D&T와 마약팀의 2017학년도 6월평가원 수학영역(가) 문항해설

1. 벡터의 성분과 실수배
$5\vec{a}=5(3,\ -1)=(15,\ -5)\quad \therefore 15-5=10$

2. 삼각함수의 계산
$\cos\frac{3}{2}\pi=0$

3. 순열의 계산
${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$

4. 지수함수의 극한
$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\times\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$

5. 미분계수의 계산
$f'(x)=2e^x+(2x+7)e^x=(2x+9)e^x\quad \therefore f'(0)=9$

6. 이항정리
$\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6=\sum_{r=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_r x^r\left(\frac{1}{3x}\right)^{6-r}=\sum_{r=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_r x^{2r-6}3^{r-6}$

$\therefore\ r=4\ \Rightarrow\ {}_6\mathrm{C}_4 3^{-2}=\frac{5}{3}$

7. 삼각함수의 덧셈정리
$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2$

$1+\tan\alpha=2-2\tan\alpha$

$3\tan\alpha=1\ \therefore\tan\alpha=1$

8. 자연수의 분할
case1 - $P(6,\ 2)=3$: $(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$

case2 - $P(6,\ 4)=2$: $(1,\ 1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 1,\ 2,\ 2)$

case3 - $P(6,\ 6)=1$ $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$

따라서 총 6가지이다.

9. 조건부확률
$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{13}{16}-\frac{4}{16}}{\frac{13}{16}}=\frac{9}{13}$

10. 로그부등식
$\log_3(x-1)(4x-7)\le 3$

$(x-1)(4x-7)\le 27$

$4x^2-11x-20\le 0$

$-\frac{5}{4}\le x\le 4$

이 때, log 의 정의에 의해 $x>\frac{7}{4}$ 이므로 $\therefore x=2,\ 3,\ 4$

* 로그방부등식을 풀 때는 밑과 진수조건에 유의한다.

11. 도함수의 활용 - 접선의 방정식
$y'=\frac{1}{x-3}$ 이므로 $a=1$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=x-3$

$a+b=1-3=-2$

12. 두 직선이 이루는 각
두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{v}$, $\vec{u}$라고 하자.

$\vec{v}=(4,\ 3)$, $\vec{u}=(-1,\ 3)$ 이므로

$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|}=\frac{5}{5\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

13. 도함수와 극대/극소
$y'=2xe^{-x+1}-(x^2-8)e^{-x+1}=-e^{-x+1}(x-4)(x+2)$ 이므로

$x=-2$ 에서 극솟값, $x=4$ 에서 극댓값을 가진다.

$f(-2)=-4e^3=a$, $f(4)=8e^{-3}=b$

$\therefore ab=-32$

14. 수학적 확률
$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)>0$

$x=1,\ x=6$

$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)<0$

$x=3,\ x=4$

$f(a)f(b)<0$ 을 만족시키는 순서쌍은

$(1,3)$, $(1,4)$, $(6,3)$, $(6,4)$

$(3,1)$, $(4,1)$, $(3,6)$, $(4,6)$

총 8개다. $\therefore\ \frac{2}{9}$

D&T연계문항, 2016학년도 D&T Final 2회

20. 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 함수 $f(x)=-x^3+5x^2+4x-20$에 대하여

$f(a)f(b)\le 0$

일 때, 주사위를 던져 나온 눈의 수의 차가 1 이하일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

EBS연계문항, 수능특강 확률

[6009-0085]
4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이차함수 $f(x)=x^2-5x+6$에 대하여 $f(a)f(b)=0$이 성립할 확률은?

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

15. 합성함수의 미분법

$g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{e}$ 이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}=g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 이다.

$f(x)=\sin^2 x$ 에서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$,

$f'(x)=2\sin x\cos x$ 에서 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$,

$g'(x)=e^x$ 에서 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$ 이므로

$g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{e}$ 이다.

16. 부분적분법을 이용한 정적분

$\int_1^e x(1-\ln x)\,dx$

$=\int_1^e x\,dx-\int_1^e x\ln x\,dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e-\int_1^e x\ln x\,dx$

$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}\,dx\right)$

$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e\right)$

$=\frac{1}{4}(e^2-3)$

17. 음함수의 미분법

포물선의 방정식 $y^2=4x$ 의 양변을 x에 대하여 미분하여 정리하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$ (단, $y\neq 0$)

이므로 점 $\mathrm{A}(t^2,\ 2t)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면

$y=\frac{1}{t}x+t$ ……㉠

이다.

$\mathrm{B}(-1,\ 2t)$ 이므로 직선 OB 의 방정식은

$y=-2tx$ ……㉡

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 점 P 의 좌표를 구하면

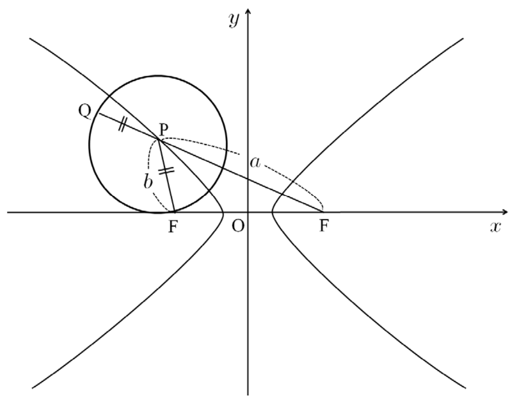
$\left(-\frac{t^2}{2t^2+1},\ \frac{2t^3}{2t^2+1}\right)$

이다.

위의 식에서 $f(y)=\frac{2}{y}$, $g(t)=\frac{1}{t}$, $a=-1$ 이므로

$f(a)\times g(a)=2$ 이다

18. 쌍곡선의 정의의 활용



원 C 위의 점 Q가 직선 FP 위에 있고 $\overline{\mathrm{FQ}}>\overline{\mathrm{FP}}$ 를 만족시킬 때

선분 FQ 의 길이가 최댓값을 갖는다.

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=a$, $\overline{\mathrm{PF'}}=b$ 라 하면, 선분 FQ 의 길이의 최댓값이 14이므로

$a+b=14$

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 의 장축의 길이가 8이므로 쌍곡선의 정의에 의해

$a-b=8$

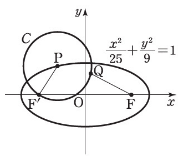
$\therefore a=11,\ b=3$

(원 C의 넓이)$=\overline{\mathrm{PF'}}^2=9\pi$

EBS연계문항, 수능특강 이차곡선

[6010-0016]

3 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 이 타원 위의 점 P를 중심으로 하고 선분 PF′을 반지름으로 하는 원을 C라고 하자. 원 C 위의 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최솟값이 4일 때, 원 C의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{PF'}}<\overline{\mathrm{PF}}$이다.)



① 6π ② 7π ③ 8π
④ 9π ⑤ 10π

19. 독립시행의 확률

상자를 세 번 던지므로 $m+n=3$, $0 \le m \le 3$ 이다.

$i^k=-i$ 를 만족시키는 자연수 k는 4로 나눈 나머지가 1인 수이므로

$|m-n|=|2m-3|$ 은 4로 나눈 나머지가 1이다.

그런데 $0 \le m \le 3$ 이므로 $|2m-3|=3$ 이다.

따라서 $2m-3=3$ 또는 $2m-3=-3$

$m=3$ 또는 $m=0$

상자를 한번 던져 2가 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이므로

$${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0+{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{7}{16}$$

EBS연계문항, 수능특강 확률

[6009-0109]

3 한 개의 주사위를 5번 던지는 시행에서 3의 배수인 눈의 수가 나오는 횟수를 m, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수를 n이라 할 때,

$$i^{|m-n|}=-i$$

를 만족시킬 확률은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

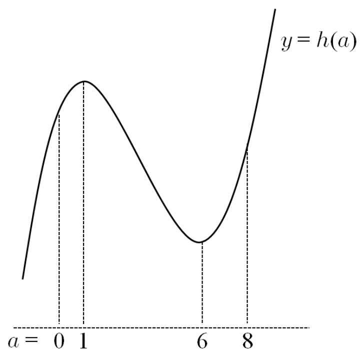
① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{7}{27}$ ③ $\frac{8}{27}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{10}{27}$

20. 정적분의 기하적 추론

$\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$ 를 함수 $h(a)$라 하자.

$h'(a)=f(a)-g(a)$ 이므로 $y=h(a)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=6$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 $y=h(a)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서, $0 \le a \le 8$에서 $h(a)$의 최솟값은 $a=0$ 또는 $a=6$에서 갖는다.

$$h(0)=\int_0^8 g(x)dx \;=8$$

$$h(6)=\int_0^6 f(x)dx+\int_6^8 g(x)dx$$

$$=\int_0^6 \frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}dx\;+\;1$$

$$=\left[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\right]_0^6+1$$

$$=(15-5\ln 40)-(5\ln 4)+1$$

$$=16-5\ln 10$$

21. 미분과 그래프의 추론

Solution.1

ㄱ. (참)

$f(a)=-1$ 인 실수 a가 존재하면 (나) 조건에 의해 $f(-a)=1$ 이다.

따라서 ㄱ이 성립함을 알 수 있다.

ㄴ. (거짓)

실수전체의 집합에서 미분가능하므로 $-1<f(x)<1$ 이므로

$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}>0$

실수전체에서 증가함수이다.

ㄷ. (거짓)

$f''(x)=f'(x)\{1+f(-x)\}-f'(-x)\{1+f(x)\}=2f(x)f'(x)$ 이므로

$f'(x)>0$ 이므로 $x=0$ 에서 변곡점을 가진다.

따라서 한 점에서만 변곡점을 가진다.

Solution.2

(다) 조건의 식을 전개하면

$f'(x)=1+f(x)+f(-x)+f(x)f(-x)$ 이다.

(나) 조건에 의하여

$f'(x)=1-\{f(x)\}^2$ 이다.

$\frac{f'(x)}{1-\{f(x)\}^2}=1$ 이고 양변을 적분하면

$\int \frac{f'(x)}{1-\{f(x)\}^2}dx=x+C$ (단, C는 상수)

$f(x)=X$라 치환하면

$$\int \frac{f'(x)}{1-\{f(x)\}^2}dx=\int \frac{1}{1-X^2}dX=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-X}+\frac{1}{1+X}dX$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|1-f(x)|+\frac{1}{2}|1+f(x)|$$

따라서

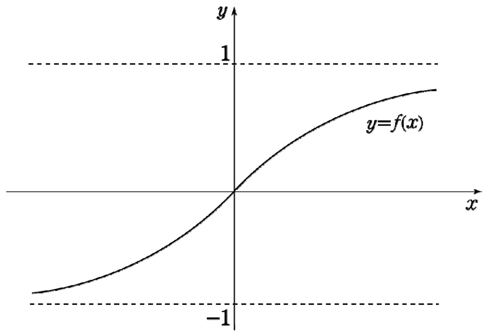
$$-\frac{1}{2}\ln|1-f(x)|+\frac{1}{2}\ln|1+f(x)|=x+C$$

$f(0)=0$ 이므로 $C=0$ 이다.

따라서 $\ln\left|\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right|=2x$ 이므로 $\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}=e^{2x}$

$f(x)$ 에 관하여 정리하면 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ 이다.

ㄴ. 그래프를 그려보면 다음과 같고 함수 $f(x)$ 는 항상 증가한다.



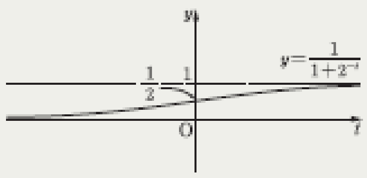
ㄷ. 식과 그래프를 통해 변곡점은 $x=0$ 뿐임을 알 수 있다.

교과서 참고내용(신사고-미적분II지도서)

지도 자료

1. 소문이 퍼지는 비율

함수 $f(t)=\dfrac{1}{1+2^{-t}}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그래프에서 $\lim_{t\to\infty}f(t)=1$임을 확인할 수 있는데, 시간이 한없이 흐르면 소문을 알고 있는 사람의 비율이 1에 한없이 가까워지므로 대부분의 사람이 소문을 알게 된다고 해석할 수 있다.

2. 시그모이드 함수와 로지스틱 함수

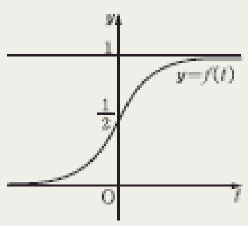
처음에는 완만하게 증가하다가 빠른 증가를 거쳐 일정한 값으로 수렴하게 되는 함수를 시그모이드 함수(Sigmoid function)라고 한다. 소문이 퍼지는 비율을 나타내는 함수는 시그모이드 함수의 일종인데, 이것을 로지스틱 함수(Logistic function)라고 한다.

벨기에의 수학자 베르훌스트(Verhulst, P. F. ; 1804~1849)는 인구가 자연상태에서 등비급수적으로 증가하지만, 토지 · 음식물 등의 제약을 받으면 차차 증가세가 둔화되어 가는 것을 시간 t의 함수

$$f(t)=\frac{1}{1+ka^{-t}}\ (k>0,\ a>1,\ k,\ a\text{는 상수})$$

로 나타내었다.

함수 $y=f(t)$의 그래프는 일반적으로 다음 그림과 같다.



I. 지수함수와 로그함수 ● 51

22. 삼각함수의 극한

$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}\times\dfrac{2}{\cos x}=2$

23. 벡터의 성분을 이용한 내적

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-8+k=0\quad\therefore k=8$

24. 조합의 수

${}_6C_4\times{}_4C_3=15\times4=60$

25. 지수방정식

$3^{-x+2}=\dfrac{1}{9}=3^{-2}$

$\therefore x=4$

26. 타원

$4x^2+9y^2-18y-27=0$ 의 식을 정리하면 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 을 y축 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 것과 같다.

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 의 초점의 좌표를 구하기 위해선

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 의 초점의 좌표를 y축 방향으로 1만큼 평행이동 한 것과 같다.

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 의 초점의 좌표가 $(\pm\sqrt{5},0)$ 이므로

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 의 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{5},1)$ 이다.

$\therefore p^2+q^2=6$

27. 중복조합의 수

$x,\ y,\ z,\ w$를 각각 사과, 감, 배, 귤을 선택한 개수라 하면

$x+y+z+w=8$ 을 만족해야 한다.

$y\ge1,\ z\ge1,\ w\ge1$ 이므로

$y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$ 으로 치환하여 대입하면

$x+y'+z'+w'=5$

1) $x=0$ 일 때

$y'+z'+w'=5$ 이므로 ${}_3H_5=21$

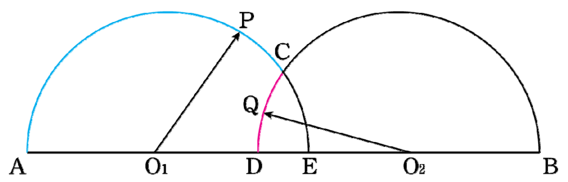
2) $x=1$ 일 때

$y'+z'+w'=4$ 이므로 ${}_3H_4=15$

따라서 총 36가지 경우의 수가 있다.

28. 평면벡터의 최대/최소

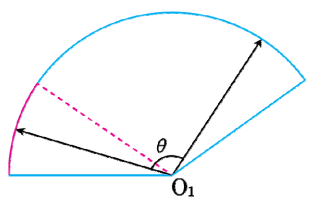
문제의 상황은 다음과 같이 호 AC 위를 점 P가 움직이고 있고, 호 DC 위를 점 Q가 움직이고 있다.

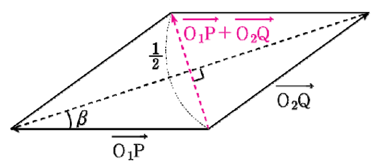


두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$ 의 시점을 O로 일치시키면 다음 그림과 같다.

이 때, $\angle QOP=\theta$ 라 하면, $\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|$ 의 최솟값은 θ 의 크기가 최대인 순간이다.

* 점 P와 점 C가 일치하고, 점 Q와 점 D가 일치하는 순간



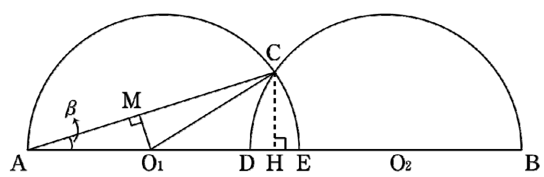


$\angle CAD=\beta$, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H, 점 O_1에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 M이라 하면,

$\left|\dfrac{\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}}{2}\right|=\overline{O_1M}=\dfrac{1}{4}$ 이고,

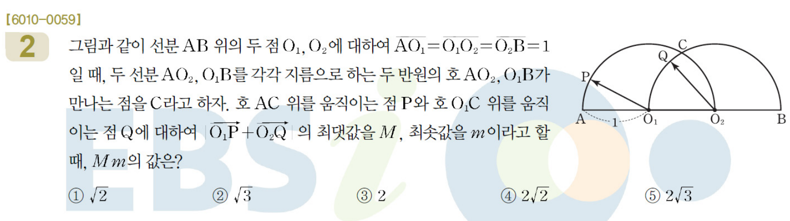
$\overline{AB}=2\overline{AH}=\overline{AC}\cos\beta=4\overline{O_1A}\cos^2\beta$

$(\because\ \overline{AH}=2\overline{AM}=2\overline{O_1A}\cos\beta)$



$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\overline{O_1A}=1$ 이므로 $\overline{AB}=\dfrac{15}{4}$

EBS연계문항, 수능특강 평면벡터



[6010-0059]

2 그림과 같이 선분 AB 위의 두 점 O_1, O_2에 대하여 $\overline{AO_1}=\overline{O_1O_2}=\overline{O_2B}=1$일 때, 두 선분 AO_2, O_1B를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AO_2, O_1B가 만나는 점을 C라고 하자. 호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 O_2C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, Mm의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

29. 매개변수로 표현된 평면운동

Solution.1

점 $P(0,\ f(1))$ 로부터 움직이므로,

s는 점 P가 시각 t가 $t=1$에서 시각 $t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 까지 움직인 거리이다.

$t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 이므로 s를 t에 대해 정리하면,

$s=\dfrac{t^2-1}{t}$

$\displaystyle\int_1^t\sqrt{\{f'(t)\}^2+\left(\frac{2}{t}\right)^2}=s=\frac{t^2-1}{t}$

양변을 t에 관하여 미분하면

$\sqrt{\{f'(t)\}^2+\dfrac{4}{t^2}}=1+\dfrac{1}{t^2}$

식을 정리하여 $f'(t)$를 구하면

$f'(t)^2=\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)^2$

이 때, $f'(2)=\dfrac{3}{4}$ 이므로 $f'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}$ 이다.

$\therefore\ f''(t)=\dfrac{2}{t^3}$

$\therefore\ f''(2)=\dfrac{1}{4}$

Solution.2

$x=2\ln t$, $y=f(t)$ 이므로

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=f'(t)$ 이다

점 P가 점 $(0,\ f(1))$ 로부터 움직인 거리가 s가 될 때의 시각 t가

$t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 이므로

$\displaystyle\int_1^{\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$\displaystyle=\int_1^{\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\frac{4}{t^2}}\,dt=s$

함수 $g(t)=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\dfrac{4}{t^2}}$ 라고 할 때,

$g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$G\left(\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)-G(1)=s$

양변을 s에 관하여 미분하면

$$g\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)\times\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2\sqrt{s^2+4}}\right)=1$$

$$\sqrt{f'\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)^2+\frac{16}{\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{s^2+4}}{s+\sqrt{s^2+4}}$$

$$\left\{f'\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)\right\}^2=\frac{4s^2}{\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^2}=\left(\frac{2s}{s+\sqrt{s^2+4}}\right)^2$$

$s=\frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 의 값이 2이고 $f'(2)=\frac{3}{4}$ 이어야 하므로

$$f'\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)=\frac{2s}{s+\sqrt{s^2+4}}$$

구하고자 하는 값이 $a=f''(2)$ 이므로 양변을 미분하여 정리하면

$$f''\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)=\frac{16}{\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^3}$$ 이다.

$s=\frac{3}{2}$ 을 대입하면 $f''(2)=\frac{1}{4}$ 이다.

$\therefore 60a=15$

교과서 참고내용

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 좌표 (x, y)가 시각 t를 매개변수로 하는 함수

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

로 주어질 때, 점 P가 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$까지 그리는 곡선의 길이는 점 P가 움직인 경로가 겹치지 않으면 점 P가 움직인 거리와 같다.

따라서 점 P가 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$까지 그리는 곡선의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b|\vec{v}|\,dt$$
$$=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

또, 곡선 $y=f(x)$는 점 P의 좌표 (x, y)가 시각 t를 매개변수로 하는 함수

$$x=t,\quad y=f(t)$$

로 주어지는 곡선으로 볼 수 있다.

따라서 점 P의 시각 t에서의 속도 $\vec{v}$는

$$\vec{v}=\left(1,\ \frac{dy}{dt}\right)$$

로 나타낼 수 있으므로 곡선 $y=f(x)$의 $x=a$에서 $x=b$까지의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b|\vec{v}|\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$
$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선의 길이

① 좌표평면 위를 움직이는 점 P(x, y)의 시각 t에서의 위치가

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

일 때, 점 P가 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$까지 그리는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_a^b|\vec{v}|\,dt=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

② 곡선 $y=f(x)$의 $x=a$에서 $x=b$까지의 길이 l은

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

EBS연계문항, 수능특강 평면운동

[6010-0096]

4 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\ln t^2,\ y=t+\frac{1}{t}\ (1\le t\le a)$$

의 길이가 $\frac{3}{2}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

위치 $x=2\ln t,\ y=f(t)\left(=1+\frac{1}{t}\right)$ 동일

30. 우함수/기함수의 미분과 적분

Solution.1

(나) 식에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=2\int_0^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\qquad\cdots㉠$$

이다.

(나) 조건에서 주어진 식을 x에 관하여 미분을 하면

$$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이다.

㉠식에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면,

$$0=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore a=\frac{5\pi}{3}$$

(나) 식을 x게 관하여 두 번 미분하면

$$f'\left(x+\frac{5\pi}{3}\right)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이고, 위 식에 $x=-\frac{5\pi}{6}$를 대입하면

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)-f'\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=2f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=1$$

$$\therefore f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\qquad\cdots㉡$$

㉠ 식에서 $\frac{1}{3}b+\frac{1}{10}c=-\frac{1}{2}$,

㉡ 식에서 $-3b-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

두 식을 연립하면, $b=-\frac{9}{4}$, $c=\frac{5}{2}$ 이다.

따라서 $abc = -\dfrac{75}{8}\pi$이고, $p+q=83$

Solution.2

(나) 조건에서 주어진 식을 x에 관하여 미분을 하면

$$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \qquad \cdots ㉠$$

㉠식에 $x=-\dfrac{a}{2}$를 대입하면,

$$0=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \quad (\because \text{(가)식을 미분하면} f'(x)=f'(-x))$$

$$\therefore \ a=\frac{5\pi}{3}$$

따라서 (나) 조건에 $x=0$을 대입하면

$$\int_0^{\frac{5\pi}{6}} f(t)dt=\left[\frac{b}{3}\sin(3x)+\frac{c}{5}\sin(5x)\right]_0^{\frac{5\pi}{6}}=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \ \cdots ㉡$$

$(\because$ 주어진 구간은 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{a}{2}\right])$

(나) 조건에 $x=-\dfrac{5\pi}{6}$을 대입하면

$$2\int_0^{\frac{5\pi}{6}} f(t)dt=2\left[\frac{b}{3}\sin(3x)+\frac{1}{2}\sin(5x)\right]_0^{\frac{5\pi}{6}}=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ \cdots ㉢$$

두 식 ㉡과 ㉢을 연립하여 계산하면,

$b=-\dfrac{9}{4}$, $c=\dfrac{5}{2}$

$\therefore abc=-\dfrac{75}{8}\pi$

$\therefore p+q=83$

* 문제에서 미분가능한 함수 $f(x)$라 했으므로 **Solution.1**의 $f'(x)$를 이용하는 것이 **Solution.2**의 풀이보다 적절해 보입니다.

해설을 작성해 주신 분들

D&TEduContents 컨텐츠개발팀
안정혁
조기강
전의영
성민아

팀 마약
김정문
정성현
정흥기

제작
조민성