가 $5cm$가 되도록 파쇄 할 때 필요한 에너지가 $E_1\,kW$이다. E_1의 값은?

(단, C와 m은 상수이다.) [4점]

① $50\log2$ ② $55\log2$ ③ $60\log2$
④ $5+50\log2$ ⑤ $5+55\log2$

17. 내부가 보이지 않는 주머니에 빨간 구슬 5개, 파란 구슬 2개, 검은 구슬이 3개 들어있다. 주머니에서 무작위로 구슬을 꺼내서 색을 확인했을 때 검은색이면 바깥으로 빼내고, 그렇지 않으면 다시 주머니 속으로 넣는 것을 한 번의 시행이라고 할 때 빨간 구슬과 파란 구슬을 적어도 1회 이상씩 꺼내게 되었을 때 이 시행을 멈춘다. 이 시행이 3회 이하의 시행으로 멈추게 될 확률은? [4점]

① $\frac{1091}{2700}$ ② $\frac{1097}{2700}$ ③ $\frac{1103}{2700}$
④ $\frac{1109}{2700}$ ⑤ $\frac{223}{540}$

18. 다음은 모든 자연수 n에 대해서

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n} \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n=1$일 때

(좌변) $=\frac{1^2}{2^1}=\frac{1}{2}$

(우변) $=6-\frac{1^2+4\times1+6}{2}=\frac{1}{2}$에서

$(*)$가 성립한다.

(2) $n=k$일 때 $(*)$가 성립한다고 가정하면

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{k^2}{2^k}=6-\frac{k^2+4k+6}{2^k}$$ 이다.

양변에 $\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$을 더한 후 정리하면

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{k^2}{2^k}+\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$$
$$=6-\frac{1}{2^k}\left\{(k^2+4k+6)-\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\right\}$$
$$=6-\frac{\boxed{\text{(나)}}}{2^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$가 성립한다.

(1), (2)에 의하여

모든 자연수 n에 대하여 $(*)$가 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$라 할 때 $f(3)+g(4)$의 값은? [4점]

① 56 ② 57 ③ 58
④ 59 ⑤ 60

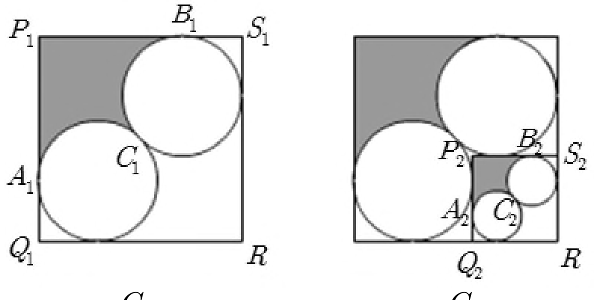
19. $1\times{}_{19}C_0+3\times{}_{19}C_1+\cdots+39\times{}_{19}C_{19}$

$=\sum_{k=0}^{19}(2k+1)_{19}C_k$의 값은? [4점]

① $20(2^{19}-1)$ ② $40(2^{19}-1)$ ③ $40(2^{19}-1)$
④ 20×2^{19} ⑤ 40×2^{19}

.

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $P_1Q_1RS_1$의 두 변과 각각 내접하고 서로 외접하며 서로 합동인 두 원이 있다. 두 원이 각각 $\overline{P_1Q_1}, \overline{P_1S_1}$과 만나 생기는 접점을 A_1, B_1이라고 하고 두 원의 접점을 C_1이라고 할 때 $\overline{P_1A_1}, \overline{P_1B_1}$과 $\overset{\frown}{A_1C_1}, \overset{\frown}{B_1C_1}$로 둘러싸인 모양에 색칠하여 얻은 도형을 G_1라 하자.
도형 G_1에서 정사각형 $P_2Q_2RS_2$가 정사각형 $P_1Q_1RS_1$와 꼭짓점 R을 공유하고 $P_1Q_1RS_1$의 내부에 있으며 두 원에 접하도록 점 P_2, Q_2, S_2를 잡고 $P_2Q_2RS_2$의 두 변과 각각 내접하고 서로 외접하며 서로 합동인 두 원을 그린다. 이 두 원이 각각 $\overline{P_2Q_2}, \overline{P_2S_2}$과 만나 생기는 접점을 A_2, B_2이라고 하고 두 원의 접점을 C_2이라고 할 때 $\overline{P_2A_2}, \overline{P_2B_2}$과 $\overset{\frown}{A_2C_2}, \overset{\frown}{B_2C_2}$로 둘러싸인 모양에 색칠하여 얻은 도형을 G_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 G_n에 색칠되어 있는 모든 도형들의 둘레의 합을 l_n이라고 할 때 $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값은? [4점]

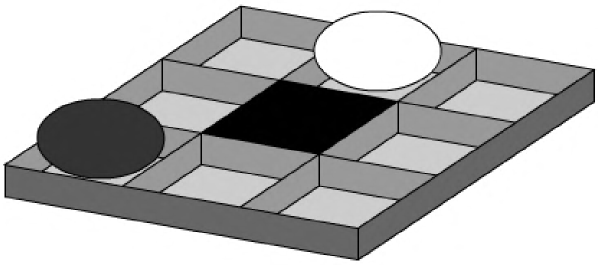


G_1 G_2

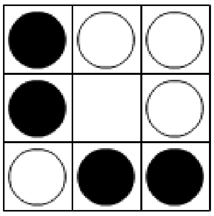
① $\frac{3}{2}\pi+1+\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi+2+\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}\pi+1+2\sqrt{2}$
④ $\frac{3}{4}\pi+1+\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi+2+\sqrt{2}$

21. 민아는 <그림>처럼 가로와 세로에 각각 3줄씩 옆면을 공유하는 정사각기둥들 중 가운데의 것만 덮개가 있는 형태의 상자에 8개의 칸에 각각 경단을 집어넣으려고 한다. 경단의 종류는 흰색과 검은색, 두 가지이고 각각 4개씩 있다. 같은 색의 경단은 서로 구별되지 않을 때, 민아가 경단을 상자에 집어넣을 수 있는 경우의 수를 p라고 하자. p의 값은?

(단, 상자를 돌려서 같은 배치가 나오는 경우는 같은 경우로 생각한다.) [4점]



< 그림 >



(예시)

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

※ 22번부터 30번까지는 주관식 문항입니다.

22. 수렴하는 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\{a_n+3b_n\}=10$, $\lim_{n\to\infty}\{a_n-b_n\}=-2$일 때 $\lim_{n\to\infty}\{a_n+b_n\}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 7을 세 개의 자연수로 분할하는 방법의 수를 구하시오 [3점]

24. $X=\{0,1,2,3\}$에서 X로의 함수
$f:X\to X$의 함숫값이
$f(x)=(x+1$을 4로 나눈 나머지$)$
로 정의 되어있을 때, 함수 f^n가 항등함수가 되도록 하는 50이하의 자연수 n의 개수는?
(단, $f^1=f$이고 자연수 n에 대하여 $f^{n+1}=f\circ f^n$이다.) [3점]

25. 수열 $\left\{\dfrac{3^n}{3^n-k^n}+\dfrac{k^n}{4^n+7^n}\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 k의 합을 구하시오.
[3점]

26. 집합 $A_1=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 A_1의 부분집합 $A_2, A_3, \cdots, A_{10}$이 다음을 만족한다.

- 9 이하의 자연수 k에 대하여
  $A_k\supset A_{k+1}$
- 10 이하의 모든 자연수 n에 대하여
  $A_n\neq\varnothing$

$n(A_{10})=1$일 때 집합
$B=\{i\,|\,A_i=A_{i+1},\ i$는 9 이하의 자연수$\}$에 대하여 B의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

27. 다항식 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{2x^2+6}=1$,

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=5$일 때 $f(2)$의 값을 구하시오.

[4점]

28. 10차 다항식 $f(x)$에 대해 방정식 $f(x)=0$의 근이 $1, 2, 3, \cdots, 10$이고 $f(0)=10!$일 때 $-\frac{f'(1)}{8!}$의 값을 구하시오.

(단, 자연수 n에 대해 $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$이다) [4점]

29. $\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{2}\right]-\left[-\frac{n}{2}\right]}{n}$의 값을 구하시오.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x)=\begin{cases}0 & ((x-1)(x-3)\geq 0)\\ 1 & ((x-1)(x-3)<0)\end{cases}$와

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$에 대하여 함수 $h(x)$가

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)<g(x))\\ g(x) & (f(x)\geq g(x))\end{cases}$$

로 정의되었을 때 $h(x)$가 실수 전체집합에서 연속이다. $|\alpha-\beta|$의 최솟값을 구하시오. [4점]