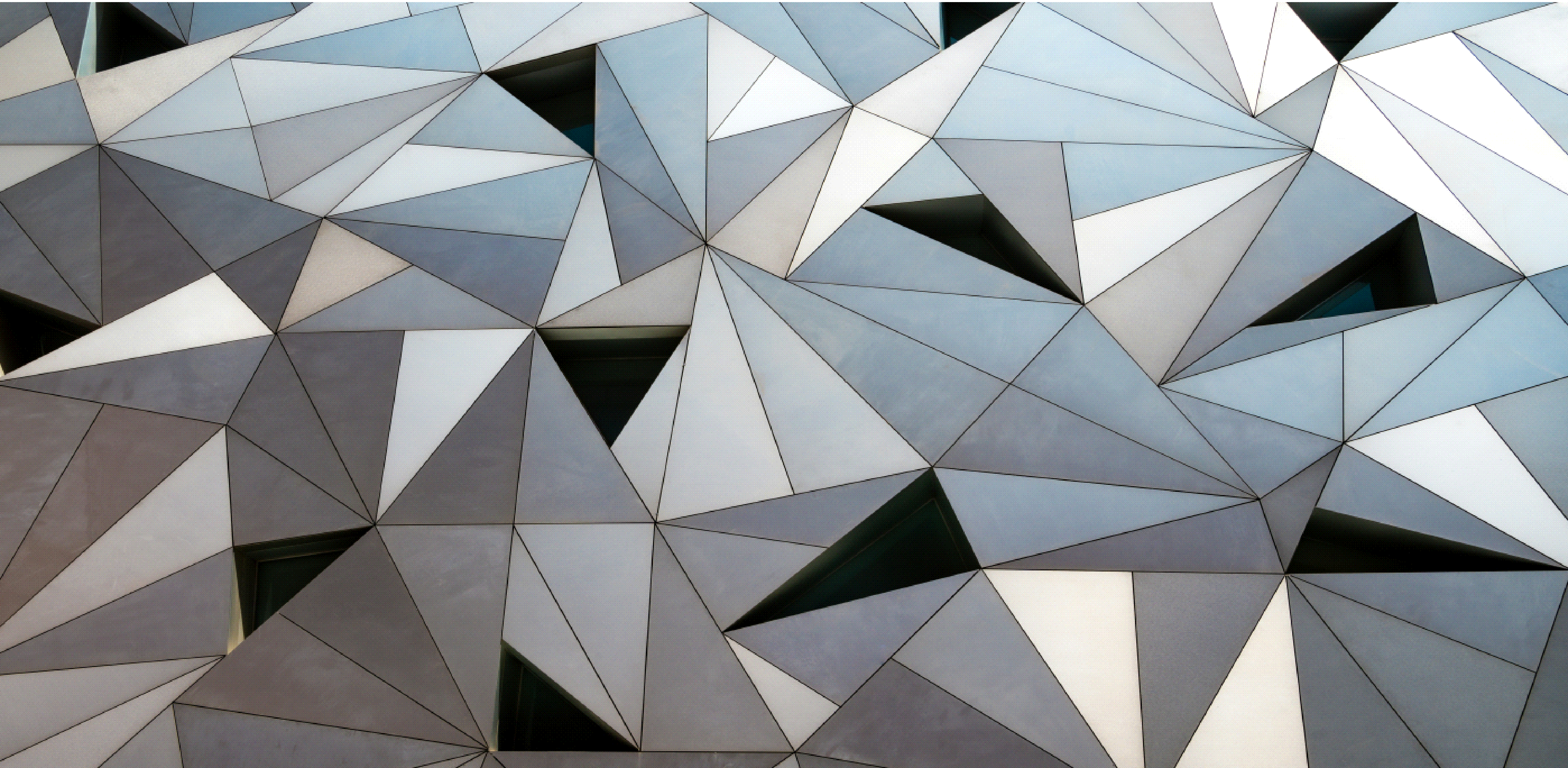
2025 규토 N제 시리즈 보충프린트 - 20일의 기적

이것만은 제발

ver. 2025 수능대비 수1+수2 해설지



2025 이것만은 제발 ver.수1+수2 빠른 정답

1. 지수함수와 로그함수

Theme 1 a의 n제곱근
1. 24
2. 115
3. ①
4. ②

Theme 2 비례상수 Technique $(=k)$
5. 75
6. ①

Theme 3 자연수 및 정수 조건
7. ①
8. 13
9. 24

Theme 4 그래프의 평행이동과 대칭이동
10. ③
11. ③
12. ④

Theme 5 직선의 기울기와 길이
13. ⑤
14. ④

Theme 6 역함수 Technique
15. ①
16. 192
17. ⑤

Theme 7 함숫값의 범위 Technique
18. ②
19. ②
20. 33

Theme 8 비례식과 내분, 외분
21. ③
22. ③
23. 13
24. 220

Theme 9 그래프 복합해석
25. ③
26. 10

Theme 10 단순 수식 접근형
27. ④
28. ⑤
29. ②

Theme 11 함수의 최댓값과 최솟값
30. 21
31. ①

Theme 12 방정식과 부등식
32. 12
33. ①
34. ①
35. ④

Theme 13 지수방정식과 부등식의 치환
36. ⑤
37. ②

2. 삼각함수

Theme 14 부채꼴의 호의 길이와 넓이

38. 42
39. 45

Theme 15 삼각함수의 뜻

40. ⑤

Theme 16 삼각함수 사이의 관계

41. ④
42. ①
43. ①
44. ④
45. ④

Theme 17 삼각함수의 방정식과 부등식

46. 15
47. 24
48. 32
49. ③
50. ③
51. ①
52. ③
53. ④

Theme 18 삼각함수를 포함한 최대, 최소

54. 17
55. ③
56. ③

Theme 19 삼각함수의 대칭성

57. ③
58. ③

Theme 20 삼각함수의 평행이동

59. ④
60. 10

Theme 21 사인법칙과 코사인법칙

61. ⑤
62. ①
63. ①
64. ②
65. ③
66. ①
67. ⑤
68. 20
69. 26

3. 수열

Theme 22 등차수열과 등비수열

70. ⑤
71. ⑤
72. 7
73. 9

Theme 23 등차수열의 합과 이차함수

74. ④
75. 30

Theme 24 $\sum$의 성질

76. 100
77. 22
78. ①

Theme 25 부분분수

79. ⑤
80. ④
81. ④
82. 115

Theme 26 수열의 합과 일반항 사이의 관계

83. 58
84. 15
85. 20
86. ①

Theme 27 새롭게 정의된 수열의 합

87. ⑤
88. ③
89. 14

Theme 28 절댓값이 포함된 수열의 합

90. 25
91. ③

Theme 29 자연수 조건을 이용하는 수열의 합

92. ②
93. 19

Theme 30 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (순행)

94. ①
95. ①
96. 33
97. 8
98. ②

Theme 31 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (역행)

99. ⑤
100. ①
101. ③
102. ①

4. 함수의 극한과 연속

Theme 32 함수의 극한

103. ④
104. 10
105. ③
106. ③

Theme 33 함수의 극한의 활용

107. ②
108. ③

Theme 34 함수의 연속

109. 8
110. ④
111. 6
112. ⑤
113. ①
114. ⑤
115. 5
116. ④
117. ④
118. ③

5. 미분

Theme 35 평균변화율

119. 11
120. 3

Theme 36 미분계수를 이용한 극한값 계산

121. 10
122. 9
123. 2

Theme 37 함수의 곱의 미분법

124. 5
125. 28
126. ①

Theme 38 함수의 미분가능성

127. ④
128. 76
129. 48
130. 3
131. 5
132. 15

Theme 39 접선의 방정식
-곡선 위의 점이 주어질 때

133. 3
134. 3
135. 22
136. ⑤

Theme 40 접선의 방정식
-기울기가 주어질 때

137. 10
138. 16
139. ②

Theme 41 접선의 방정식
-곡선 밖의 점이 주어질 때

140. ④
141. ②

Theme 42 접선의 방정식
-두 곡선에 동시에 접하는 접선

142. 10
143. 19

Theme 43 접선의 방정식
-교점에서의 접선

144. 90

Theme 44 접선의 방정식의 활용

145. 25
146. 3
147. 55

Theme 45 평균값의 정리

148. 15

Theme 46 함수의 증가, 감소

149. 1
150. 13
151. 9
152. ①
153. ②

Theme 47 함수의 극대, 극소

154. 2
155. 67
156. ②

Theme 48 함수의 최대, 최소

157. ⑤
158. ④
159. 11

Theme 49 방정식의 실근의 개수

160. 51
161. 42
162. 12
163. 9
164. 21

Theme 50 접선의 개수

165. 23

Theme 51 부등식의 활용

167. ⑤

168. 3

Theme 52 속도와 가속도

169. 11

170. ①

171. 27

Theme 53 정점 Technique

172. 13

173. ②

6. 적분

Theme 54 부정적분과 미분의 관계의 활용

174. 8

175. 7

Theme 55 부정적분과 함수의 연속성

176. ③

177. 60

Theme 56 구간에 따라 달라지는 정적분 계산

178. 29

Theme 57 정적분의 성질

179. 44

Theme 58 우함수, 기함수, 주기함수의 정적분

180. ①

181. ②

Theme 59 정적분으로 정의된 함수
-적분 구간이 상수인 경우

182. 4

183. ③

Theme 60 정적분으로 정의된 함수
-적분 구간에 변수가 있는 경우

184. ④

185. 50

186. 10

187. ①

Theme 61 정적분으로 정의된 함수
-New 함수

188. 17

189. ②

190. 8

191. ③

192. ②

Theme 62 함수의 추론과 정적분

193. 110

Theme 63 정적분으로 정의된 함수의
빼기함수 Technique

194. 13

195. 43

Theme 64 곡선과 x축 사이의 넓이

196. 22

197. 13

198. ②

199. ④

Theme 65 곡선과 직선 사이의 넓이

200. 4

201. 14

202. 80

203. ③

Theme 66 두 곡선 사이의 넓이

204. 4

205. 49

206. ③

207. ④

Theme 67 넓이의 분할

208. 2

209. ①

Theme 68 역함수의 그래프와 넓이

210. 10

211. ③

Theme 69 속도와 거리

212. 6

213. ③

214. ⑤

215. ⑤

216. 17

217. ③

Theme 70 함수의 추론과 넓이

218. ③

219. 17

220. ②

2025 수능대비 이것만은 제발 ver.수1+수2 해설지

1. 지수함수와 로그함수

Theme 1 a의 n제곱근

1. 24

005

$2 \le n \le 10$

$x^n = n^2 - 12n + 32$

$x < 0$인 실수 존재

n이 홀수인지 짝수인지 case분류하면

① n이 홀수

n이 홀수인 경우에는 $n^2 - 12n + 32$의 n제곱근 중에 음의 실수가 존재하려면 $n^2 - 12n + 32$이 음수이기만 하면 된다.

$n^2 - 12n + 32 < 0$

$(n-4)(n-8) < 0 \Rightarrow 4 < n < 8$

$n = 5,\ n = 7$

② n이 짝수

n이 짝수인 경우에는 $n^2 - 12n + 32$의 n제곱근 중에 음의 실수가 존재하려면 $n^2 - 12n + 32$이 양수이기만 하면 된다.

$n^2 - 12n + 32 > 0$

$(n-4)(n-8) > 0 \Rightarrow n < 4$ or $n > 8$

$n = 2,\ n = 10$

따라서 모든 n의 값의 합은 24이다.

답 24

2. 115

007

27의 여섯제곱근 중 음의 실수인 것은

$-\sqrt[6]{27} = -3^{\frac{1}{2}}$이다.

실수 a의 다섯제곱근 중 실수인 것이 $-3^{\frac{1}{2}}$이므로

$\left(-3^{\frac{1}{2}}\right)^5 = a \Rightarrow -3^{\frac{5}{2}} = a$

9의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$

양의 실수 b의 제곱근 중 양의 실수인 것이 $3^{\frac{2}{3}}$이므로

$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^2 = b \Rightarrow 3^{\frac{4}{3}} = b$

$-a \times b = 3^{\frac{5}{2}+\frac{4}{3}} = 3^{\frac{23}{6}} = 3^k \Rightarrow k = \dfrac{23}{6}$

따라서 $30k = 30 \times \dfrac{23}{6} = 115$이다.

답 115

3. ①

6. 1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt{a}$는 b의 세제곱근이다. $\Rightarrow (\sqrt{a})^3 = b \Rightarrow a^{\frac{3}{2}} = b$

(나) c는 a^3의 네제곱근이다. $\Rightarrow c^4 = a^3 \Rightarrow c = a^{\frac{3}{4}}$

$\log_{bc} ab$의 값은? [3점]

① $\dfrac{10}{9}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ $\dfrac{20}{9}$ ④ $\dfrac{25}{9}$ ⑤ $\dfrac{10}{3}$

$\log_{a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{3}{4}}} a^{\frac{5}{2}} = \log_{a^{\frac{9}{4}}} a^{\frac{5}{2}} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{4}} = \dfrac{20}{18} = \dfrac{10}{9}$

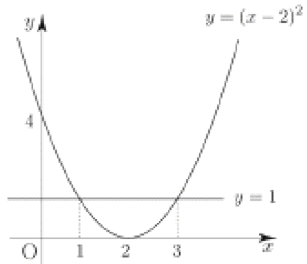
4. ②

041

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은
방정식 $x^4=\sqrt{3}^{f(n)}$의 실근과 같다.
즉, 양의 실근을 a, 음의 실근을 $-a$라 하면
$a\times(-a)=-9$이므로 $a=3$이다.

$81=\sqrt{3}^{f(n)} \Rightarrow 81=3^{\frac{f(n)}{2}} \Rightarrow 3^4=3^{\frac{f(n)}{2}} \Rightarrow f(n)=8$
이므로
$-(n-2)^2+k=8 \Rightarrow (n-2)^2=k-8$를 만족시키는
자연수 n의 개수가 2이면 된다.

방정식 $(x-2)^2=k-8$이 서로 다른 자연수를 근으로
가지려면 $k-8=1$이어야 한다.



따라서 $k=9$이다.

답 ②

Tip 일반적으로 '자연수'는 문제에서 숨겨진 조건으로 출제되기 좋으니 주의하도록 하자.

Theme 2 비례상수 Technique $(=k)$

5. 75

048

$a,\ b,\ c,\ k>0$

$3^a=5^b=k^c=z$라 두면
$3=z^{\frac{1}{a}},\ 5=z^{\frac{1}{b}},\ k=z^{\frac{1}{c}}$

$\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

$\Rightarrow \log c=\log\frac{2ab}{2a+b} \Rightarrow c=\frac{2ab}{2a+b}$

$\Rightarrow \frac{1}{c}=\frac{2a+b}{2ab} \Rightarrow \frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}$

$z^{\frac{1}{c}}=z^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{2a}}\times z^{\frac{1}{b}} \Rightarrow k=\sqrt{3}\times 5=5\sqrt{3}$

따라서 $k^2=25\times 3=75$이다.

답 75

Tip 놀랍게도 이 문제의 정답률이 9% 였다.
$=k$을 쓰면 손쉽게 구할 수 있는 문제임에도 말이다. $a,\ b,\ c,\ d$가 아니라 $a,\ b,\ c,\ k$라는 문자를 쓴 것은 $=k$ 테크닉을 쓸 때 약간의 당혹감을 주고자 하는 평가원의 의도로 보인다.
당황하지 말고 $=z$로 두면 된다.

6. ①

039

$\log_a b=\frac{1}{2}\log_b c=\frac{1}{4}\log_c a$

$\Rightarrow \log_a b=\log_b\sqrt{c}=\log_c\sqrt[4]{a}$

$\log_a b=\log_b\sqrt{c}=\log_c\sqrt[4]{a}=k$라 두면
$b=a^k$

$\sqrt{c}=b^k \Rightarrow c^{\frac{1}{2}}=b^k \Rightarrow c^{\frac{1}{2k}}=b$

$\sqrt[4]{a}=c^k \Rightarrow a^{\frac{1}{4}}=c^k \Rightarrow c^{4k}=a$

$b=a^k \Rightarrow c^{\frac{1}{2k}}=c^{4k^2} \Rightarrow \frac{1}{2k}=4k^2 \Rightarrow k^3=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow k=\frac{1}{2}$ (k는 실수)

$a=c^2,\ b=c$이므로

$$\log_a b+\log_b c+\log_c a=\log_{c^2}c+\log_c c+\log_c c^2=\frac{1}{2}+1+2=\frac{7}{2}$$

답 ①

다르게 풀어보자.

$\log_a b=\frac{1}{2}\log_b c=\frac{1}{4}\log_c a$

$\Rightarrow \log_a b=k,\ \log_b c=2k,\ \log_c a=4k$

$\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=\frac{\log b}{\log a}\times\frac{\log c}{\log b}\times\frac{\log a}{\log c}=1$

이므로 $k\times 2k\times 4k=1 \Rightarrow 8k^3=1 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$이다.

Theme 3 자연수 및 정수 조건

7. ①

047

$\frac{1}{3}+\log\sqrt{a}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a$ 의 값이 자연수가 되어야 한다.

$\frac{1}{2}<\log a<\frac{11}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{2}\log a<\frac{11}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{4}<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a<\frac{1}{3}+\frac{11}{4}$

$\Rightarrow \frac{7}{12}<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a<\frac{37}{12}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a$가 될 수 있는 값은 1, 2, 3뿐이다.

① $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a=1 \Rightarrow \log a=\frac{4}{3} \Rightarrow a=10^{\frac{4}{3}}$

② $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a=2 \Rightarrow \log a=\frac{10}{3} \Rightarrow a=10^{\frac{10}{3}}$

③ $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a=3 \Rightarrow \log a=\frac{16}{3} \Rightarrow a=10^{\frac{16}{3}}$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$10^{\frac{4}{3}}\times 10^{\frac{10}{3}}\times 10^{\frac{16}{3}}=10^{\frac{4}{3}+\frac{10}{3}+\frac{16}{3}}=10^{\frac{30}{3}}=10^{10}$이다.

답 ①

8. 13

052

$\log_4 2n^2-\log_4\sqrt{n}=\log_4\frac{2n^2}{\sqrt{n}}=m$ (m은 40이하의 자연수)

$2n\sqrt{n}=4^m \Rightarrow n^{\frac{3}{2}}=2^{2m-1} \Rightarrow n=2^{\frac{4m-2}{3}}$

n이 자연수가 되려면 $m=2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots$ 이므로

$m=3k-1$ $(k=1,\ 2,\ 3\cdots)$이다.

m은 40 이하이므로 $1\le k\le 13$

m과 n은 일대일대응이므로

조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 13이다.

답 13

9. 24

049

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
서로 다른 두 실근을 갖고, 각각 실근은 중근

n이 홀수이면 중근이 최대 1개 존재하므로 (가) 조건을 만족시킬 수 없다.

즉, n은 짝수이므로 방정식 $x^n-64=0 \Rightarrow x^n=64$의

두 실근은 $-\sqrt[n]{64},\ \sqrt[n]{64}$이다.

(가) 조건을 만족시키려면 $f(x)=(x-a)(x-b)$ $(a<b)$라
할 때, $b=\sqrt[n]{64},\ a=-\sqrt[n]{64}$이어야 한다.

(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수

$f(x)=(x-a)(x-b)$는 $x=\frac{a+b}{2}$에서 최솟값을 가지므로

최솟값은 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)=-\frac{(b-a)^2}{4}$이다.

$-\frac{(b-a)^2}{4}$가 음의 정수이어야 하므로

$\frac{(b-a)^2}{4}$은 자연수이다.

$b=\sqrt[n]{64},\ a=-\sqrt[n]{64}$이므로

$b-a=2\sqrt[n]{64}=2\left(8^{\frac{2}{n}}\right)$

$(b-a)^2=4\left(8^{\frac{4}{n}}\right)=4\left(2^{\frac{12}{n}}\right)$

$\frac{(b-a)^2}{4}=2^{\frac{12}{n}}$ 이 자연수이고, n은 짝수이므로

$n=2,\ 4,\ 6,\ 12$이다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 $2+4+6+12=24$이다.

답 24

Theme 4 그래프의 평행이동과 대칭이동

10. ③

054

$y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동

$x \rightarrow x-m$

$y=2^{x-m}+2$

$y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동

$x \rightarrow x-2$

$y=\log_2 8(x-2)=\log_2 8+\log_2(x-2)=3+\log_2(x-2)$

$y=2^{x-m}+2$와 $y=3+\log_2(x-2)$가 $y=x$대칭이므로

$y=2^{x-m}+2$를 $y=x$ 대칭하면

$x \rightarrow y,\ y \rightarrow x$

$x=2^{y-m}+2 \Rightarrow x-2=2^{y-m} \Rightarrow \log_2(x-2)=y-m$

$\Rightarrow y=m+\log_2(x-2)$ 이 $y=3+\log_2(x-2)$ 이므로

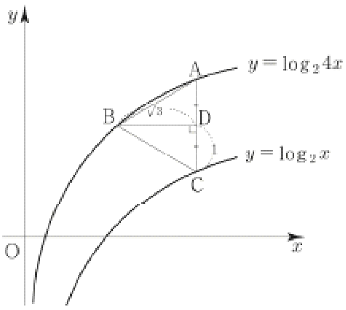
따라서 $m=3$이다.

답 ③

11. ③

101

$y=\log_2 4x=\log_2 x+2$이므로 정삼각형의 한 변의 길이는 2이다. ($\because \overline{AC}=2$) 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 할 때, 정삼각형의 높이 $\overline{BD}=\sqrt{3}$이다.



점 C의 x좌표를 t라 하면

$C(t,\ \log_2 t) \Rightarrow D(t,\ \log_2 t+1)$

$\overline{BD}=\sqrt{3}$이므로 점 B의 x좌표는 $t-\sqrt{3}$이므로

$B(t-\sqrt{3},\ \log_2 4(t-\sqrt{3}))$이다.

점 D와 점 B의 y좌표가 같으므로

$\log_2 4(t-\sqrt{3})=\log_2 t+1$

$\Rightarrow 4t-4\sqrt{3}=2t \Rightarrow t=2\sqrt{3}$

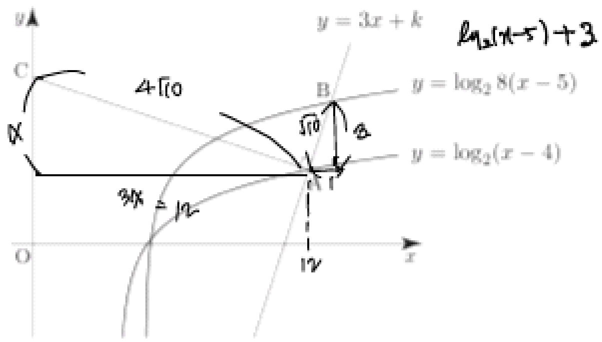
따라서 $B(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p^2\times 2^q=3\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}=12\sqrt{3}$이다.

답 ③

12. ④

13. 그림과 같이 직선 $y=3x+k$가 두 함수 $y=\log_2(x-4)$, $y=\log_2 8(x-5)$의 그래프와 제1사분면에서 각각 한 점에서 만나며 그 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 $y=3x+k$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이가 20이다. 상수 k의 값은? (단, $k<-21$) [4점]



① -30 ② -31 ③ -32 ④ -33 ⑤ -34

$9\alpha^2+\alpha^2=160$

$\alpha=4$

A $(12,\ 3)$

$36+k=3$

$k=-33$

Theme 5 직선의 기울기와 길이

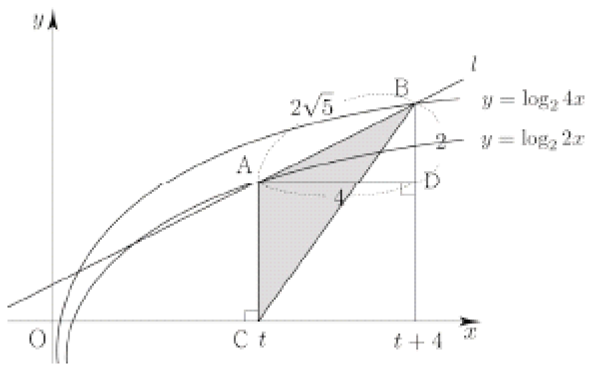
13. ⑤

082

A에서 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선에 내린수선의 발을 D라 하자.

직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $\overline{BD}=x$라 하면

$\overline{AD}=2x$, $\overline{BD}=x$이고 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$이므로 $x=2$이다.
점 A의 x좌표를 t라 하면 점 D의 x좌표는 $t+4$이다.



점 A의 y좌표는 $\log_2 2t$이고,
점 B의 y좌표는 $\log_2 4(t+4)$이므로
$\log_2 2t+2=\log_2 4(t+4) \Rightarrow \log_2 8t=\log_2(4t+16)$

$\Rightarrow 4t=16 \Rightarrow t=4 \Rightarrow \overline{AC}=\log_2 8=3$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$이다.

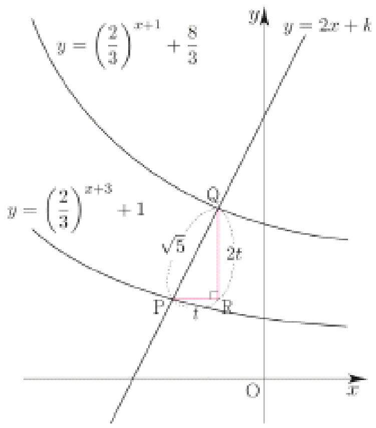
따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\times4=6$이다.

답 ⑤

14. ④

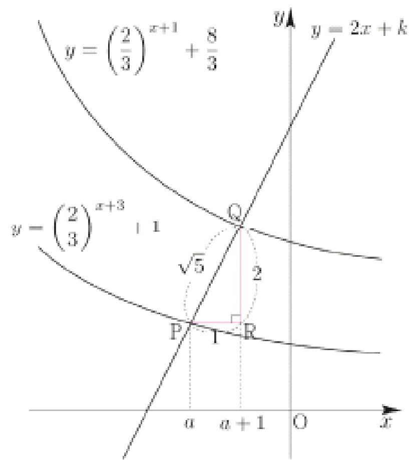
097

$\overline{PQ}=\sqrt{5}$이고, 직선 PQ의 기울기가 2이므로
보조선을 그으면 다음 그림과 같다.



$\overline{PR}^2+\overline{QR}^2=\overline{PQ}^2$

$\Rightarrow t^2+4t^2=5 \Rightarrow 5t^2=5 \Rightarrow t=1\ (\because t>0)$



점 P의 x좌표를 a라 하면 점 Q의 x좌표는 $a+1$이고,
(점 P의 y좌표) + 2 = (점 Q의 y좌표)이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1+2=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3} \Rightarrow \frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 1=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} \Rightarrow a=-2$$

직선 $y=2x+k$가 점 $\mathrm{P}\left(-2,\ \frac{5}{3}\right)$를 지나므로

$-4+k=\frac{5}{3} \Rightarrow k=\frac{17}{3}$

따라서 상수 $k=\frac{17}{3}$이다.

답 ④

Tip **<잘못된 사고과정>**

문제를 보자마자 어? 이거 training-1step 043번에서 했었는데! 개꿀~

함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프는

함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로

2만큼, y축의 방향으로 $\frac{5}{3}$만큼 평행이동한 것이니

training-1step 043번과 마찬가지로

$\overline{\mathrm{PR}}=2,\ \overline{\mathrm{QR}}=\frac{5}{3}$ 아닐까? 라고 판단할 수 있다.

하지만 이는 잘못된 판단이다.
training-1step 043번 해설에서도 명시했듯이
043번에서는 기울기가 맞아 떨어졌기에 가능했지만

097번에서는 $\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\frac{\frac{5}{3}}{2}=\frac{5}{6}\neq 2$이므로

기울기가 같지 않아 성립하지 않는다.
초기접근에서 그렇게 생각할 수는 있으나
기울기를 확인해본 뒤 빠져나오는 것이 바람직하다.
만약 빠져나오지 않았다면 반성하도록 하자.
물론 기울기뿐만 아니라 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$도
만족시키지 않는다.

Theme 6 역함수 Technique

15. ①

067

$y=2^x-1$와 $y=\log_2(x+1)$은 $y=x$에 대하여 대칭되어 있다. 즉, $y=2^x-1$ 위의 점을 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이 된다.

이때 직선 AB의 기울기가 -1이므로 ($y=x$와 수직)
점 A와 B는 $y=x$에 대하여 대칭이다.
$\mathrm{A}(2,\ 3) \Rightarrow \mathrm{B}(3,\ 2)$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(2+3)\times 1=\frac{5}{2}$이다.

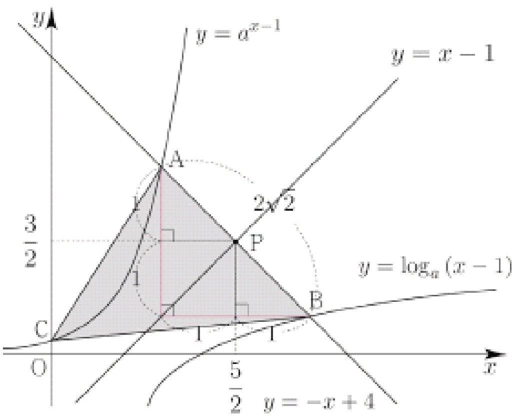
답 ①

16. 192

$y=a^x$와 $y=\log_a x$는 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$y=a^{x-1}$과 $y=\log_a(x-1)$는 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

$y=x-1$과 $y=-x+4$의 교점을 P라 하자.

$x-1=-x+4 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$이므로 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$



$\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이므로 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이고, 이후 풀이는 동일하다.

$$a^{\frac{3}{2}-1}=\frac{5}{2} \Rightarrow a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2} \Rightarrow a=\frac{25}{4}$$

점 $\mathrm{C}\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$와 직선 $y=-x+4\ (x+y-4=0)$의 거리 d를 구하면

$$d=\frac{\left|\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{96}{25}=\frac{96}{25\sqrt{2}}$$

삼각형 ABC의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times d\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times\frac{96}{25\sqrt{2}}\times 2\sqrt{2}$

$$=\frac{96}{25}$$

따라서 $50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$이다.

답 192

17. ⑤

14. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :

두 점 A_n, B_n의 좌표를 각각

$\mathrm{A}_n(a_n, 2^{a_n})$, $\mathrm{B}_n(b_n, 2^{b_n})$ $(a_n<b_n)$

이라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{2^{b_n}-2^{a_n}}{b_n-a_n}=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여

$$(b_n-a_n)^2+(2^{b_n}-2^{a_n})^2=10n^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $2^{b_n}-2^{a_n}=3(b_n-a_n)$이므로 이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$(b_n-a_n)^2=n^2$$

$a_n<b_n$이므로 $b_n-a_n=n$, 즉 $a_n=b_n-n$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$2^{b_n}-2^{b_n-n}=3n$$

이므로

$$2^{b_n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3n$$

$$2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

한편, 곡선 $y=2^x$과 곡선 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 x_n은 점 B_n의 y좌표와 같다.

따라서

$$x_n=2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

이므로

$$x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

정답 ⑤

Theme 7 함숫값의 범위 Technique

18. ②

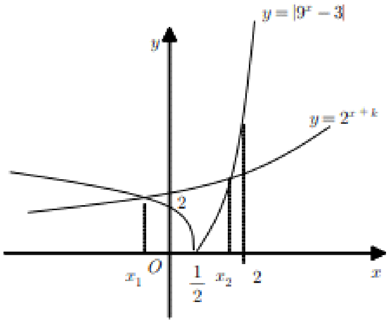
18. 출제의도 : 지수함수의 그래프의 성질을 이용하여 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|9^x-3|=0$ 에서 $9^x=3^{2x}=3$ 이므로

$x=\frac{1}{2}$

따라서, 두 곡선 $y=|9^x-3|$, $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표 x_1, x_2가 $x_1<0$, $0<x_2<2$ 를 만족시키는 경우는 그림과 같다.



즉, $x=0$일 때,

$2^{0+k}=2^k>2 \cdots$㉠

$x=2$ 일 때,

$2^{2+k}=4\times2^k<|9^2-3|=78$

$2^k<19.5 \cdots$㉡

㉠,㉡을 만족시키는 자연수 k는

2, 3, 4

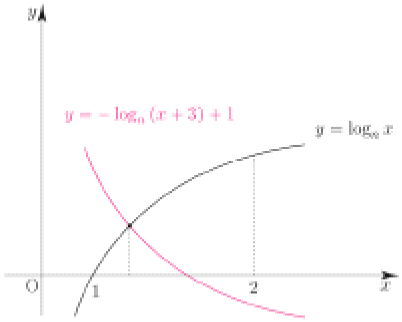
이므로 그 합은

$2+3+4=9$

정답 ②

19. ②

095



교점의 x좌표가 1보다 크려면

$-\log_n 4+1>0 \Rightarrow 1>\log_n 4 \Rightarrow n>4$

교점의 x좌표가 2보다 작으려면

$\log_n 2>-\log_n 5+1 \Rightarrow \log_n 10>1 \Rightarrow n<10$

따라서 모든 n의 값의 합은 $5+6+7+8+9=35$이다.

답 ②

20. 33

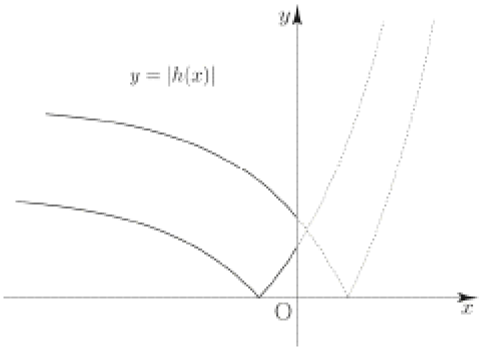
112

$h(x)=3^{x+2}-n$, $j(x)=\log_2(x+4)-n$라 하면 다음과 같다.

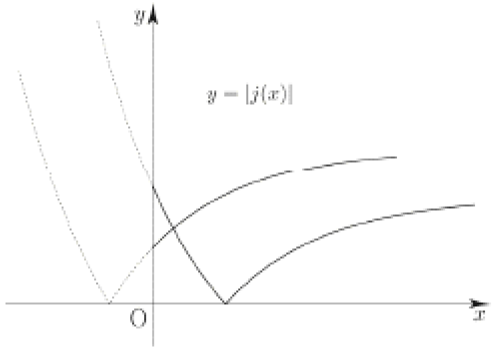
$$f(x)=\begin{cases} |h(x)| & (x<0) \\ |j(x)| & (x\geq0) \end{cases}$$

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값이 4가 되도록 하려면 전제조건으로 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 4인 것이 존재해야 한다.

함수 $h(x)$의 그래프의 y절편이 0 이하라고 가정해보자.



$x<0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수는 최대 1이므로 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 4인 것이 존재하려면 $x\geq 0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수가 3인 것이 존재해야 한다.
하지만 n의 값을 어떻게 잡아도 $x\geq 0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수는 2 이하이므로 모순이다.
즉, $h(x)$의 그래프의 y절편은 0보다 커야 하므로
$9-n>0 \Rightarrow n<9$ ⋯ ㉠



$h(x)$의 그래프의 y절편이 0보다 크면
$x<0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수는 최대 2이므로 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 4인 것이 존재하려면 $x\geq 0$에서 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 교점의 개수가 2인 것이 존재해야 한다.
이를 만족시키려면 $j(x)$의 그래프의 y절편이 0보다 작아야 하므로 $2-n<0 \Rightarrow 2<n$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의해 조건을 만족시키는 n의 값의 범위는

$2<n<9$이므로 모든 자연수 n의 값의 합은
$3+4+5+6+7+8=33$이다.

답 33

Theme 8 비례식과 내분, 외분

21. ③

065

$\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$이고 점 C의 y좌표가 2, 점 B의 y좌표가 0이므로 점 A y좌표는 $\frac{1B+2C}{1+2}=\frac{0+4}{1+2}=\frac{4}{3}$이다.

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=\frac{4}{3} \Rightarrow 2^{-x+1}=2^2 \Rightarrow x=-1$이므로
점 A의 좌표는 $\left(-1,\ \frac{4}{3}\right)$이다.

점 A는 직선 $y=mx+2$ 위의 점이므로
$\frac{4}{3}=-m+2 \Rightarrow m=\frac{2}{3}$이다.

답 ③

22. ③

076

점 B의 좌표가 $B(0,\ 2^a)$이므로 $\overline{OB}=2^a$
$\overline{OB}=3\times\overline{OH} \Rightarrow \overline{OH}=\frac{2^a}{3}$
점 A의 x좌표를 p라 하면 $A\left(p,\ \frac{2^a}{3}\right)$이고,
점 A는 곡선 $y=2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$2^{-p+a}=\frac{2^a}{3} \Rightarrow 2^{-p}=\frac{1}{3} \Rightarrow 2^p=3$
또한 점 A는 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로
$\frac{2^a}{3}=2^p-1 \Rightarrow \frac{2^a}{3}=2 \Rightarrow 2^a=6$이다.
따라서 $a=\log_2 6$이다.

답 ③

23. 13

099

점 D의 좌표를 $(t,\ 0)$ $(t>0)$라 하자.
선분 CA를 $5:3$으로 외분하는 점이 D이므로

$\mathrm{D}=\dfrac{3\mathrm{C}-5\mathrm{A}}{3-5} \Rightarrow t=\dfrac{0-5\mathrm{A}}{-2} \Rightarrow \mathrm{A}=\dfrac{2}{5}t$

점 A의 좌표는 $\dfrac{2}{5}t$이고, 점 A는 $y=3x$ 위의 점이므로

$\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{5}t,\ \dfrac{6}{5}t\right)$이다.

$\mathrm{D}=\dfrac{3\mathrm{C}-5\mathrm{A}}{3-5} \Rightarrow 0=\dfrac{3\mathrm{C}-6t}{-2} \Rightarrow \mathrm{C}=2t$

점 C의 y좌표는 $2t$이므로 $\mathrm{C}(0,\ 2t)$이다.

점 B는 두 직선 $y=3x$, $y=-\dfrac{1}{3}x+2t$의 교점이므로

$\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{5}t,\ \dfrac{9}{5}t\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}t$이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2=\dfrac{t^2}{5}=20 \Rightarrow t=10$

$\mathrm{A}(4,\ 12)$, $\mathrm{B}(6,\ 18)$이고 두 점은 $y=2^{x-m}+n$ 위의 점이므로

$12=2^{4-m}+n$, $18=2^{6-m}+n$

$18-2^{6-m}=12-2^{4-m} \Rightarrow 2^{6-m}-2^{4-m}=6$

$\Rightarrow 64\times2^{-m}-16\times2^{-m}=6 \Rightarrow 48\times2^{-m}=6$

$\Rightarrow 2^{-m}=\dfrac{1}{8} \Rightarrow m=3,\ n=10$

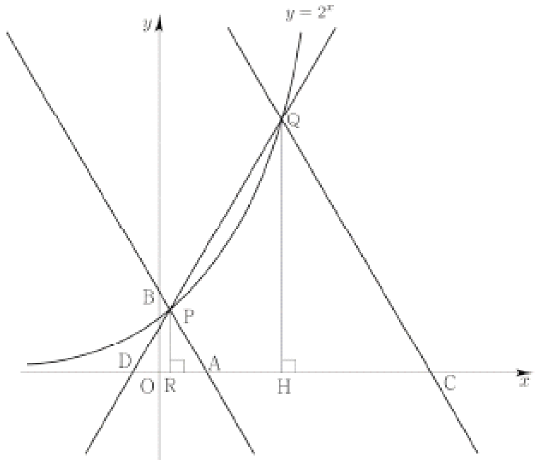
따라서 $m+n=13$이다.

답 13

24. 220

113

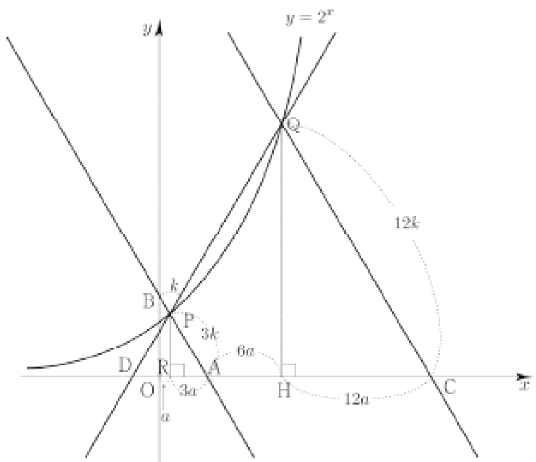
직선 PQ가 x축과 만나는 점을 D라 하고,
두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, H라 하자.



직선 PQ의 기울기가 m이고 직선 QC의 기울기가 $-m$
이므로 삼각형 CQD는 $\overline{\mathrm{DQ}}=\overline{\mathrm{CQ}}$인 이등변삼각형이다.
또한 직선 PA 역시 기울기가 $-m$이므로
삼각형 APD는 $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{AP}}$인 이등변삼각형이다.

점 P의 x좌표가 a이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=a$이고,
$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}} \Rightarrow \overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PA}}=1:3$이므로 $\overline{\mathrm{RA}}=3a$이다.

$\overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}} \Rightarrow \overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CQ}}=1:3$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=4k$라 하면 $\overline{\mathrm{CQ}}=12k$이고,
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AP}}=4:3$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=3k$이다.
즉, 두 삼각형 APD, CQD는 $1:4$ 닮음이다.



$\overline{\mathrm{RA}}=3a$이므로 $\overline{\mathrm{HC}}=12a$이고,

$\overline{AH} = \overline{DH} - \overline{AD} = 12a - 2\times 3a = 6a$

점 Q의 x좌표가 b이므로 $\overline{OH} = b$이고,
$\overline{OH} = \overline{OR} + \overline{RA} + \overline{AH} = a + 3a + 6a = 10a$이다.
즉, $b = 10a$ ··· ㉠

$\overline{PR} = 2^a$, $\overline{QH} = 2^b$이고, 두 삼각형 APD, CQD는 1 : 4
닮음이므로 $\overline{PR} : \overline{QH} = 1 : 4 \Rightarrow 2^a \times 4 = 2^b$
$\Rightarrow 2^{a+2} = 2^b$이다.
즉, $a + 2 = b$ ··· ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a = \dfrac{2}{9}$, $b = \dfrac{20}{9}$이다.

따라서 $90 \times (a+b) = 90 \times \left(\dfrac{2}{9} + \dfrac{20}{9}\right) = 220$이다.

답 220

Theme 9 그래프 복합해석

25. ③

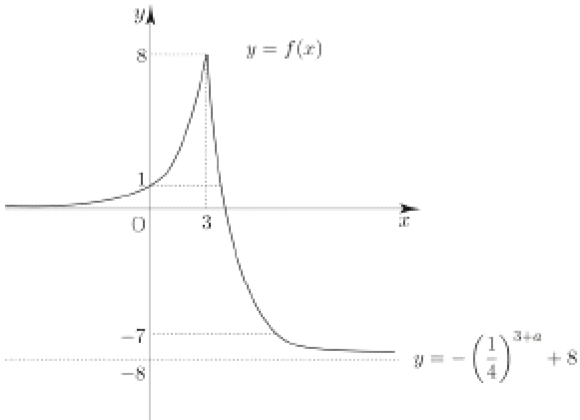
116

곡선 $y = 2^x$의 점근선의 방정식은 $y = 0$이고,

곡선 $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+a} - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{3+a} + 8$의 점근선의 방정식은

$y = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3+a} + 8$이므로

함수 $y = f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가
23인데 $y > 0$에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 15이므로
(1부터 7까지 2개 + 8일 때 1개 $= 2\times 7 + 1 = 15$)
$y \le 0$에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 8이다.

이를 만족시키려면 $-8 \le -\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 < -7$이어야 한다.

$15 < \left(\dfrac{1}{4}\right)^{3+a} \le 16 \Rightarrow 15 < 4^{-3-a} \le 4^2$

$\Rightarrow \log_4 15 < -3 - a \le 2$

$\Rightarrow 3 + \log_4 15 < -a \le 5$

$\Rightarrow -5 \le a < -3 - \log_4 15$

따라서 정수 a의 값은 -5이다.

답 ③

26. 10

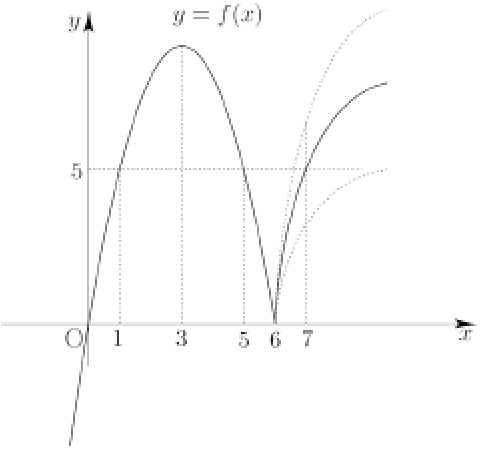
121

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \le x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \ge 6) \end{cases}$$

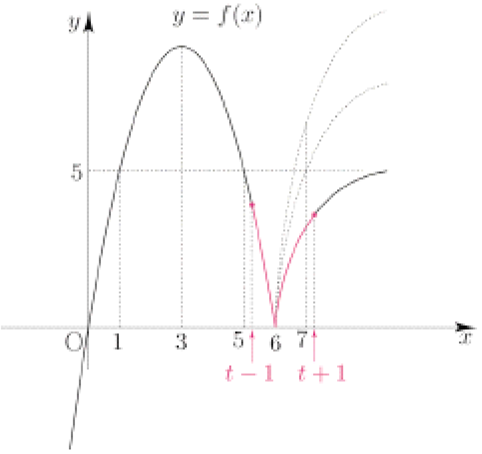
$t=0$일 때, $-1 \le x \le 1$에서 $f(x)$의 최댓값은 5이므로 $g(0)=5$이다. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하려면 어떻게 해야 할지 t의 값을 조금씩 증가시켜보면서 감을 찾아보자. t의 값과 상관없이 구간 $[t-1, t+1]$의 길이가 항상 2로 일정함을 바탕으로 판단해보자.

$t=0$부터 $t=3$까지 t의 값이 조금씩 증가함에 따라 구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값은 5보다 크고, $y=-x^2+6x$가 $x=3$에 대칭되어 있으므로 $0 \le t \le 5$일 때, $g(t) \ge 5$이다.

구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되려면 $t=6$일 때, $5 \le x \le 7$에서 $f(x)$의 최댓값이 5보다 크거나 같아야 한다. 즉, $g(6) \ge 5$가 성립해야 한다.



만약 $f(7) < 5$이면 구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값이 5보다 작아지도록 하는 $t > 6$인 어떤 t가 존재하므로 $g(t)$의 최솟값이 5가 될 수 없어 모순이다.



즉, $f(7) \ge 5$이어야 한다.

$a\log_4(7-5) \ge 5 \Rightarrow \frac{1}{2}a \ge 5$

$\Rightarrow a \ge 10$

따라서 양수 a의 최솟값은 10이다.

답 10

Theme 10 단순 수식 접근형

27. ④

047

$\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$

PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{(1-m)\mathrm{P}+m\mathrm{Q}}{1-m+m}=\frac{(1-m)\mathrm{P}+m\mathrm{Q}}{1}=1$$

$$\Rightarrow (1-m)\log_5 3+m\log_5 12=1$$

$$\Rightarrow \log_5 3+m(-\log_5 3+\log_5 12)=1$$

$$\Rightarrow \log_5 3+m\log_5 4=1 \Rightarrow m\log_5 4=1-\log_5 3$$

$$\Rightarrow m=\frac{\log_5\frac{5}{3}}{\log_5 4}=\log_4\frac{5}{3}$$

따라서 $4^m=4^{\log_4\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$이다.

답 ④

28. ⑤

079

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자.

$$-\log_2(-x)=\log_2(x+2a) \Rightarrow \log_2(x+2a)+\log_2(-x)=0$$

$$\Rightarrow \log_2\{-x(x+2a)\}=0 \Rightarrow -x(x+2a)=1$$

$$\Rightarrow x^2+2ax+1=0 \ \cdots \ ㉠$$

㉠의 두 실근이 x_1, x_2이므로 근과 계수의 관계에 의해

$x_1+x_2=-2a$, $x_1x_2=1$이다.

이때 $y_1+y_2=-\log_2(-x_1)-\log_2(-x_2)$

$=-\log_2 x_1x_2=-\log_2 1=0$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(-\frac{2a}{2},\ 0\right) \Rightarrow (-a,\ 0)$

이다. 선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있으므로

$-4a+5=0 \Rightarrow a=\frac{5}{4}$이고, 이를 ㉠에 대입하면

$$x^2+\frac{5}{2}x+1=0 \Rightarrow 2x^2+5x+2=0 \Rightarrow (x+2)(2x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=-2 \text{ or } x=-\frac{1}{2}$$

즉, 두 교점의 좌표는 $(-2,\ -1)$, $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$이다.

답 ⑤

29. ②

115

$$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$$

$$=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}x+\frac{-a\log_2\frac{b}{a}}{b-a}+\log_2 a$$

$$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$$

$$=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}x+\frac{-a\log_2\frac{b}{a}}{2(b-a)}+\frac{1}{2}\log_2 a$$

두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과

두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이

서로 같으므로

$$\frac{-a\log_2\frac{b}{a}}{b-a}+\log_2 a=\frac{-a\log_2\frac{b}{a}}{2(b-a)}+\frac{1}{2}\log_2 a$$

$$\Rightarrow -\frac{a\log_2\frac{b}{a}}{2(b-a)}=-\frac{1}{2}\log_2 a \Rightarrow \frac{a\log_2\frac{b}{a}}{b-a}=\log_2 a$$

$$\Rightarrow a(\log_2 b-\log_2 a)=(b-a)\log_2 a$$

$$\Rightarrow a\log_2 b-a\log_2 a=b\log_2 a-a\log_2 a$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\log_2 a}{\log_2 b} \Rightarrow \frac{a}{b}=\log_b a$$

$$\Rightarrow a=b^{\frac{a}{b}} \Rightarrow a^b=b^a$$

$$f(1)=40 \Rightarrow a^b+b^a=40 \Rightarrow 2a^b=40 \Rightarrow a^b=20$$

따라서 $f(2)=a^{2b}+b^{2a}=(a^b)^2+(b^a)^2=20^2+20^2=800$이다.

답 ②

Theme 11 함수의 최댓값과 최솟값

30. 21

058

닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-a}$의

최댓값은 27, 최솟값은 m

$f(x)$는 감소함수이므로

$x=2$일 때, 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-a}=27$이다.

$3^{-4+a}=3^3 \Rightarrow a=7$

$x=3$일 때, 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{6-7}=3$이다.

따라서 $a\times m=21$이다.

답 21

31. ①

060

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 2\log_2 x\times\log_4\frac{16}{x}$

$=\log_2 x\times(2-\log_4 x)=2\log_4 x\times(2-\log_4 x)$

$=4\log_4 x-2(\log_4 x)^2$

$\log_4 x=t$라 치환하면

(치환하면 범위조심 $1<x<16 \Rightarrow 0<t<2$)

$0<t<2$에서 $4t-2t^2$는 $t=1$에서 최댓값 2를 가지므로

$M=2$이고 $t=1 \Rightarrow a=4$

따라서 $a+M=6$이다.

답 ①

Theme 12 방정식과 부등식

32. 12

035

진수조건 $x>0,\ 2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$

$\log_2 x=2\log_4 x$이므로

$2\log_4 x=\log_4 4+\log_4(2x-3)$

$\Rightarrow \log_4 x^2=\log_4(8x-12)$

$x^2=8x-12 \Rightarrow x^2-8x+12=0$

$\Rightarrow (x-6)(x-2)=0 \Rightarrow x=2$ or $x=6$

2와 6 모두 $\frac{3}{2}$보다 크므로 조건을 만족시킨다.

따라서 모든 실수 x값의 곱은 12이다.

답 12

33. ①

051

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}>\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1}\\ \log_2 4x<\log_2(x+k)\end{cases}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}>\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-4}$

$\Rightarrow 1-x<4x-4 \Rightarrow 5<5x \Rightarrow 1<x$

진수조건 $x>0,\ x>-k \Rightarrow x>0\ (\because k>0)$

$\log_2 4x<\log_2(x+k) \Rightarrow 4x<x+k$

$\Rightarrow 3x<k \Rightarrow x<\frac{k}{3}$

진수조건까지 고려하면

$\therefore 0<x<\frac{k}{3}$

$1<x$와 $0<x<\frac{k}{3}$가 겹치지 않으려면

$\frac{k}{3}\leq 1$이어야 하므로 $k\leq 3$

따라서 양수 k의 최댓값은 3이다.

답 ①

34. ①

053

$(2^x-32)\left(\frac{1}{3^x}-27\right)>0$

다음과 같이 case분류해서 구할 수 있다.

① $2^x-32>0$, $\frac{1}{3^x}-27>0$

$2^x>2^5 \Rightarrow x>5$

$3^{-x}>3^3 \Rightarrow x<-3$

$x>5$, $x<-3$을 동시에 만족할 수 없으므로 모순이다.

② $2^x-32<0$, $\frac{1}{3^x}-27<0$

$2^x<2^5 \Rightarrow x<5$

$3^{-x}<3^3 \Rightarrow x>-3$

$-3<x<5 \Rightarrow x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로
따라서 모든 정수 x의 개수는 7이다.

답 ①

35. ④

14. 출제의도 : 로그의 성질 및 로그부등식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}$에서
진수 조건에 의하여
$\sqrt{-n^2+10n+75}>0$,
즉 $-n^2+10n+75>0$에서
$n^2-10n-75<0$
$(n+5)(n-15)<0$
$-5<n<15$
이때, n이 자연수이므로
$1\le n<15$ …… ㉠
또 $\log_4(75-kn)$에서
진수 조건에 의하여
$75-kn>0$,
즉 $n<\frac{75}{k}$ …… ㉡
한편,
$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$
의 값이 양수이므로
$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$
에서
$\log_4(-n^2+10n+75)-\log_4(75-kn)>0$
$\log_4(-n^2+10n+75)>\log_4(75-kn)$
이때 밑 4가 1보다 크므로

$-n^2+10n+75 > 75-kn$

$n(n-10-k)<0$

k가 자연수이므로

$0<n<10+k$ $\cdots\cdots$ ㉢

주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 12이므로

㉠, ㉢에서

$10+k>12$

이어야 한다.

즉, $k>2$이어야 한다.

(ⅰ) $k=3$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n<13$

따라서 자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $k=4$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n<14$

따라서 자연수 n의 개수가 13이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $k=5$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n<15$

따라서 자연수 n의 개수가 14이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅳ) $k=6$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n<\dfrac{25}{2}$

따라서 자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅴ) $k \ge 7$일 때

$\dfrac{75}{k}<11$이므로

주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅰ) ~ (ⅴ)에서

$k=3$ 또는 $k=6$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$3+6=9$

정답 ④

Theme 13 지수방정식과 부등식의 치환

36. ⑤

065

방정식 $4^x - a\times 2^{x+1} + a^2 - a - 6 = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구해보자.

$2^x = t$ $(t>0)$라 치환하면
$t^2 - 2at + a^2 - a - 6 = 0$ 이다.

$t>0$인 실수 t가 결정되면 $2^x = t$를 만족시키는 x는 오직 하나 존재한다.
예를 들어 $t=2$라면 $2^x = 2$를 만족시키는 x는 오직 1뿐이다.

다시 말해
방정식 $4^x - a\times 2^{x+1} + a^2 - a - 6 = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위를 물어보는 것은

방정식 $t^2 - 2at + a^2 - a - 6 = 0$이 서로 다른 두 양의 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위를 물어보는 것과 같다. ($t>0$ 이므로 양의 실근이다.)

$t^2 - 2at + a^2 - a - 6 = 0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근이 나오기 위해서는

① $\frac{D}{4} = a^2 - (a^2 - a - 6) > 0 \Rightarrow a > -6$

② 두 근의 합이 양수
근과 계수의 관계에 의해
$2a > 0 \Rightarrow a > 0$

③ 두 근의 곱이 양수
근과 계수의 관계에 의해
$a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) > 0$

$\Rightarrow a < -2$ or $a > 3$

따라서 ①, ②, ③을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $a > 3$이다.

답 ⑤

Tip 1

물론 66번과 같이 함판대를 이용하여 구해도 된다.

① 함숫값
$f(0) > 0 \Rightarrow a^2 - a - 6 > 0$
$\Rightarrow (a-3)(a+2) > 0$
$\Rightarrow a < -2$ or $a > 3$

② 판별식
$\frac{D}{4} = a^2 - (a^2 - a - 6) > 0 \Rightarrow a > -6$

③ 대칭축
대칭축은 $t = a$이므로 $a > 0$

따라서 ①, ②, ③을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $a > 3$이다.

Tip 2

위 풀이가 이해가 잘 안 된다면
아래 해설강의를 참고하도록 하자.
(함판대를 쓰는 이유까지 설명)

065번 해설강의

https://youtu.be/tP5ZmA2LWyY

37. ②

066

$5^{2x}-5^{x+1}+k=0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수

$5^x=t\,(t>0)$라 치환하면
$t^2-5t+k=0$이다.

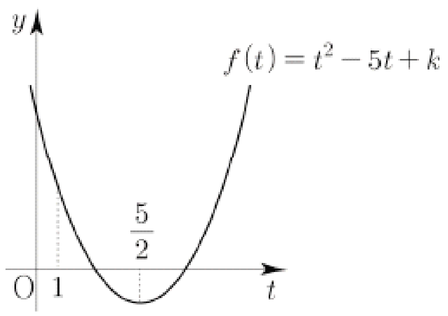
$5^x=t$의 관계에서
$x>0$이 되려면 $t>1$이어야 한다.

다시 말해
방정식 $5^{2x}-5^{x+1}+k=0$이 서로 다른 두 양의 실근을

갖도록 하는 정수 k의 개수를 물어보는 것은

방정식 $t^2-5t+k=0$이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을
갖도록 하는 정수 k의 개수를 물어보는 것과 같다.

방정식 $t^2-5t+k=0$의 두 실근이 모두 1보다 크려면
함숫값, 판별식, 대칭축을 따지면 된다.
$f(t)=t^2-5t+k$라 하면 아래 그림과 같다.



① 함숫값
$f(1)>0 \Rightarrow -4+k>0 \Rightarrow k>4$

② 판별식
$D=25-4k>0 \quad \Rightarrow \frac{25}{4}>k$

③ 대칭축
대칭축은 $t=\frac{5}{2}$이므로
$1<\frac{5}{2}$

따라서 $4<k<\frac{25}{4} \Rightarrow k=5,\ 6$이므로
정수 k의 개수는 2이다.

답 ②

2. 삼각함수

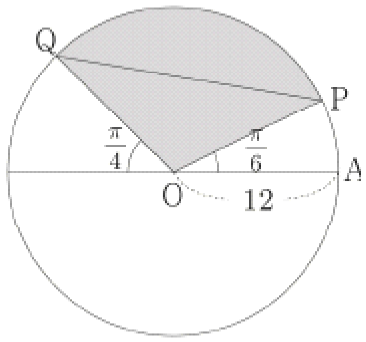
Theme 14 부채꼴의 호의 길이와 넓이

38. 42

013

중심이 O이고 반지름의 길이가 12인 원 위에 점 A가 있다. 반직선 OA를 시초선으로 했을 때, 두 각 $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{13}{4}\pi$가 나타내는 동경이 이 원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

$-\frac{13}{4}\pi=-2\pi-\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$이므로 $-\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$와 동경이 같다. 시계방향으로 $\pi+\frac{\pi}{4}$만큼 회전해서 동경 OQ를 나타내면 다음과 같다.



$\angle POQ=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{12}\pi$이므로
선분 PQ를 포함하는 부채꼴 OPQ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 12^2\times\frac{7}{12}\pi=42\pi$이다.
따라서 k는 42이다.

답 42

39. 45

014

호 AB의 길이가 3π, 넓이가 18π인 부채꼴 OAB

$\frac{1}{2}\times r\times 3\pi=18\pi \Rightarrow r=12$

$\angle AOC=\theta$일 때, $12\theta=3\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$\angle AOC = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{OA} \times \sin\frac{\pi}{4} = \overline{CA} = 6\sqrt{2}$ 이다.

삼각형 OAC는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{OC} = \overline{CA} = 6\sqrt{2}$ 이다.

호 CD와 두 선분 AD, AC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라
하면 S=(삼각형 OAC의 넓이) − (부채꼴 OCD의 넓이)이다.

삼각형 OAC의 넓이 $= \frac{1}{2} \times (6\sqrt{2})^2 = 36$

부채꼴 OCD의 넓이 $= \frac{1}{2} \times (6\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi}{4} = 9\pi$

$S = 36 - 9\pi$ 이므로 따라서 $a + b = 45$ 이다.

답 45

Theme 15 삼각함수의 뜻

40. ⑤

043

직선 $y = 2$가 두 원 $x^2 + y^2 = 5$, $x^2 + y^2 = 9$와
제 2사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하였다.
$x^2 + 4 = 5 \Rightarrow x = -1 \ (x < 0)$ 이므로 $A(-1,\ 2)$
$x^2 + 4 = 9 \Rightarrow x = -\sqrt{5} \ (x < 0)$ 이므로 $B(-\sqrt{5},\ 2)$
$\angle COA = \alpha$, $\angle COB = \beta$
삼각함수의 정의에 의해서
$(\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x})$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\sin\alpha \times \cos\beta = -\frac{2}{3}$ 이다.

답 ⑤

Tip 삼각함수의 정의로 푸는 것이 낯설었다면
아래강의를 참고하도록 하자.

삼각함수의 정의 (8분)
t1 043번 해설강의
https://youtu.be/qK-bUKw3YA4

Theme 16 삼각함수 사이의 관계

41. ④

037

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \frac{49}{25} \Rightarrow \sqrt{(\sin\theta - \cos\theta)^2} = \frac{7}{5}$

$\Rightarrow |\sin\theta - \cos\theta| = \frac{7}{5}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0 \Rightarrow \sin\theta - \cos\theta > 0$

따라서 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{7}{5}$

답 ④

42. ①

040

$\frac{\sin\theta}{1 - \sin\theta} - \frac{\sin\theta}{1 + \sin\theta} = 4$

$\Rightarrow \sin\theta(1 + \sin\theta) - \sin\theta(1 - \sin\theta) = 4(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$

$\Rightarrow \sin\theta + \sin^2\theta - \sin\theta + \sin^2\theta = 4 - 4\sin^2\theta$

$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이고 $\cos^2\theta = \frac{1}{3}$ 이므로

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

답 ①

43. ①

041

$\tan\theta - \frac{6}{\tan\theta} = 1$

$\Rightarrow \tan^2\theta - \tan\theta - 6 = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta - 3)(\tan\theta + 2) = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = 3 \ \left(\because\ \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \tan\theta > 0\right)$

θ는 제3사분면의 각이고 $\tan\theta = 3$이므로

core 해석법을 쓰면 $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ 이다.

따라서 $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{10}} = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 이다.

답 ①

44. ④

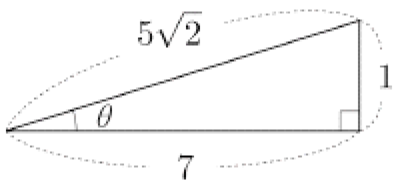
055

$\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta \Rightarrow -\sin\theta=\frac{1}{7}\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{7} \Rightarrow \tan\theta=-\frac{1}{7}$

Core 해석법으로 접근해보자.

우선 θ가 예각이라고 생각하고 직각삼각형을 그린 후 $\tan\theta=\frac{1}{7}$가 되도록 적절히 변의 길이를 설정한다.



$\sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}$인데 $\cos\theta<0$이고, $\tan\theta<0$이므로 θ는 제 2사분면각이다. 즉, $\sin\theta>0$이다.

따라서 $\sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$이다.

답 ④

45. ④

5. $\sin\theta<0$이고 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{5}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

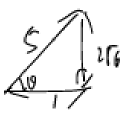
① $-3\sqrt{6}$ ② $-2\sqrt{6}$ ③ 0

④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

$-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{5}$

$-\cos\theta=\frac{1}{5}$

$\cos\theta=-\frac{1}{5}$



$\sin\theta<0$
$\cos\theta<0$ 3사분면 →

$\tan\theta=2\sqrt{6}$

s	all
t	c

Theme 17 삼각함수의 방정식과 부등식

46. 15

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식을 만족시키는 실수의 값의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

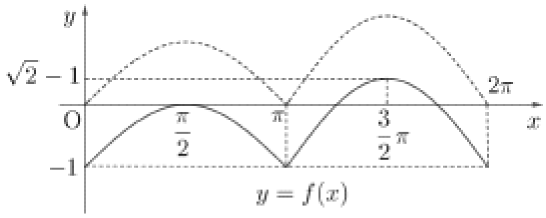
$0\le x<\pi$에서 함수 $y=\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=\sin x-1$의 최댓값은 0이고, 최솟값은 -1이다.

$\pi\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 최댓값은 $\sqrt{2}-1$, 최솟값은 -1이다.

그러므로 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(t)$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이다.

그러므로 $f(t)=-1$ 또는 $f(t)=0$이다.

(i) $f(t)=-1$일 때,

$t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

(ii) $f(t)=0$일 때,

$t=\frac{\pi}{2}$ 또는

$-\sqrt{2}\sin t-1=0(\pi \le t \le 2\pi)$

$-\sqrt{2}\sin t-1=0$에서 $\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi \le t \le 2\pi$이므로 $t=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 모든 t의 값의 합은

$0+\pi+2\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{13}{2}\pi$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$p+q=15$

정답 15

[참고]

함수

$y=-\sqrt{2}\sin x-1(\pi \le x \le 2\pi)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점은 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로 방정식

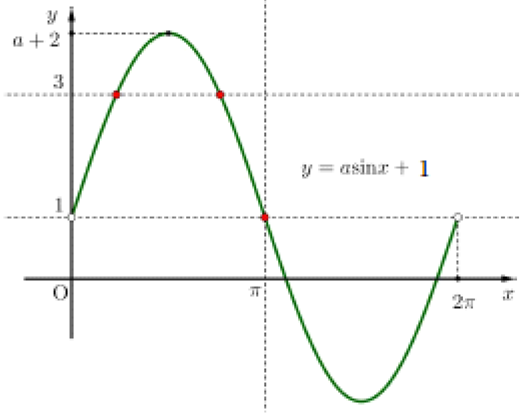
$-\sqrt{2}\sin x-1=0(\pi \le x \le 2\pi)$의 두 실근의 합은 3π이다.

47. 24

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 두 자연수의 합의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $b=1$인 경우



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면

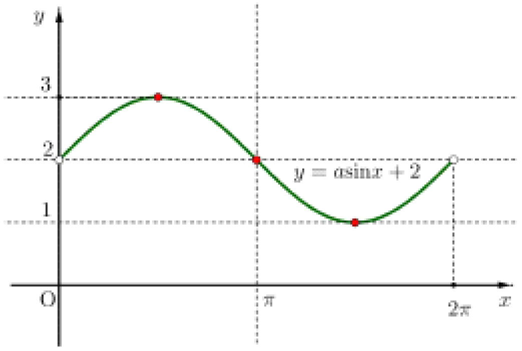
$a+1>3$, 즉 $a>2$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,1)$, $(4,1)$, $(5,1)$

이다.

(ii) $b=2$인 경우



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면

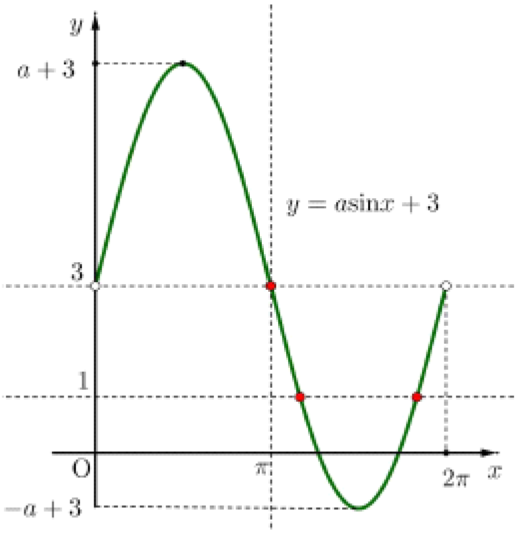
$a=1$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2)$

이다.

(iii) $b=3$인 경우



$n(A \cup B \cup C)=3$을 만족시키려면

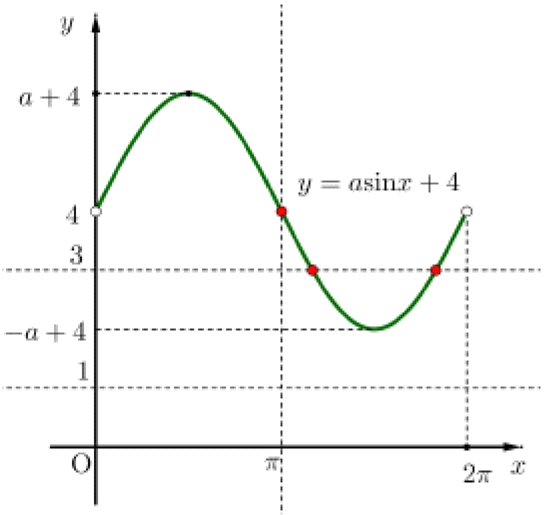
$-a+3<1$, 즉 $a>2$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 3)$, $(4,\ 3)$, $(5,3)$

이다.

(iv) $b=4$인 경우



$n(A \cup B \cup C)=3$을 만족시키려면

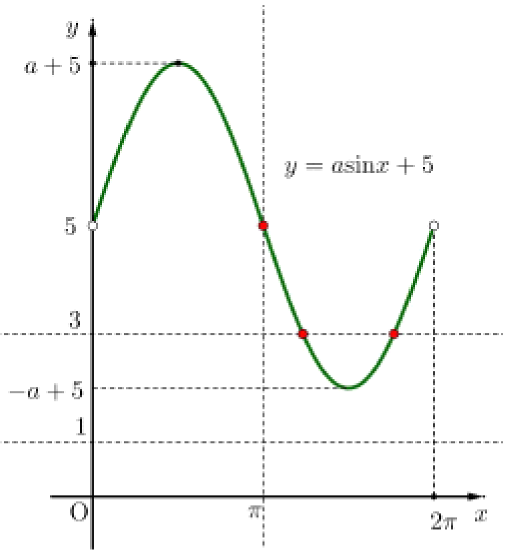
$1< -a+4<3$, 즉 $1<a<3$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 4)$

이다.

(v) $b=5$인 경우



$n(A \cup B \cup C)=3$을 만족시키려면

$1< -a+5<3$, 즉 $2<a<4$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 5)$

이다.

이상에서 $a+b$의 최댓값과 최솟값은 각각

$M=8$, $m=3$

이므로

$M \times m=24$

정답 24

48. 32

070

$f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$ 이므로

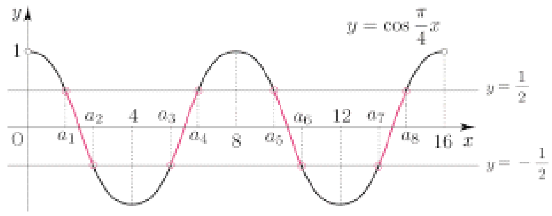
$f(2+x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$

$f(2-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$

$f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{4}x-\frac{1}{4}<0$

$\Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{4}x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}x+\frac{1}{2}\right)<0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2}$



$\cos\frac{\pi}{4}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}a_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

$\cos\frac{\pi}{4}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}a_2 = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow a_2 = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

(만약 위 풀이가 이해가 잘 되지 않는다면
046번 해설에서 배운 실전적인 방법을 정독하고
오도록 하자.)

대칭성에 의하여

$a_2 + a_3 = 2 \times 4 \Rightarrow a_3 = \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$

$a_1 + a_4 = 2 \times 4 \Rightarrow a_4 = \frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3}$

주기성에 의해서

$a_5 = a_1 + 8 = 9 + \frac{1}{3}$, $a_6 = a_2 + 8 = 10 + \frac{2}{3}$

$a_7 = a_3 + 8 = 13 + \frac{1}{3}$, $a_8 = a_4 + 8 = 14 + \frac{2}{3}$

$0 < x < 16$에서 부등식 $-\frac{1}{2} < \cos\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2}$를 만족시키는
x의 범위는 다음과 같다.

$1 + \frac{1}{3} < x < 2 + \frac{2}{3}$ or $5 + \frac{1}{3} < x < 6 + \frac{2}{3}$
or $9 + \frac{1}{3} < x < 10 + \frac{2}{3}$ or $13 + \frac{1}{3} < 14 + \frac{2}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은
$2 + 6 + 10 + 14 = 32$이다.

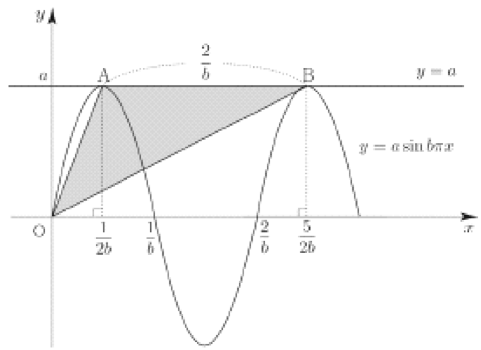
답 32

49. ③

078

$y = a\sin b\pi x \left(0 \le x \le \frac{3}{b}\right)$

곡선 $y = a\sin b\pi x \left(0 \le x \le \frac{3}{b}\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$



삼각형 OAB의 넓이 $= \frac{1}{2} \times a \times \frac{2}{b} = \frac{a}{b} = 5 \Rightarrow a = 5b$ ⋯ ㉠

직선 OA의 기울기 $= \dfrac{a}{\frac{1}{2b}} = 2ab$

직선 OB의 기울기 $= \dfrac{a}{\frac{5}{2b}} = \dfrac{2ab}{5}$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$2ab \times \frac{2ab}{5} = \frac{4}{5}a^2b^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2b^2 = \frac{25}{16}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$25b^4 = \frac{25}{16} \Rightarrow b^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

㉠에 의해 $a = \frac{5}{2}$

따라서 $a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$이다.

답 ③

50. ③

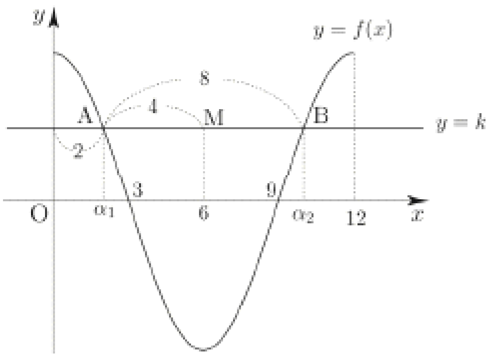
081

$y=f(x)$의 주기는 12

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을

A, B라 하고, 두 점 A, B의 중점을 M이라 하자.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α_1, α_2 $(\alpha_1<\alpha_2)$라 하자.



$|\alpha_1-\alpha_2|=8$이므로 대칭성에 의해서 $\overline{AM}=4$이고,

점 M의 x좌표가 6이므로 $\alpha_1=6-4=2$이다.

점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=k \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}=k \Rightarrow k=\frac{1}{2}$이다.

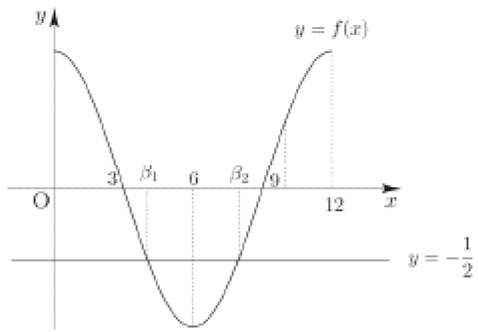
곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$가 만나는 두 점의

x좌표는 방정식 $g(x)=\frac{1}{2}$의 근과 같다.

$g(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow -3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$

이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{2}$이 만나는

두 점의 x좌표는 β_1, β_2 $(\beta_1<\beta_2)$이다.



$\cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi\beta_1}{6}=\frac{2}{3}\pi \Rightarrow \beta_1=4$

(만약 위 풀이가 이해가 잘되지 않는다면 046번 해설에서 배운 실전적인 방법을 정독하고 오도록 하자.)

대칭성에 의해서 $2\times6=\beta_1+\beta_2 \Rightarrow \beta_2=12-\beta_1=8$이다.

따라서 $|\beta_1-\beta_2|=4$이다.

답 ③

51. ①

096

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times5=\frac{15}{2} \Rightarrow \overline{AB}=3$

$\overline{BC}=\overline{AB}+6$이므로 $\overline{BC}=9$

$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1$ $\left(0\le x\le\frac{5}{2}b\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이므로

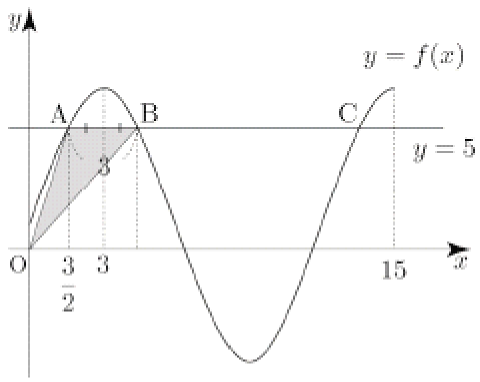
$2b=\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=3+9=12 \Rightarrow b=6$

$f(x)=a\sin\frac{\pi}{6}x+1$ $(0\le x\le15)$

선분 AB의 중점의 x좌표는 $f(x)$의 주기의 $\frac{1}{4}$이므로 3이다.

이때, $\overline{AB}=3$이므로 대칭성에 의해서 점 A의 x좌표는

$3-\frac{\overline{AB}}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$이다.



즉, $A\left(\frac{3}{2},\ 5\right)$이고 점 A는 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=5 \Rightarrow a\sin\frac{\pi}{4}+1=5 \Rightarrow a=4\sqrt{2}$

따라서 $a^2+b^2=32+36=68$이다.

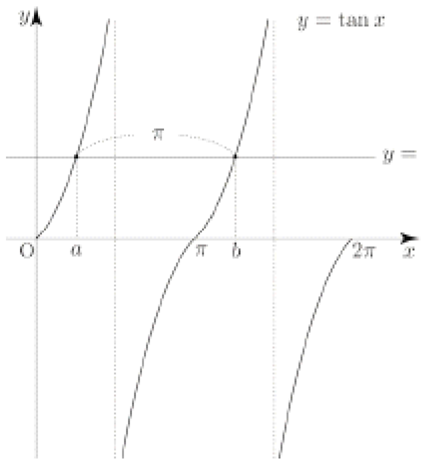
답 ①

52. ③

097

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b $(a<b)$라 하면
방정식 $f(x)=g(x)$ $(0\le x\le 2\pi)$의 두 실근은 a, b이다.

$f(x)=g(x) \Rightarrow k\sin x=\cos x \Rightarrow \tan x=\frac{1}{k}$



즉, 방정식 $\tan x=\frac{1}{k}$ $(0\le x\le 2\pi)$의 두 실근은 a, b이고
$\tan x$의 주기가 π이므로 $b=a+\pi$이다.

$A(a,\ \cos a),\ B(a+\pi,\ \cos(a+\pi))$
$\Rightarrow A(a,\ \cos a),\ B(a+\pi,\ -\cos a)$

선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점이 C이므로

$\frac{A-3B}{1-3}=C \Rightarrow \frac{A-3B}{-2}=C$

$C\left(\frac{a-3(a+\pi)}{-2},\ \frac{\cos a-3(-\cos a)}{-2}\right)$

$\Rightarrow C\left(a+\frac{3}{2}\pi,\ -2\cos a\right)$

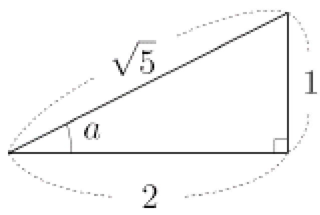
점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$-2\cos a=k\sin\left(a+\frac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow -2\cos a=k\times(-\cos a)$

$\Rightarrow k=2$

즉, $\tan a=\frac{1}{2}$

Core 해석법으로 접근해보자.

우선 a가 예각이라고 생각하고 직각삼각형을 그린 후
$\tan a=\frac{1}{2}$가 되도록 적절히 변의 길이를 설정한다.



a는 예각이므로 $\cos a>0,\ \sin a>0$이다.
즉, $\cos a=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \sin a=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\overline{CD}=\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\sqrt{5}$
점 B와 직선 CD 사이의 거리는
$\left(a+\frac{3}{2}\pi\right)-(a+\pi)=\frac{\pi}{2}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$이다.

답 ③

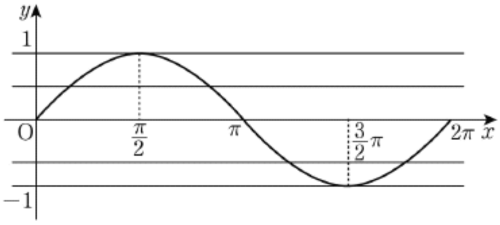
53. ④

13. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 추론한다.

(가)에서 $g(a\pi)=-1$ 또는 $g(a\pi)=1$이다.

$\sin(a\pi)=-1$에서 $a=\frac{3}{2}$, $\sin(a\pi)=1$에서 $a=\frac{1}{2}$

(나)에서 방정식 $f(g(x))=0$의 해가 존재하므로 $-1\le t\le 1$이고 $f(t)=0$인 실수 t가 존재한다.



$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $g(x)=t$의 모든 해의 합은

$t=-1$일 때 $\frac{3}{2}\pi$, $-1<t\le 0$일 때 3π,

$0<t<1$일 때 π, $t=1$일 때 $\frac{\pi}{2}$이다.

$0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합이 $\frac{5}{2}\pi$이므로 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1, α를 가지고 $0<\alpha<1$이다.

(i) $a=\frac{3}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b-\frac{1}{2}=0$ 즉, $b=\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a=\frac{1}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b+\frac{1}{2}=0$ 즉, $b=-\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이고 $f(2)=\frac{9}{2}$이다.

Theme 18 삼각함수를 포함한 최대, 최소

54. 17

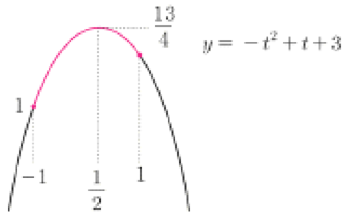
028

$f(x)=\sin^2 x-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$

$=(1-\cos^2 x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2$

$=1-\cos^2 x+\cos x+2=-\cos^2 x+\cos x+3$

$\cos x=t$라 치환하면 $y=-t^2+t+3\ (-1\le t\le 1)$



$t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{13}{4}=M$

$t=-1$일 때, 최솟값 $1=m$

따라서 $4(M+m)=4\left(\frac{13}{4}+1\right)=13+4=17$이다.

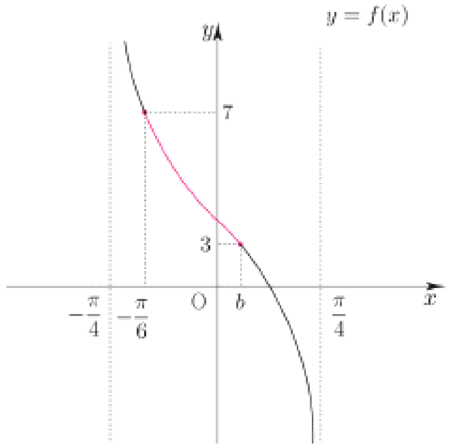
답 17

55. ③

082

$y=f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



$x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7 \Rightarrow a+3=7 \Rightarrow a=4$

$x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$4-\sqrt{3}\tan 2b=3 \Rightarrow \tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2b=\frac{\pi}{6} \Rightarrow b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$이다.

답 ③

56. ③

087

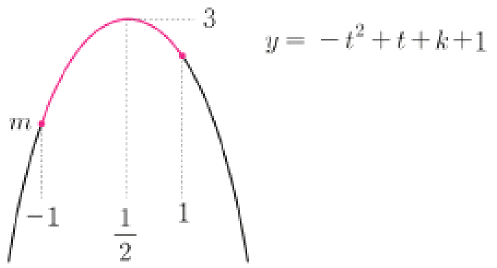
$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$x-\frac{3}{4}\pi=X$라 치환하면

$x-\frac{\pi}{4}=x-\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}=X+\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos^2X-\cos\left(X+\frac{\pi}{2}\right)+k=-\sin^2X+\sin X+k+1$

$\sin X=t$라 치환하면 $-t^2+t+k+1$ $(-1\le t\le 1)$



$t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}+k=3 \Rightarrow k=\frac{7}{4}$

$t=-1$일 때, 최솟값 $-1+k=\frac{3}{4}=m$

따라서 $k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$이다.

답 ③

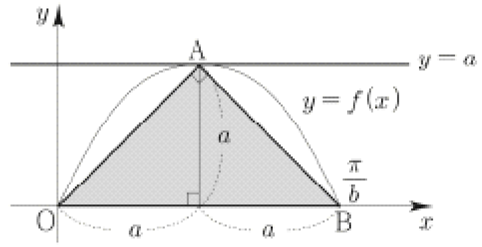
Theme 19 삼각함수의 대칭성

57. ③

077

$f(x)=a\sin bx$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{b}\right)$, $\angle OAB=\frac{\pi}{2}$

$f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$



대칭성에 의해서 $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$이고 $\overline{OA}=\overline{AB}$이므로

$\overline{OB}=\frac{\pi}{b}=2a \Rightarrow b=\frac{\pi}{2a}$

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times a\times 2a=a^2=4$이므로

$a=2$ $(a>0)$

따라서 $a+b=2+\frac{\pi}{4}$이다.

답 ③

58. ③

085

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}\ \left(-\frac{a}{2}<x\le a,\ x\ne\frac{a}{2}\right)$$

$f(x)$의 주기는 $\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a \Rightarrow \overline{AC}=a$

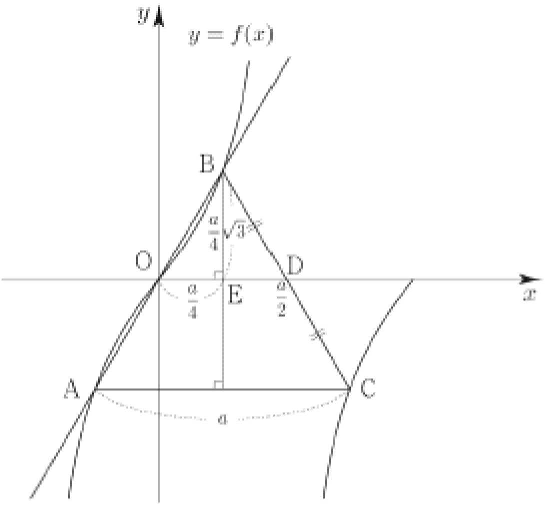
선분 BC와 x축이 만나는 교점을 D라 하고,
점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하자.
삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{BA}=\overline{BC}$이다.

대칭성에 의해 두 선분 AB, BC 중점이 각각 O, D 이므로 $\overline{AC}:\overline{OD}=2:1$이다.

즉, $\overline{OD}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{a}{2}$

$\overline{OE}=\dfrac{1}{2}\overline{OD}=\dfrac{a}{4}$

$\overline{BE}=\dfrac{a}{4}\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a}{4}\sqrt{3}$



$f\left(\dfrac{a}{4}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

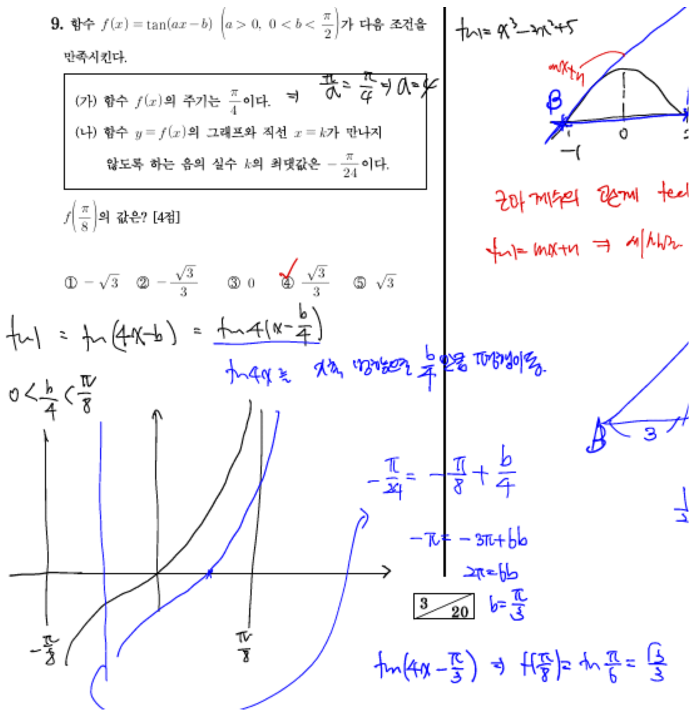
$\overline{BE}=f\left(\dfrac{a}{4}\right)$이므로 $\dfrac{a}{4}\sqrt{3}=1 \Rightarrow a=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{16}{3}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$이다.

답 ③

Theme 20 삼각함수의 평행이동

59. ④


9. 함수 $f(x)=\tan(ax-b)$ $\left(a>0,\ 0<b<\frac{\pi}{2}\right)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{4}$이다. $\Rightarrow \frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow a=4$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나지 않도록 하는 음의 실수 k의 최댓값은 $-\frac{\pi}{24}$이다.

$f\left(\frac{\pi}{8}\right)$의 값은? [4점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

$f(x)=\tan(4x-b)=\tan4\left(x-\frac{b}{4}\right)$

$\tan4x$는 x축 방향으로 $\frac{b}{4}$만큼 평행이동.

$0<\frac{b}{4}<\frac{\pi}{8}$

$-\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{8}$

$-\frac{\pi}{24}=-\frac{\pi}{8}+\frac{b}{4}$

$-\pi=-3\pi+6b$

$2\pi=6b$

$b=\frac{\pi}{3}$

$\tan\left(4x-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

60. 10

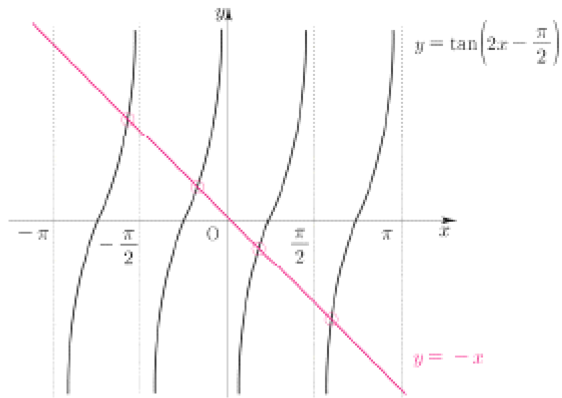
088

$y=\tan\left(nx-\dfrac{\pi}{2}\right)=\tan n\left(x-\dfrac{\pi}{2n}\right)$의 주기는 $\dfrac{\pi}{n}$이고

$y=\tan\left(nx-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan nx$의 그래프를

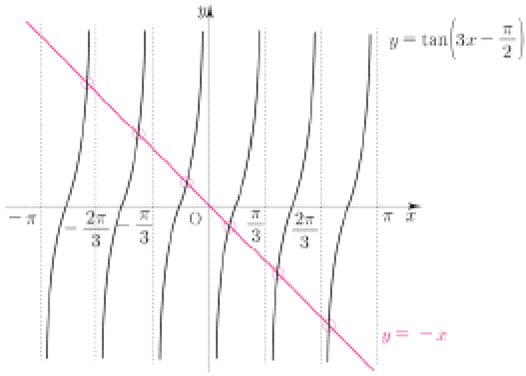
x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2n}$만큼 평행이동한 그래프이다.

① $n=2$



교점의 개수 $a_2=4$

② $n=3$



교점의 개수 $a_3=6$

따라서 $a_2+a_3=10$이다.

답 10

Theme 21 사인법칙과 코사인법칙

61. ⑤

10. 출제의도 : 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π이므로

$\pi R^2=9\pi$에서 $R=3$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

조건 (가)에서 $3\sin A=2\sin B$이므로

$$3\times\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}$$

$$b=\frac{3}{2}a \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서 $\cos B=\cos C$이므로

$$b=c \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 양수 k에 대하여 $a=2k$라 하면 $b=c=3k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(3k)^2+(3k)^2-(2k)^2}{2\times3k\times3k}=\frac{7}{9}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4}{9}\sqrt{2}$$

$\frac{a}{\sin A}=2R=2\times3=6$에서

$$a=6\sin A=6\times\frac{4}{9}\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$b=c=\frac{3}{2}a=\frac{3}{2}\times\frac{8}{3}\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{4}{9}\sqrt{2}$$

$$=\frac{64}{9}\sqrt{2}$$

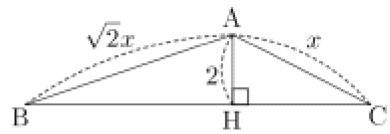
정답 ⑤

62. ①

10. 출제의도 : 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\overline{AB}:\overline{AC}=\sqrt{2}:1$이므로 $\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{AB}=\sqrt{2}x$



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 이 외접원의 넓이가 50π이므로 $\pi R^2=50\pi$에서 $R=5\sqrt{2}$

직각삼각형 AHC에서

$\sin(\angle \mathrm{ACH}) = \frac{2}{x}$, 즉 $\sin C = \frac{2}{x}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C} = 2R$, 즉 $\overline{\mathrm{AB}} = 2R\sin C$

$\sqrt{2}x = 2\times 5\sqrt{2}\times\frac{2}{x}$, $x^2 = 20$, $x = 2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}x = 2\sqrt{10}$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2}$

$= \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6$

정답 ①

63. ①

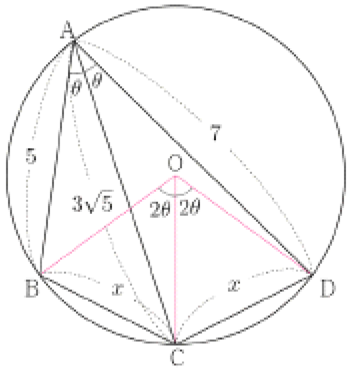
059

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CAD} = \theta$라 하자.

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CAD} \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}} \Rightarrow \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}}$

(가이드 스텝 개념 파악하기 (5) 참고)

$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}} = x$라 하자.



삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\theta = \frac{5^2 + (3\sqrt{5})^2 - x^2}{2\times 5\times 3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{70 - x^2}{30\sqrt{5}}$ $\cdots$ ㉠

삼각형 ACD에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\theta = \frac{7^2 + (3\sqrt{5})^2 - x^2}{2\times 7\times 3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{94 - x^2}{42\sqrt{5}}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\frac{70 - x^2}{30\sqrt{5}} = \frac{94 - x^2}{42\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{70 - x^2}{5} = \frac{94 - x^2}{7}$

$\Rightarrow 490 - 7x^2 = 470 - 5x^2 \Rightarrow x^2 = 10$

$\Rightarrow x = \sqrt{10}$ ($\because x > 0$)

$\cos\theta = \frac{70 - x^2}{30\sqrt{5}} = \frac{70 - 10}{30\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

이므로 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙을 사용하면

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta} = 2R \Rightarrow \sqrt{50} = 2R \Rightarrow 5\sqrt{2} = 2R$

$\Rightarrow R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 ①

64. ②

060

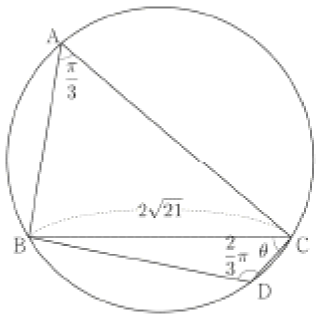
삼각형 ABC에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times2\sqrt{7} \Rightarrow \overline{BC}=2\sqrt{21}$$

사각형 ABDC가 원에 내접하므로

$$\angle BDC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

$\angle BCD=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$이다.



$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하자.

삼각형 BDC에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{x}{\sin\theta}=4\sqrt{7} \Rightarrow x=4\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=8$$

삼각형 BDC에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{8^2+y^2-(2\sqrt{21})^2}{2\times8\times y}=\frac{y^2-20}{16y}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y^2+8y-20=0 \Rightarrow (y+10)(y-2)=0$$

$$\Rightarrow y=2\ (\because\ y>0)$$

따라서 $\overline{BD}+\overline{CD}=x+y=8+2=10$이다.

답 ②

65. ③

064

$\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$, $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$

$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{8}$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos\theta=\frac{4^2+5^2-(\overline{BC})^2}{2\times4\times5}=\frac{41-(\overline{BC})^2}{40}=\frac{1}{8}$$

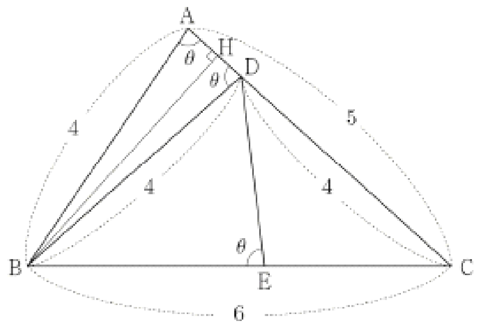
$$\Rightarrow 41-(\overline{BC})^2=5 \Rightarrow \overline{BC}=6$$

점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB}=\overline{BD}=4$인 이등변삼각형 ABD에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{DH}}{4}=\frac{1}{8} \Rightarrow \overline{DH}=\frac{1}{2}\text{이므로}$$

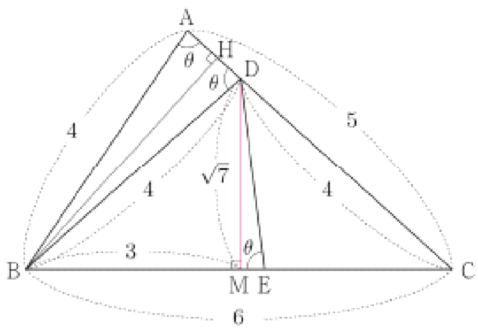
$$\overline{AD}=2\overline{DH}=1 \Rightarrow \overline{DC}=\overline{AC}-\overline{AD}=4$$



점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하자.

삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로 $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$이다.

$\overline{DM}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$



$\cos\theta=\frac{1}{8} \Rightarrow \sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$이므로

삼각형 DME에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{DM}}{\overline{DE}}=\frac{\sqrt{7}}{\overline{DE}}=\frac{3\sqrt{7}}{8} \Rightarrow \overline{DE}=\frac{8}{3}$$

따라서 선분 DE의 길이는 $\frac{8}{3}$이다.

답 ③

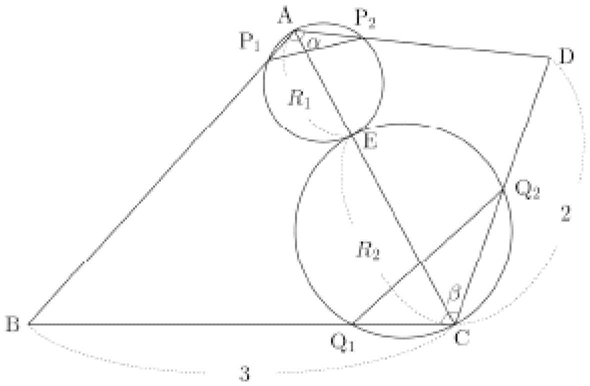
66. ①

067

$\angle P_1AP_2=\alpha$, $\angle Q_1CQ_2=\beta$라 하고,

$\overline{AE}=2R_1$, $\overline{CE}=2R_2$라 하자.

$\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, $\alpha>\frac{\pi}{2}$



삼각형 AP_1P_2에서 사인법칙을 사용하면

$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin\alpha}=2R_1 \Rightarrow \overline{P_1P_2}=2R_1\sin\alpha$

삼각형 CQ_1Q_2에서 사인법칙을 사용하면

$\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin\beta}=2R_2 \Rightarrow \overline{Q_1Q_2}=2R_2\sin\beta$

선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이 E이므로

$R_2=2R_1$이고, $\overline{Q_1Q_2}=4R_1\sin\beta$이다.

$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}\,\overline{P_1P_2}=3\overline{Q_1Q_2}$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}\times2R_1\sin\alpha=3\times4R_1\sin\beta$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}\sin\alpha=6\sin\beta$

$\cos\beta=-\frac{1}{3}$이므로 $\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

즉, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 사용하면

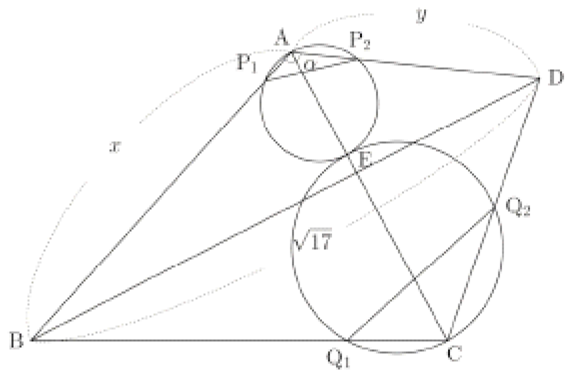
$\cos\beta=\frac{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{CD}}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3}=\frac{3^2+2^2-\overline{BD}^2}{2\times3\times2}$

$\Rightarrow -4=13-\overline{BD}^2$

$\Rightarrow \overline{BD}=\sqrt{17}$

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$라 하자.



삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\alpha=2 \Rightarrow \frac{1}{2}xy\times\frac{4}{5}=2 \Rightarrow xy=5$

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$이고, $\alpha>\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$

$\Rightarrow -\frac{3}{5}=\frac{x^2+y^2-(\sqrt{17})^2}{2\times x\times y}$

$\Rightarrow -\frac{6}{5}xy=(x+y)^2-2xy-17$

$\Rightarrow 21=(x+y)^2 \Rightarrow x+y=\sqrt{21}$

따라서 $\overline{AB}+\overline{AD}=\sqrt{21}$이다.

답 ①

67. ⑤

13. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

삼각형 ABE 와 삼각형 DCE 는 서로 닮음이고

$\overline{AB}:\overline{DC}=1:2$ 이므로 $\overline{BE}:\overline{CE}=1:2$ 이다.

삼각형 BEC 에서 $\overline{BE}=k\,(k>0)$이라 하면 $\overline{CE}=2k$

원주각의 성질에 의하여 $\angle BDC=\angle BAC=\alpha$ 이므로

$\angle BEC=\alpha+\beta$

삼각형 BEC 에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{30})^2=k^2+4k^2-2\times k\times 2k\times\left(-\dfrac{5}{12}\right),\ k^2=18$

$k>0$ 이므로 $k=3\sqrt{2},\ \overline{BE}=3\sqrt{2}$

$\overline{AE}=t\,(t>0)$ 이라 하면 삼각형 ABE 에서

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $t^2+4^2>(3\sqrt{2})^2,\ t>\sqrt{2}$

$\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{12}$

삼각형 ABE 에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=t^2+(3\sqrt{2})^2-2\times t\times 3\sqrt{2}\times\dfrac{5}{12}$

$2t^2-5\sqrt{2}t+4=0$

$(2t-\sqrt{2})(t-2\sqrt{2})=0$

$t>\sqrt{2}$ 이므로 $t=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 선분 AE 의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

68. 20

| 출제의도 |

① 코사인법칙을 이용하여 선분 AC의 길이를 구할 수 있는가?

② 사인법칙과 $3R_1=2R_2$을 통해 선분 BE의 길이를 구할 수 있는가?

③ 코사인법칙을 이용하여 선분 AE의 길이를 구할 수 있는가?

해설강의

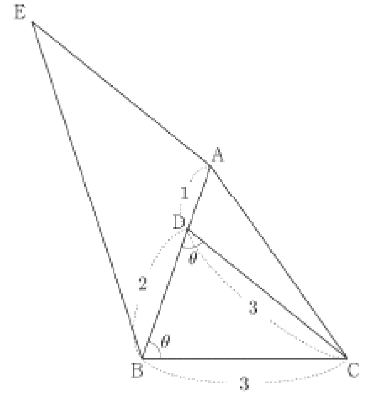
$\angle ABC=\angle BDC$이므로 삼각형 BCD는 $\overline{BC}=\overline{CD}=3$인 이등변삼각형이겠죠?

점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 해봅시다~

$\angle ABC=\angle BDC=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이므로 $\overline{BH}=3\cos\theta=1$이고,

$\overline{BD}=2\overline{BH}=2$가 되겠군요~

$\overline{BD}=2$이고, 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 D이므로 $\overline{AD}=1$가 되겠죠?

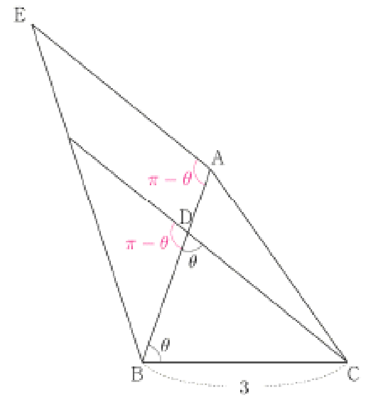


삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\theta=\dfrac{(\overline{BA})^2+(\overline{BC})^2-(\overline{AC})^2}{2\times\overline{BA}\times\overline{BC}}=\dfrac{18-(\overline{AC})^2}{18}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow(\overline{AC})^2=12\Rightarrow\overline{AC}=2\sqrt{3}$

직선 AE와 직선 CD는 서로 평행하니 $\angle BAE=\pi-\theta$가 되겠군요~



이제 $3R_1=2R_2$ 조건을 이용하여 선분 BE의 길이를 구해봅시다~

외접원을 물어보았으니 사인법칙을 이용하면 되겠죠?

삼각형 ABC에서 사인법칙을 사용하면 $\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R_1 \Rightarrow R_1=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$

삼각형 ABE에서 사인법칙을 사용하면 $\frac{\overline{BE}}{\sin(\pi-\theta)}=2R_2 \Rightarrow R_2=\frac{\overline{BE}}{2\sin\theta}$

$3R_1=2R_2$이므로 $\overline{BE}=3\sqrt{3}$이 되겠군요~

$\overline{AE}=x$라 두고, 삼각형 ABE에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{(\overline{AE})^2+(\overline{AB})^2-(\overline{BE})^2}{2\times\overline{AE}\times\overline{AB}}=\frac{x^2-18}{6x}=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x^2+2x-18=0 \Rightarrow x=-1+\sqrt{19}$ $(\because x>0)$

$a=19$, $b=1$이므로 $a+b=20$이 되겠군요~~

답 20

출제자의 한마디

풀면서 [1]2022학년도 6월 평가원 12번 문제가 떠오르셨나요? ㅎㅎ
평행조건을 이용한 문제를 만들어보고 싶었습니다. 평행조건이 나오면
항상 동위각과 엇각을 체크해줘야겠죠? 도형문제들은 아는 것들을 도형에 직접
표시해야만 문제를 풀 실마리가 보일 확률이 크기 때문에 머릿속에서만
생각하지 말고 꼭! 표시합시다!

69. 26

077

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.
삼각형 ABC에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}=2R \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\overline{AC}}{2R}$$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하자.

삼각형 ACD에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\beta}=2r \Rightarrow \sin\beta=\frac{\overline{AC}}{2r}$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{\overline{AC}}{2r}}{\frac{\overline{AC}}{2R}}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{3}{2}$$

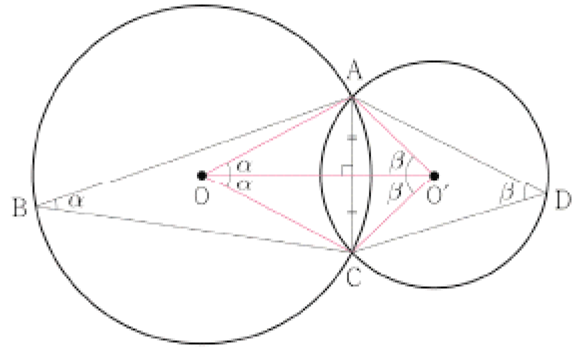
$R=3x$, $r=2x$라 하자.

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한
중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$과 같으므로
$\angle AOC=2\alpha$, $\angle AO'C=2\beta$이다.

선분 OO'는 선분 AC를 수직이등분하므로

$$\angle AOO'=\frac{1}{2}\times\angle AOC=\frac{1}{2}\times 2\alpha=\alpha$$

$$\angle AO'O=\frac{1}{2}\times\angle AO'C=\frac{1}{2}\times 2\beta=\beta$$



$\angle OAO'=\pi-(\alpha+\beta)$이므로
삼각형 AOO'에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=\frac{R^2+r^2-(\overline{OO'})^2}{2\times R\times r}$$

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$, $\overline{OO'}=1$, $R=3x$, $r=2x$ 이므로

$$\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=\frac{R^2+r^2-(\overline{OO'})^2}{2\times R\times r}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}=\frac{9x^2+4x^2-1}{12x^2}$$

$$\Rightarrow -4x^2=13x^2-1$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{17}$$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $R^2\pi=9x^2\pi=\frac{9}{17}\pi$이므로
$p+q=26$이다.

답 26

3. 수열

Theme 22 등차수열과 등비수열

70. ⑤

5. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$이다.

$\frac{a_3a_8}{a_6}=12$에서 $\frac{ar^2\times ar^7}{ar^5}=12$, $ar^4=12$

즉, $a_5=12$

$a_5+a_7=36$에서 $a_7=24$이므로

$r^2=\frac{a_7}{a_5}=\frac{24}{12}=2$

$\frac{a_{11}}{a_7}=r^4=(r^2)^2=2^2=4$이므로

$a_{11}=a_7\times4=24\times4=96$

정답 ⑤

71. ⑤

060

$d=$ 자연수, $r=$ 자연수, $a_6=b_6=9$

$a_7=b_7 \Rightarrow a_6+d=rb_6 \Rightarrow 9+d=9r \Rightarrow 1+\frac{d}{9}=r$

r과 d가 자연수이므로 d는 9의 배수이다.

$94<a_{11}<109 \Rightarrow 94<a_6+5d<109$

$\Rightarrow 94<9+5d<109 \Rightarrow 17<d<20$

$\therefore d=18 \Rightarrow r=3$

따라서 $a_7+b_8=a_6+d+r^2b_6=9+18+81=108$이다.

답 ⑤

72. 7

064

$S_k=\frac{k\{2a+(k-1)2\}}{2}=-16$

$\Rightarrow k\{a+(k-1)\}=-16$

$\Rightarrow a+k-1=-\frac{16}{k}$

$\Rightarrow a=-k+1-\frac{16}{k}$ ⋯ ㉠

$S_{k+2}=\frac{(k+2)\{2a+(k+1)2\}}{2}=-12$

$\Rightarrow (k+2)\{a+(k+1)\}=-12$

$\Rightarrow a+k+1=-\frac{12}{k+2}$

$\Rightarrow a=-k-1-\frac{12}{k+2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$-k+1-\frac{16}{k}=-k-1-\frac{12}{k+2}$

$\Rightarrow 1-\frac{8}{k}+\frac{6}{k+2}=0$

$\Rightarrow k(k+2)-8(k+2)+6k=0$

$\Rightarrow k^2=16$

$\Rightarrow k=4$ $(\because k>0)$

$k=4$, $d=2$, $a=-7$이므로

$a_{2k}=a_8=a+7d=-7+14=7$ 이다.

답 7

73. 9

065

$$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$$
$$=ar^n+ar^{n+1}+ar^{n+2}$$
$$=(ar+ar^2+ar^3)r^{n-1}=13\times 3^{n-1}$$

이므로 $r=3$, $ar+ar^2+ar^3=13 \Rightarrow 3a+9a+27a=13$

$$\Rightarrow 39a=13 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

따라서 $a_4=ar^3=\frac{1}{3}\times 3^3=9$이다.

답 9

Theme 23 등차수열의 합과 이차함수

74. ④

087

$a=50$, $d=-4$

$$S_n=\frac{n\{100+(n-1)(-4)\}}{2}=n(-2n+52)$$

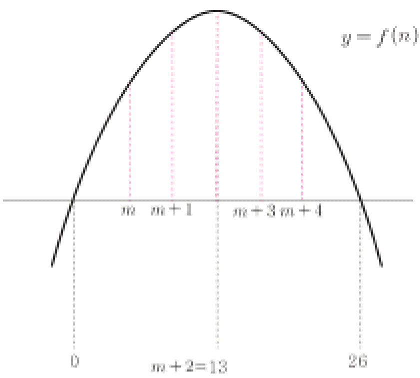
$S_n=f(n)$으로 보면 $f(n)$는 이차함수로 볼 수 있다.

$$f(n)=-2n^2+52n$$

$$\sum_{k=m}^{m+4}S_k=\sum_{k=m}^{m+4}f(k)$$

$=f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+f(m+4)$

가 최대가 되려면 이차함수의 꼭짓점의 x좌표가 $m+2$이면 된다. 이차함수의 꼭짓점의 x좌표는 13이므로 $m=11$이다.



답 ④

75. 30

079

a_n이 등차수열이므로 $S_n=An^2+Bn$이라 볼 수 있다.

$\left(\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(\frac{2a-d}{2}\right)n=An^2+Bn\right)$

S_n을 함수로 보면 $S_n=f(n)=An^2+Bn$와 같다.

즉, $f(n)$은 이차함수이다.

(가) 조건에 의하여 $A>0$이고,

$f(x)$의 대칭축은 $x=\frac{15}{2}$이므로

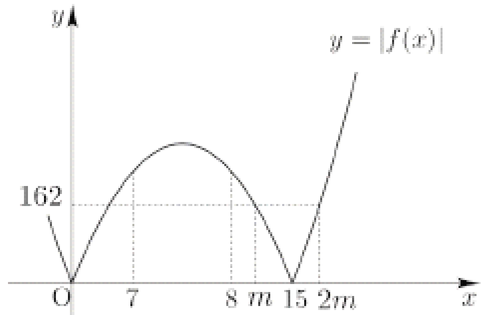
$f'\left(\frac{15}{2}\right)=0 \Rightarrow 2A\times\frac{15}{2}+B=0 \Rightarrow 15A+B=0$

$\Rightarrow B=-15A$

즉, $f(n)=An^2-15An=An(n-15)$

$|S_n|=|f(n)|$과 같으므로

$|S_m|=|S_{2m}|=162 \Rightarrow |f(m)|=|f(2m)|=162\ (m>8)$



$|f(m)|=-f(m)=-Am(m-15)$

$|f(2m)|=f(2m)=2Am(2m-15)$

$|f(m)|=|f(2m)|$

$\Rightarrow -Am(m-15)=2Am(2m-15)$

$\Rightarrow -m+15=4m-30$

$\Rightarrow 5m=45 \Rightarrow m=9$

$|f(m)|=162 \Rightarrow 54A=162 \Rightarrow A=3$

$f(n)=3n^2-45n$이므로 $S_n=3n^2-45n=3n(n-15)$

즉, $a_n=6n-45-3=6n-48$

(가이드스텝에서 $S_n=An^2+Bn$ 꼴에서 a_n을 빨리 구하는 방법에 대해 학습한 바 있었다.)

따라서 $a_{13}=78-48=30$이다.

답 30

Theme 24 $\sum$의 성질

76. 100

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n+1)^2=100,\quad \sum_{n=1}^{10}a_n(a_n+1)=60$$

$\Sigma a_n^2+2\Sigma a_n+10=100.$ $\quad$ $\Sigma a_n^2+\Sigma a_n=60$

일 때, $\sum_{n=1}^{10}(a_n-1)(a_n+5)$의 값을 구하시오. [3점]

100

$\Sigma a_n^2=A \quad \Sigma a_n=B$

$A+2B=90$

$-\ A+B=60$

$B=30. \quad A=30$

$\Sigma a_n^2+4a_n-5 \Rightarrow A+4B-50$

$30+120-50$

100

77. 22

047

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55 \Rightarrow 3\sum_{k=1}^{5}a_k+25=55 \Rightarrow \sum_{k=1}^{5}a_k=10$$

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32 \Rightarrow \sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=32 \Rightarrow \sum_{k=1}^{5}b_k=22$$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}b_k=22$이다.

답 22

78. ①

083

$$\sum_{k=1}^{30}\frac{4^{k+1}+8}{2^{k-1}}=\sum_{k=1}^{30}\frac{4^{k+1}}{2^{k-1}}+\sum_{k=1}^{30}\left\{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{30}2^{2k+2-(k-1)}+\sum_{k=1}^{30}\left\{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{30}2^{k+3}+\sum_{k=1}^{30}\left\{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}=\frac{16(2^{30}-1)}{2-1}+\frac{8\left(1-\frac{1}{2^{30}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2^{34}-16+16-2^{-26}=2^{34}-2^{-26}=2^a-2^{-b}$$

$a=34,\ b=26$

따라서 $2a+b=68+26=94$이다.

답 ①

Theme 25 부분분수

79. ⑤

043

$$S_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)=\sum_{k=1}^{10}S_k-\sum_{k=1}^{10}a_k=\left(1-\frac{1}{11}\right)-S_{10}$$

$$=1-\frac{1}{11}-\frac{1}{110}=\frac{99}{110}=\frac{9}{10}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)=\frac{9}{10}$이다.

답 ⑤

80. ④

044

$a_n = d+(n-1)d = dn$

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$
$$=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{15}\left(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_{16}}-\sqrt{a_1}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\sqrt{16d}-\sqrt{d}\right)=2$$

$\Rightarrow \sqrt{16d}-\sqrt{d}=2d \Rightarrow 4\sqrt{d}-\sqrt{d}=2d$

$\Rightarrow 3\sqrt{d}=2d \Rightarrow 9d=4d^2 \Rightarrow d=\frac{9}{4}\ (\because\ d>0)$

따라서 $a_4 = 4d = 4\times\frac{9}{4}=9$이다.

답 ④

81. ④

052

$a_1 = -4$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}-\frac{1}{n}=\frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow -\frac{n+4}{4n}=\frac{1}{a_{n+1}}$

$\Rightarrow a_{n+1}=-\frac{4n}{n+4}$

따라서 $a_{13}=-\frac{48}{16}=-3$이다.

답 ④

82. 115

036

$$\sum_{k=1}^{11}\frac{a}{4k^2-1}$$
$$=a\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=a\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{23}\right)=\frac{11}{23}a$$

$\sum_{k=1}^{11}\frac{a}{4k^2-1}$ 의 값이 자연수가 되려면 a는 23의 배수여야 한다.

따라서 100 이하의 자연수 a의 최솟값은 23, 최댓값은 92 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 115이다.

답 115

Theme 26 수열의 합과 일반항 사이의 관계

83. 58

067

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$$

$\frac{4n-3}{a_n}=b_n$이라 하면

$b_n = 4n+7-2=4n+5$이다.

$\frac{4n-3}{a_n}=4n+5 \Rightarrow a_n=\frac{4n-3}{4n+5}$이므로

$a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}=\frac{17}{41}$이다.

따라서 $p+q=58$이다.

답 58

84. 15

028

$\sum_{k=1}^{25}\frac{S_{k+1}}{S_k}=40$일 때,

$\sum_{k=1}^{25}\frac{a_{k+1}}{S_k}=\sum_{k=1}^{25}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_k}=\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}-1\right)$

$=\left(\sum_{k=1}^{25}\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)-25=40-25=15$

따라서 $\sum_{k=1}^{25}\frac{a_{k+1}}{S_k}=15$이다.

답 15

85. 20

029

$\sum_{k=1}^{n}a_k=3^{n+1}-3=S_n$

$S_n-S_{n-1}=3^{n+1}-3-(3^n-3)=3^{n+1}-3^n=3^n(3-1)$

$=2\times 3^n=a_n$

$(\text{좌변})=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{m}4\times 3^{2k}=\frac{36(9^m-1)}{9-1}=\frac{9(9^m-1)}{2}$

$=\frac{9^{m+1}-9}{2}=\frac{3^{2m+2}-9}{2}=\frac{3^{42}-9}{2}$

따라서 $m=20$이다.

답 20

86. ①

078

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$

$\frac{1}{(2n-1)a_n}=b_n$이라 하면

$b_n=2n+2-1=2n+1$이다.

$\frac{1}{(2n-1)a_n}=2n+1 \Rightarrow a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$이므로

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{10}{21}$이다.

답 ①

Theme 27 새롭게 정의된 수열의 합

87. ⑤

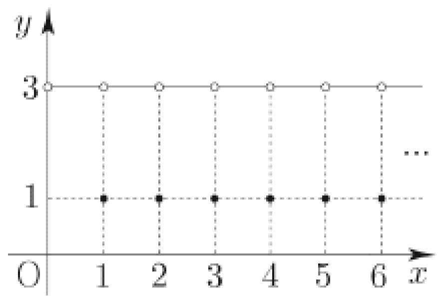
078

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases}3 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x) \Rightarrow$ 주기 1

$f(x)$를 그리면 다음과 같다.



$\sqrt{k}$가 자연수일 때, $f(\sqrt{k})=1$이고,

$\sqrt{k}$가 자연수가 아닐 때, $f(\sqrt{k})=3$이다.

$\sqrt{k}$가 자연수일 때는 다음과 같다.

$k=1 \Rightarrow \dfrac{1\times f(1)}{3}=\dfrac{1}{3}$

$k=4 \Rightarrow \dfrac{4\times f(2)}{3}=\dfrac{4}{3}$

$k=9 \Rightarrow \dfrac{9\times f(3)}{3}=\dfrac{9}{3}$

$k=16 \Rightarrow \dfrac{16\times f(4)}{3}=\dfrac{16}{3}$

$\sqrt{k}$가 자연수가 아닐 때는 다음과 같다.
$\dfrac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=\dfrac{k\times 3}{3}=k$

$\sqrt{k}$가 모두 자연수가 아니라고 가정하고 모두 더한 후
$\sqrt{k}$가 자연수일 때 $\dfrac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값을 빼주고,
원래 $\sqrt{k}$가 자연수일 때 $\dfrac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값을 더해줘서
$\sum_{k=1}^{20}\dfrac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$를 구하면 된다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=\sum_{k=1}^{20}k-(1+4+9+16)+\frac{1+4+9+16}{3}$$
$$=\frac{20\times 21}{2}-30+10=210-20=190$$

이다.

답 ⑤

88. ③

079

m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재한다는 의미는
$x^n=m^{12}$ $(m\geq 2)$를 만족시키는 정수 x가 존재한다는
의미이다.

① $m=2 \Rightarrow x^n=2^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(2)=5$이다.

② $m=3 \Rightarrow x^n=3^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(3)=5$이다.

③ $m=4 \Rightarrow x^n=4^{12}=2^{24}$

2 이상의 24의 약수는 7개이므로 $f(4)=7$이다.

④ $m=5 \Rightarrow x^n=5^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(5)=5$이다.

⑤ $m=6 \Rightarrow x^n=6^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(6)=5$이다.

⑥ $m=7 \Rightarrow x^n=7^{12}$

2 이상의 12의 약수는 5개이므로 $f(7)=5$이다.

⑦ $m=8 \Rightarrow x^n=8^{12}=2^{36}$

2 이상의 36의 약수는 8개이므로 $f(8)=8$이다.

⑧ $m=9 \Rightarrow x^n=9^{12}=3^{24}$

2 이상의 24의 약수는 7개이므로 $f(9)=7$이다.

따라서 $\sum_{m=2}^{9}f(m)=5\times 5+7\times 2+8=25+14+8=47$이다.

답 ③

89. 14

21. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = a_n + a_3$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_2 = S_3$ $\Rightarrow$ $a_1+a_2+2a_3 = a_1+a_2+4a_3 \Rightarrow a_3=0$
(나) $S_1 = 4$

$\sum_{n=4}^{17} \frac{60}{b_n a_{n+1}}$의 값을 구하시오. [4점]

14

$b_1 = a_1 + a_3 = a_1 = -3d$
$b_2 = a_2 + a_3 = a_2 = -d$
$b_3 = a_3 + a_3 = a_3 = 0$
$b_4 = a_4 + a_3 = a_4 = d$

$-3d + d = -2d = 4 \Rightarrow d = -2$

$a_n = -2n+6 = b_n$

$\sum_{n=4}^{17} \frac{60}{(-2n+6)(-2n+4)} = -2(n-3) \times -2(n-2)$

$\sum_{n=4}^{17} \frac{15}{(n-3)(n-2)} = 15\left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2}\right)$

$15\left(1 - \frac{1}{15}\right) = 14$

Theme 28 절댓값이 포함된 수열의 합

90. 25

068

$d=$정수

$a_3 + a_5 = 0 \Rightarrow a+2d+a+4d=0 \Rightarrow a+3d=0$

즉, $a_4 = 0$이다.

$a_1 = a_4 - 3d = -3d$

$a_2 = a_4 - 2d = -2d$

$a_3 = a_4 - d = -d$

$a_4 = 0$

$a_5 = a_4 + d = d$

$a_6 = a_4 + 2d = 2d$

d의 부호에 따라 case분류하면

① $d>0$ 일 때

$|a_1| = |-3d| = 3d$

$|a_2| = |-2d| = 2d$

$|a_3| = |-d| = d$

$|a_4| = 0$

$|a_5| = d$

$|a_6| = 2d$

$\sum_{k=1}^{6}(|a_k| + a_k) = 6d = 30 \Rightarrow d = 5$

d는 양의 정수이므로 조건을 만족시킨다.

② $d=0$ 일 때

$d=0$이면 모든 항이 0이므로 $\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$을 만족시키지 않는다.

③ $d<0$ 일 때

$|a_1|=|-3d|=-3d$

$|a_2|=|-2d|=-2d$

$|a_3|=|-d|=-d$

$|a_4|=0$

$|a_5|=|d|=-d$

$|a_6|=|2d|=-2d$

$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=-12d=30 \Rightarrow d=-\frac{5}{2}$

d는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

$d=5$이므로 $a_9=a_4+5d=0+25=25$이다.

답 25

91. ③

077

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이므로 $a_5<a_7$이다.

즉, $a_5<0$, $a_7>0$이다.

(나) $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

$|a_7|+|a_8|+|a_9|+|a_{10}|+|a_{11}|+|a_{12}|$

$=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|+|a_{10}|+|a_{12}|$

$\Rightarrow |a_7|+|a_9|+|a_{11}|=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|$

$\Rightarrow a_7+a_9+a_{11}=6-a_2-a_4+|a_6|$

$\Rightarrow a+18+a+24+a+30=6-a-3-a-9+|a+15|$

$\Rightarrow 5a+78=|a+15|$

a의 범위에 따라 case분류하면

① $a \geq -15$

$5a+78=a+15 \Rightarrow 4a=-63 \Rightarrow a=-\frac{63}{4}$

$-\frac{63}{4}<-15$이므로 모순이다.

② $a<-15$

$5a+78=-a-15 \Rightarrow 6a=-93 \Rightarrow a=-\frac{31}{2}$

$-\frac{31}{2}<-15$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a_{10}=a+27=-\frac{31}{2}+27=\frac{23}{2}$이다.

답 ③

Theme 29 자연수 조건을 이용하는 수열의 합

92. ②

081

첫째항이 $-45 \Rightarrow a=-45$

공차 d(d는 자연수)인 등차수열 $\{a_n\}$

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재

$|-45+(m-1)d|=|-45+(m+2)d|$

$\Rightarrow -45+(m-1)d=45-(m+2)d$ ($\because$ d는 자연수)

$\Rightarrow d(2m+1)=90$

d는 자연수이고, m은 자연수이므로 $2m+1$은 홀수이므로 가능한 case는 다음과 같다.

$(d,\ m)=(2,\ 22)$ or $(6,\ 7)$ or $(10,\ 4)$

or $(18,\ 2)$ or $(30,\ 1)$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k>-100$

(나) 조건이 성립하려면 합의 최솟값이 -100보다 크면 된다.
첫째항이 -45이고, 공차 d가 자연수이므로 항이 점점 커진다. 합의 최솟값은 마지막 음수인 항까지의 합과 같다.

(가) 조건에 의해 a_m과 a_{m+3}은 부호가 서로 반대이고 절댓값이 같다. a_n은 등차수열이므로 $a_{m+1}+a_{m+2}=0$이다.

$a_m<a_{m+1}<0<a_{m+2}<a_{m+3}$

즉, a_{m+1}이 마지막 음수이므로 합의 최솟값은

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{(m+1)(a_1+a_{m+1})}{2} = \frac{(m+1)(-90+md)}{2}$이다.

$\frac{(m+1)(-90+md)}{2} > -100$

$\Rightarrow (m+1)(-90+md) > -200$ ⋯ ㉠

$(d,\ m)=(2,\ 22)$ or $(6,\ 7)$ or $(10,\ 4)$

or $(18,\ 2)$ or $(30,\ 1)$

에서 ㉠을 만족시키는 case는 다음과 같다.

$d=18,\ m=2$ or $d=30,\ m=1$

따라서 모든 자연수 d의 값의 합은 $18+30=48$이다.

답 ②

93. 19

21. 출제의도 : 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a는 자연수이고 d는 0 이상의 정수이다.

$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a-\frac{d}{2}\right)n$

이므로

$$\sum_{k=1}^{7} S_k = \sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\}$$
$$=\frac{d}{2}\times\sum_{k=1}^{7}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\sum_{k=1}^{7}k$$
$$=\frac{d}{2}\times\frac{7\times8\times15}{6}+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\frac{7\times8}{2}$$
$$=70d+28\left(a-\frac{d}{2}\right)$$
$$=28a+56d$$

$28a+56d=644$에서

$a+2d=23$ ⋯⋯ ㉠

a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a+6d=13m$ ⋯⋯ ㉡

㉡−㉠에서 $4d=13m-23$

$4d+23+13=13m+13$

$4(d+9)=13(m+1)$

$d+9=\frac{13(m+1)}{4}$

이 값이 자연수가 되어야 하므로 $m+1$의 값은 4의 배수이어야 한다. 즉, m이 될 수 있는 값은

3, 7, 11, 15, ⋯

한편, $d=\frac{13m-23}{4}$이므로 ㉡에서

$$a=13m-6d$$
$$=13m-6\times\left(\frac{13m-23}{4}\right)$$
$$=13m-\frac{39}{2}m+\frac{69}{2}$$
$$=-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}$$

이고 이 값이 양수이어야 하므로

$-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}>0,\ m<\frac{69}{13}$

따라서 $m=3$이고 이때 $d=4$이므로

$a=23-2d=15$

이고

$a_2=a+d=15+4=19$

정답 19

Theme 30 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (순행)

94. ①

032

$a_1=2$

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2-3a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 1+a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

$a_2=\dfrac{a_1}{2-3a_1}=-\dfrac{1}{2}$

$a_3=1+a_2=\dfrac{1}{2}$

$a_4=\dfrac{a_3}{2-3a_3}=1$

$a_5=1+a_4=2$

$a_6=\dfrac{a_5}{2-3a_5}=-\dfrac{1}{2}$

$2,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1$이 반복된다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{40}a_n=10\left(2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1\right)=30$이다.

답 ①

95. ①

026

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=8,\ a_5=1,\ a_6=2,\ a_7=4,$

$a_8=8$이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}a_k=2\times(1+2+4+8)=30$이다.

답 ①

96. 33

027

$a_1=9,\ a_2=3$

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$이므로

$a_3=a_2-a_1=3-9=-6$

$a_4=a_3-a_2=-6-3=-9$

$a_5=a_4-a_3=-9+6=-3$

$a_6=a_5-a_4=-3+9=6$

$a_7=a_6-a_5=6+3=9$

$a_8=a_7-a_6=9-6=3$

$a_9=a_8-a_7=3-9=-6$

$a_{10}=a_9-a_8=-6-3=-9$

$a_{11}=a_{10}-a_9=-9+6=-3$

$9,\ 3,\ -6,\ -9,\ -3,\ 6$이 반복된다.
100을 6으로 나누면 몫이 16 나머지가 4이므로
$9,\ 3,\ -6,\ -9,\ -3,\ 6$이 16번 반복되고
$a_{97}=9,\ a_{98}=3,\ a_{99}=-6,\ a_{100}=-9$이다.

따라서 $|a_k|=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수는
$16\times2+1=33$이다.

답 33

97. 8

22. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :
조건 (나)에서
$\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$
이므로

$a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k=0$ 또는 $a_{n+1}+ka_n=0$

즉, $a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1}=-ka_n$

$a_1=k$이므로

$a_2=a_1-\frac{2}{3}k=k-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}$

또는

$a_2=-ka_1=-k\times k=-k^2$

(i) $a_2=\frac{k}{3}$일 때,

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}$

또는

$a_3=-ka_2=-k\times\frac{k}{3}=-\frac{k^2}{3}$

(i -ⓐ) $a_3=-\frac{k}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k}{3}\right)=-\frac{k^2}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k}{3}\right)=\frac{k^2}{3}$

(i -ⓐ-①) $a_4=-k$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k-\frac{2}{3}k=-\frac{5}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times(-k)=k^2$

$a_5=-\frac{5}{3}k$ 일 때,

$a_5<0$

이고,

$a_5=k^2$일 때,

$a_5>0$

이므로

$a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓐ-②) $a_4=\frac{k^2}{3}$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\frac{k^2}{3}=-\frac{k^3}{3}$

$a_5=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k-2)}{3}=0$

$k>0$이므로

$k=2$

$a_5=-\frac{k^3}{3}$일 때,

$a_5<0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓑ) $a_3=-\frac{k^2}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=-\frac{k^3}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=\frac{k^3}{3}$

(i -ⓑ-①) $a_4=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \left(-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k$$
$$= -\frac{k^2}{3} - \frac{4}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \left(-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k\right) = \frac{k^3}{3} + \frac{2}{3}k^2$$

$a_5 = -\frac{k^2}{3} - \frac{4}{3}k$일 때,

$$a_5 = -\frac{k(k+4)}{3} < 0$$

이고

$a_5 = \frac{k^3}{3} + \frac{2}{3}k^2$일 때,

$$a_5 = \frac{k^2(k+2)}{3} > 0$$

이므로 $a_5 = 0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ-ⓑ-②) $a_4 = \frac{k^3}{3}$일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \frac{k^3}{3} = -\frac{k^4}{3}$$

$a_5 = \frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k$일 때,

$a_5 = 0$에서

$$\frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k = 0$$

$$\frac{k(k^2-2)}{3} = 0$$

$k > 0$이므로

$k = \sqrt{2}$

$a_5 = -\frac{k^4}{3}$일 때,

$$a_5 = -\frac{k^4}{3} < 0$$

이므로 $a_5 = 0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_2 = -k^2$일 때,

$$a_3 = a_2 - \frac{2}{3}k = -k^2 - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_3 = -ka_2 = -k \times (-k^2) = k^3$$

(ⅱ-ⓐ) $a_3 = -k^2 - \frac{2}{3}k$일 때,

$$a_2 \times a_3 = -k^2 \times \left(-k^2 - \frac{2}{3}k\right) = k^2\left(k^2 + \frac{2}{3}k\right) > 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ-ⓑ) $a_3 = k^3$일 때,

$$a_2 \times a_3 = -k^2 \times k^3 = -k^5 < 0$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_3 = k^3$이므로

$$a_4 = a_3 - \frac{2}{3}k = k^3 - \frac{2}{3}k$$

또는

$$a_4 = -ka_3 = -k \times k^3 = -k^4$$

(ⅱ-ⓑ-①) $a_4 = k^3 - \frac{2}{3}k$일 때,

$$a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k = \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k = k^3 - \frac{4}{3}k$$

또는

$$a_5 = -ka_4 = -k \times \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) = -k^4 + \frac{2}{3}k^2$$

$a_5 = k^3 - \frac{4}{3}k$일 때,

$a_5 = 0$에서

$$k^3 - \frac{4}{3}k = 0$$

$$k\left(k^2 - \frac{4}{3}\right) = 0$$

$k > 0$이므로

$$k = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$a_5=-k^4+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=0$에서

$-k^4+\frac{2}{3}k^2=0$

$-k^2\left(k^2-\frac{2}{3}\right)=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{\frac{2}{3}}$

(ⅱ-ⓑ-②) $a_4=-k^4$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k^4-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times(-k^4)=k^5$

$a_5=-k^4-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=-k\left(k^3+\frac{2}{3}\right)<0$

이고,

$a_5=k^5$일 때,

$a_5>0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

k의 값은 2, $\sqrt{2}$ $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$

따라서 k^2의 값의 합은

$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=8$

정답 8

98. ②

069

$a_1=k$ (k는 자연수)

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2n-k & (a_n\le 0) \\ a_n-2n-k & (a_n>0) \end{cases}$$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이려면

$a_3\ne 0,\ a_4\ne 0,\ a_5\ne 0,\ a_6\ne 0$이어야 한다.

$a_2=k-2-k=-2$

$a_3=a_2+4-k=2-k$

① $a_3<0 \Rightarrow 2-k<0 \Rightarrow k>2$

$a_4=a_3+6-k=2-k+6-k=8-2k$

①-ⅰ) $a_4<0 \Rightarrow 8-2k<0 \Rightarrow k>4$

$a_5=a_4+8-k=8-2k+8-k=16-3k$

①-ⅰ)-❶ $a_5=16-3k<0 \Rightarrow k>\frac{16}{3}$

$a_6=a_5+10-k=16-3k+10-k=26-4k$

$a_3<0,\ a_4<0,\ a_5<0$ 이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이려면 $a_6>0$이어야 한다.

$26-4k>0 \Rightarrow k<\frac{13}{2}$

즉, $\frac{16}{3}<k<\frac{13}{2}$

$\therefore\ k=6$

①-ⅰ)-❷ $a_5=16-3k>0 \Rightarrow 4<k<\frac{16}{3}$

(①-ⅰ)의 전제조건이 $k>4$임을 잊어서는 안 된다.)

$k=5$이므로

$a_6=a_5-10-k=16-3k-10-k=-14$

$a_3<0,\ a_4<0,\ a_5>0,\ a_6<0$이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$를 만족한다.

$\therefore\ k=5$

①-ⅱ) $a_4>0 \Rightarrow 8-2k>0 \Rightarrow 2<k<4$

$k=3$이므로

$a_5=a_4-8-k=2-8-3=-9$

$a_6=a_5+10-k=-9+10-3=-2$

$a_3<0,\ a_4>0,\ a_5<0,\ a_6<0$이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$를 만족한다.

$\therefore\ k=3$

② $a_3>0 \Rightarrow 2-k>0 \Rightarrow k<2 \Rightarrow k=1$

$a_3=2-k=1$

$a_4=a_3-6-k=1-6-1=-6$

$a_5=a_4+8-k=-6+8-1=1$

$a_6=a_5-10-k=1-10-1=-10$

$a_3>0,\ a_4<0,\ a_5>0,\ a_6<0$이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$를 만족시키지 않는다.

따라서 모든 k의 값의 합은 $6+5+3=14$이다.

답 ②

Theme 31 여러 가지 수열의 귀납적 정의 (역행)

99. ⑤

040

$a_{12}=\frac{1}{2}$

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

$a_{12}=\frac{1}{a_{11}}=\frac{1}{2} \Rightarrow a_{11}=2$

$a_{11}=8a_{10} \Rightarrow a_{10}=\frac{1}{4}$

$a_{10}=\frac{1}{a_9}=\frac{1}{4} \Rightarrow a_9=4$

$a_9=8a_8=4 \Rightarrow a_8=\frac{1}{2}$

$a_8=\frac{1}{a_7}=\frac{1}{2} \Rightarrow a_7=2$

$2,\ \frac{1}{4},\ 4,\ \frac{1}{2}$가 반복되므로

$a_7=2,\ a_6=\frac{1}{4},\ a_5=4,\ a_4=\frac{1}{2},\ a_3=2,\ a_2=\frac{1}{4},\ a_1=4$

이다.

따라서 $a_1+a_4=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$이다.

답 ⑤

100. ①

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2 + a_4 = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

$a_4 = \begin{cases} a_3+1 & (a_3 \text{ 홀}) \\ \frac{1}{2}a_3 & (a_3 \text{ 짝}) \end{cases}$ $a_3 = \begin{cases} a_2+1 & (a_2 \text{ 홀}) \\ \frac{1}{2}a_2 & (a_2 \text{ 짝}) \end{cases}$

① a_3 홀 → $a_2 + a_3 + 1 = 40$.

a_2 홀: $a_2 + a_2 + 2 = 40$, $2a_2 = 38 \Rightarrow a_2 = 19$

a_2 짝 → $a_2 + \frac{1}{2}a_2 + 1 = 40$. $\frac{3}{2}a_2 = 39$, $a_2 = 26$.

$a_3 = 20$ (X)

$a_2 = 19$ (X)

$a_2 = 26$, $a_3 = 13$ (O)

$a_1 = 25$ (O)

$a_1 = 52$ (O)

77.

② a_3 짝 ⇒ $a_2 + \frac{1}{2}a_3 = 40$.

a_2 홀: $a_2 + \frac{1}{2}(a_2+1) = 40$

$2a_2 + a_2 + 1 = 80 \Rightarrow 3a_2 = 79$. (X)

a_2 짝: $a_2 + \frac{1}{4}a_2 = 40$. $\frac{5}{4}a_2 = 40$, $a_2 = 32$.

$a_2 = 32$

$a_1 = 31$ (O)

$a_1 = 64$ (O)

20

$95 + 77 \rightarrow 172$

101. ③

060

(가) $a_5 = 5$

(나) $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M - m$의 값을 구하는 문제이다.

$n \geq 5$이면 a_n이 하나의 값으로 정해지므로

$\sum_{k=5}^{100} a_k = A$는 상수이다.

즉, $\sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=1}^{4} a_k + A$이므로 최댓값과 최솟값을 결정하는 것은 $\sum_{k=1}^{4} a_k$이다.

Tip a_1부터 미지수로 놓고 풀면 case가 굉장히 복잡하므로 역으로 a_5부터 출발하는 방법을 택하는게 유리하다.

$a_5 = 5 = \begin{cases} a_4 - 6 & (a_4 \geq 0) \\ -2a_4 + 3 & (a_4 < 0) \end{cases}$ 이므로

$a_4 = 11$ or $a_4 = -1$

① $a_4 = 11$일 때

$a_4 = 11 = \begin{cases} a_3 - 6 & (a_3 \geq 0) \\ -2a_3 + 3 & (a_3 < 0) \end{cases}$ 이므로

$a_3 = 17$ or $a_3 = -4$

①-(1) $a_3=17$일 때

$$a_3=17=\begin{cases} a_2-6 & (a_2\geq 0) \\ -2a_2+3 & (a_2<0) \end{cases}$$ 이므로

$a_2=23$ or $a_2=-7$

①-(1)-❶ $a_2=23$일 때

$$a_2=23=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0) \end{cases}$$ 이므로

$a_1=29$ or $a_1=-10$

①-(1)-❷ $a_2=-7$

$$a_2=-7=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0) \end{cases}$$ 를

만족시키는 a_1는 존재하지 않는다.

①-(2) $a_3=-4$일 때

$$a_3=-4=\begin{cases} a_2-6 & (a_2\geq 0) \\ -2a_2+3 & (a_2<0) \end{cases}$$ 이므로

$a_2=2$

$$a_2=2=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0) \end{cases}$$ 이므로

$a_1=8$

② $a_4=-1$일 때

$$a_4=-1=\begin{cases} a_3-6 & (a_3\geq 0) \\ -2a_3+3 & (a_3<0) \end{cases}$$ 이므로

$a_3=5$

$$a_3=5=\begin{cases} a_2-6 & (a_2\geq 0) \\ -2a_2+3 & (a_2<0) \end{cases}$$ 이므로

$a_2=11$ or $a_2=-1$

②-(1) $a_2=11$일 때

$$a_2=11=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0) \end{cases}$$ 이므로

$a_1=17$ or $a_1=-4$

②-(2) $a_2=-1$일 때

$$a_2=-1=\begin{cases} a_1-6 & (a_1\geq 0) \\ -2a_1+3 & (a_1<0) \end{cases}$$ 이므로

$a_1=5$

따라서 서로 다른 $\sum_{k=1}^{4}a_k$의 값은 다음과 같다.

ⅰ) $a_4+a_3+a_2+a_1=11+17+23+29=80$

ⅱ) $a_4+a_3+a_2+a_1=11+17+23+(-10)=41$

ⅲ) $a_4+a_3+a_2+a_1=11+(-4)+2+8=17$

ⅳ) $a_4+a_3+a_2+a_1=(-1)+5+11+17=32$

ⅴ) $a_4+a_3+a_2+a_1=(-1)+5+11+(-4)=11$

ⅵ) $a_4+a_3+a_2+a_1=(-1)+5+(-1)+5=8$

$M=80+\sum_{k=5}^{100}a_k=80+A$, $m=8+\sum_{k=5}^{100}a_k=8+A$ 이므로

$M-m=72$이다.

답 ③

102. ①

14. 정수 k와 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_6의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

> (가) $a_3=7$
> (나) $|k| \le a_1$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-n & (a_n>n) \\ a_n+k & (a_n \le n) \end{cases}$$
> 이다.

① 25　② 26　③ 27　④ 28　⑤ 29

$a_3 = 7$

$a_3=\begin{cases} a_2-2 & (a_2>2) \Rightarrow a_2=9 \\ a_2+k & (a_2\le 2) \Rightarrow a_2=7-k \end{cases}$

$a_2=\begin{cases} a_1-1 & (a_1>1) \Rightarrow a_1=10 \\ a_1+k & (a_1\le 1) \Rightarrow a_1=9-k \end{cases}$

$|k|\le 9-k \Rightarrow -9+k\le k\le 9-k$, $2k\le 9$, $k\le \frac{9}{2}$

$7-k\le 2$, $5\le k$

$a_2=\begin{cases} a_1-1 & (a_1>1) \Rightarrow a_1=8-k \ (8-k>1,\ 7>k) \\ a_1+k & (a_1\le 1) \end{cases}$

$(5\le k<7)$　$|k|\le 8-k$, $-8+k\le k\le 8-k$, $2k\le 8$, $k\le 4$

$a_1=7-2k$ $(k\ge 5)$　$7-2k\le 1$, $6\le 2k$, $3\le k$　$|k|\le 7-2k$, $-7+2k\le k\le 7-2k$, $3k\le 7$, $k\le \frac{7}{3}$

$\therefore a_1=10 \Rightarrow |k|\le 10 \Rightarrow -10\le k\le 10$

$a_4=4$, $a_5=4+k$

$a_6=\begin{cases} a_5-5 & (a_5>5) \Rightarrow a_6=k-1 \ (k>1) \\ a_5+k & (a_5\le 5) \Rightarrow a_6=4+2k \ (k\le 1) \end{cases}$

$(1<k\le 10) \Rightarrow a_6=1\sim 9$

$(-10\le k\le 1) \Rightarrow a_6=-16\sim 6$

$\therefore M=9,\ m=-16$

$9+16=25$

20

4. 함수의 극한과 연속

Theme 32 함수의 극한

103. ④

057

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3+1=4$

답 ④

104. 10

066

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=-11 \Rightarrow f(x)=x^3-11x^2+ax+b$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-11x^2+ax+b}{x-1}=-9$

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(x^3-11x^2+ax+b)=0$

$\Rightarrow 1-11+a+b=0 \Rightarrow a+b=10$

$b=10-a$를 대입하면

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-11x^2+ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-11x^2+ax+10-a}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-10x-10+a)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-10x-10+a}{1}$

$=-19+a=-9 \Rightarrow a=10$

$a=10$이면 $b=0$이므로

$f(x)=x^3-11x^2+10x$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{11}{x^2}+\dfrac{10}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{11}{x}+10\right)=10$

이다.

답 10

로피탈 정리로도 풀어보자.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-11x^2+ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-22x+a}{1}$

$=-19+a=-9 \Rightarrow a=10$

Tip $f(x)$가 3차 이상일 때는 로피탈이 압도적으로 간단하다.
물론 미분계수의 정의로도 풀 수 있지만
추후에 미분계수 파트에서 설명하겠다.

105. ③

067

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1 \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x+1}=2$

$\lim_{x\to -1}(x+1)=0 \Rightarrow \lim_{x\to -1}(x^3+ax^2+bx+c)=0$

$\Rightarrow -1+a-b+c=0$

$c=1-a+b$를 대입하면

$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2+bx+1-a+b}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\{x^2+(a-1)x+1-a+b\}}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+(a-1)x+1-a+b}{1}$

$=1-a+1+1-a+b$

$=3-2a+b=2 \Rightarrow b=2a-1$

$b=2a-1,\ c=a$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+(2a-1)x+a$

$f(1)=1+a+2a-1+a=4a$

$f(1)\le 12$이므로 $4a\le 12 \Rightarrow a\le 3$이다.

$f(2)=8+4a+4a-2+a=9a+6$이고 $a\le 3$이므로

$f(2)$의 최댓값은 33이다.

③

로피탈 정리로도 풀어보자.

$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2+bx+1-a+b}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2ax+b}{1}=3-2a+b=2 \Rightarrow b=2a-1$

Tip 문자가 3개인 방정식은 식이 3개여야 풀 수 있다.
다만 식이 2개면 한 문자로 다른 문자들을 나타낼 수 있다는 사실을 반드시 기억하고 있어야 한다.

ex $-1+a-b+c=0$, $b=2a-1$
문제에서 주어진 식은 2개이고 문자가 3개이므로 b와 c를 a로 나타낼 수 있다.

어느 정도 레벨에 도달하면 아래와 같은 사고과정을 느낄 수 있게 된다.

① 식이 두 개고 문자가 3개니까
a로 나머지 문자들을 표현할 수 있겠군
② $f(1)\le 12$로 a의 범위를 알 수 있겠군
③ a의 범위를 아니까 $f(2)$의 최댓값을 구할 수 있겠군

이는 사실 문제를 만들 때,
출제자가 느끼는 사고과정과 유사하다.

① $f(x)$를 그냥 주면 너무 쉬우니까
교과개념을 사용해서 직접 구하게 만들어야겠다.
$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\quad \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$
② $f(2)$의 최댓값을 구하게 하고 싶군.
그렇게 하려면 범위가 필요한데?
③ $f(1)\le 12$ 너로 정했다!

106. ③

075

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$

n에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $n=1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$이므로

$f(x)=4x^3+3x^2+ax+b$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$

$\lim_{x\to 0}x=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(4x^3+3x^2+ax+b)=0 \Rightarrow b=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+3x^2+ax}{x}=a=4$

$f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로 $f(1)=11$이다.

② $n=2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$이므로

$f(x)=10x^3+ax^2+bx+c$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4$

분모의 x^2이 약분되어야 하므로

함수 $f(x)$는 x^2을 인수로 가지고 있어야 한다.

즉, $f(x)=10x^3+ax^2$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{10x^3+ax^2}{x^2}=a=4$

$f(x)=10x^3+4x^2$이므로 $f(1)=14$이다.

③ $n\ge 3$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$이므로

$f(x)=6x^{n+1}+ax^n+\cdots$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$

분모의 x^n이 약분되어야 하므로

함수 $f(x)$는 x^n을 인수로 가지고 있어야 한다.

즉, $f(x)=6x^{n+1}+ax^n$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^{n+1}+ax^n}{x^n}=a=4$

$f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로 $f(1)=10$이다.

따라서 $f(1)$의 최댓값은 14이다.

③

Tip case분류는 평가원이 정말 좋아하는 사고과정 중 하나이다. 익숙해지도록 노력하자!

Theme 33 함수의 극한의 활용

107. ②

076

두 점 H, A의 x좌표를 각각 a, b라 하면
방정식 $x^2=x+t \Rightarrow x^2-x-t=0$의 두 실근이
a, b이므로 근과 계수의 관계에 의해
$a+b=1$, $ab=-t$이다.

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=1+4t$

$\Rightarrow |a-b|=\sqrt{4t+1}$

$\Rightarrow b-a=\sqrt{4t+1}$ ($\because$ $b>a$)

$\overline{\mathrm{AH}}=b-a=\sqrt{4t+1}$
대칭성에 의해서 C의 x좌표는 $-b$이므로
$\overline{\mathrm{CH}}=a-(-b)=a+b=1$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{4t+1}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{4t+1}+1}=2$$

이다.

답 ②

108. ③

11. 출제의도 : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :
점 P의 좌표를 (s, s^2)이라 하면 점 P에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선의 기울기가 $2t$가 되어야 한다.
$f(x)=x^2$이라 하면
$f'(x)=2x$
이므로

$2s=2t$
에서
$s=t$
즉, $\mathrm{P}(t, t^2)$
이때 직선 OP의 방정식은 $y=tx$이므로
$tx=2tx-1$
에서
$x=\frac{1}{t}$
즉, 점 Q의 좌표는
$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{t}, 1\right)$
따라서

$$\lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}$$

$$=2\sqrt{2}$$

정답 ③

Theme 34 함수의 연속

109. 8

005

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면
모든 실수 x에 대하여 분모 ax^2+ax+2가 0이 되어서는 안 된다.

<유의 사항>

최고차항의 계수 a가 0일 때,
방정식 $ax^2+ax+2=0$은 이차방정식이 아니므로
판별식을 쓸 수 없다.
즉, $a=0$, $a\neq0$일 때로 case분류해줘야 한다.

① $a=0$

$f(x)=\frac{2x-1}{2}$이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

② $a\neq0$

판별식 $D<0 \Rightarrow a^2-8a<0 \Rightarrow a(a-8)<0$

$\Rightarrow 0<a<8$

따라서 $0\le a<8$이므로 정수 a의 개수는 8이다.

답 8

Tip 라이트 N제 수학1 삼각함수의 그래프 해설
94번 tip에서도 해당 내용을 언급했었는데
만약 문제를 풀 때, 기억이 났다면 Good이다.

110. ④

036

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+a}{x-3} & (x\neq3)\\ b & (x=3)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$x=3$에서도 연속이다.

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+a}{x-3}=b=f(3)$$

$$\lim_{x\to3}(x-3)=0 \Rightarrow \lim_{x\to3}(x^2-5x+a)=0 \Rightarrow -6+a=0$$

$\Rightarrow a=6$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x-2)=1=b$$

따라서 $a+b=7$이다.

답 ④

111. 6

037

$$f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x\le 1) \\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x>1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}=-3+a=f(1)$$

$$\lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}-2)=0 \Rightarrow \lim_{x\to1+}(x+b)=0 \Rightarrow 1+b=0$$

$$\Rightarrow b=-1$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}+2)=4=-3+a \Rightarrow a=7$$

따라서 $a+b=6$이다.

답 6

112. ⑤

038

함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1+}|f(x)|=|-1|=1$$

$$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=|-1+a|$$

$$|f(-1)|=|-1|=1$$

$$\lim_{x\to-1+}|f(x)|=\lim_{x\to-1-}|f(x)|=|f(-1)|$$

$$\Rightarrow |-1+a|=1 \Rightarrow a=2 \ (\because\ a>0)$$

함수 $|f(x)|$는 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to3+}|f(x)|=|3b-2|$$

$$\lim_{x\to3-}|f(x)|=|3|=3$$

$$|f(3)|=|3b-2|$$

$$\lim_{x\to3+}|f(x)|=\lim_{x\to3-}|f(x)|=|f(3)|$$

$$\Rightarrow |3b-2|=3 \Rightarrow b=\frac{5}{3} \ (\because\ b>0)$$

따라서 $a+b=2+\dfrac{5}{3}=\dfrac{11}{3}$이다.

답 ⑤

113. ①

041

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (x<1) \\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\ge 1) \end{cases}$$

$$g(x)=2x^3+ax+b$$

$$f(x)g(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^3+ax+b}{x-1} & (x<1) \\ \dfrac{2x^3+ax+b}{2x+1} & (x\ge 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\frac{2x^3+ax+b}{x-1}=\frac{2+a+b}{3}=f(1)g(1)$$

$$\lim_{x\to1-}(x-1)=0 \Rightarrow \lim_{x\to1-}(2x^3+ax+b)=0 \Rightarrow 2+a+b=0$$

$$\Rightarrow b=-2-a$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{2x^3+ax-2-a}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}$$

$$=6+a=0 \ \Rightarrow a=-6,\ b=4$$

따라서 $b-a=4+6=10$이다.

답 ①

로피탈정리를 활용하여 풀어보자.

$$\lim_{x\to1-}\frac{2x^3+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{6x^2+a}{1}=6+a=0$$

$$\Rightarrow a=-6,\ b=4$$

114. ⑤

044

$$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0-}g(x)=4$$

$$\lim_{x\to0+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)-\lim_{x\to0+}g(x)=8$$

위 두식을 더하면

$$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to0-}g(x)-\lim_{x\to0+}g(x)=12$$

$\displaystyle\lim_{x\to0-}g(x)-\lim_{x\to0+}g(x)=6$이므로

$$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)+6=12$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)=6$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)=2f(0)=6 \Rightarrow f(0)=3$$

답 ⑤

115. 5

010

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$
$\Rightarrow$ 함수 $f(x)$는 주기가 4이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=0$, $x=2$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(ax+3)=3$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x^2-2ax+b)=b$

$f(0)=3$
$\Rightarrow b=3$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to -2+}f(x)=\lim_{x\to -2+}(-x^2-2ax+3)=-1+4a$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax+3)=2a+3$

$f(2)=f(-2)=-1+4a$
$\Rightarrow -1+4a=2a+3 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$
따라서 $a+b=5$이다.

답 5

Tip 위 풀이가 이해가 잘 안 된다면
아래 해설강의를 참고하도록 하자.

t1 010번 해설강의

https://youtu.be/oyDWrqmzzI8

116. ④

057

집합 $\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x$는 실수$\}$
의 원소의 개수를 $f(a)$라 한다.

$a=0$이면 이차방정식으로 해석할 수 없으므로
a에 따라 case분류하면

① $a\neq 0$

$\frac{D}{4}>0 \Rightarrow (a-2)^2+a(a-2)=(a-2)(2a-2)>0$
$\Rightarrow (a-2)(a-1)>0 \Rightarrow a<1$ or $a>2$
$a<1$ or $a>2$와 $a\neq 0$의 교집합을 나타내면
$a<0$ or $0<a<1$ or $a>2$이므로
$f(a)=2$ $(a<0$ or $0<a<1$ or $a>2)$
(이차방정식의 서로 다른 실근의 개수 $=f(a)$)

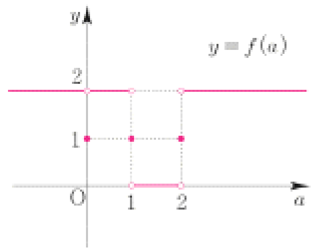
Tip 실수 포인트 !
$a\neq 0$이라는 전제조건을 잊기 쉬우니 유의하자.

$\frac{D}{4}<0 \Rightarrow (a-2)^2+a(a-2)=(a-2)(2a-2)<0$
$f(a)=0$ $(1<a<2)$

$\frac{D}{4}=0 \Rightarrow (a-2)^2+a(a-2)=(a-2)(2a-2)=0$
$f(1)=1$, $f(2)=1$

② $a=0$

$-4x+2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$
$f(0)=1$
이를 바탕으로 $y=f(a)$의 그래프를 그리면



ㄱ. $\lim_{a\to 0}f(a)=f(0)$
$x=0$에서 불연속이므로 ㄱ은 거짓이다.

ㄴ. $\lim_{a\to c+}f(a)\neq\lim_{a\to c-}f(a)$인 실수 c는 2개다.
$x=1$, $x=2$에서 극한값이 존재하지 않으므로
ㄴ은 참이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개다.
$x=0$, $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로
ㄷ은 참이다.

답 ④

117. ④

059

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

① $f(3)\neq 0$인 경우

$\lim_{x\to 3}g(x)=\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\dfrac{f(6)\{f(3)+1\}}{f(3)}$

$g(3)=\dfrac{f(6)\{f(3)+1\}}{f(3)}$

이므로 $\lim_{x\to 3}g(x)=g(3)-1$를 만족시키지 않아 모순이다.

② $f(3)=0$인 경우

$\lim_{x\to 3}g(x)=\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

Tip

x가 3으로 가까이 갈 때, $g(x)=\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

를 선택하는 것이 다소 이해가 되지 않을 수 있다.

$f(x)=0$을 만족시키는 x에 한에서만 $g(x)$의

함숫값이 3으로 확정되는 것이다.

이때, $\lim_{x\to 3}g(x)$는 $x=3$으로 가까이 가는

상황이지 $x=3$인 상황이 아니다.

따라서 $f(3)=0$이더라도

$\lim_{x\to 3}g(x)=\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$이다.

예를 들어 $f(x)=x-2$라 했을 때

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & (f(x)\neq 0)\\ 4 & (f(x)=0)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & (x\neq 2)\\ 4 & (x=2)\end{cases}$$

와 같은 맥락으로 이해하면 된다.

$g(3)=3$이므로

$\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$

극한값이 존재하는데 $\lim_{x\to 3}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 3}f(x+3)\{f(x)+1\}=0 \Rightarrow f(6)=0$

$f(3)=f(6)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x-6)(x-a)$

$\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(x+3-a)\{(x-3)(x-6)(x-a)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-a)}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{x(x+3-a)\{(x-3)(x-6)(x-a)+1\}}{(x-6)(x-a)}$

$=\dfrac{3(6-a)}{-3(3-a)}=\dfrac{6-a}{a-3}=2$

$\Rightarrow a=4$

즉, $f(x)=(x-3)(x-6)(x-4)$

$f(5)\neq 0$이므로 $g(5)=\dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$이다.

따라서 $g(5)=\dfrac{40\times(-1)}{-2}=20$이다.

답 ④

118. ③

040

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$
$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$

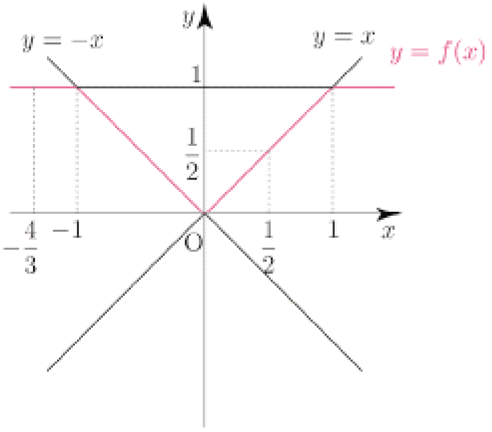
$\Rightarrow \{f(x)\}^2\{f(x)-1\}-x^2\{f(x)-1\}=0$

$\Rightarrow \{f(x)-1\}[\{f(x)\}^2-x^2]=0$

$\Rightarrow \{f(x)-1\}\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}=0$

$\Rightarrow f(x)=1$ or $f(x)=x$ or $f(x)=-x$

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고,
최솟값이 0이므로 이를 만족시키도록 교차점에서
$y=1$, $y=x$, $y=-x$ 중 $f(x)$를 선택하면 다음 그림과 같다.



$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1 \text{ or } x>1) \\ x & (0\le x\le 1) \\ -x & (-1\le x<0)\end{cases}$$

따라서 $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이다.

답 ③

5. 미분

Theme 35 평균변화율

119. 11

067

$f(x)=x^3-6x^2+5x$, $f'(x)=3x^2-12x+5$

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{64-96+20}{4}=\frac{-12}{4}=-3$

$3a^2-12a+5=-3 \Rightarrow 3a^2-12a+8=0$

$\frac{D}{4}=36-24=12>0$

$g(a)=3a^2-12a+8$라 하면 $g(0)>0$, $g(4)>0$이므로
방정식 $g(a)=0$의 서로 다른 두 실근은 0과 4사이에 존재한다.

근과 계수의 관계에 의해 $0<a<4$인 모든 실수 a의
곱은 $\frac{8}{3}$이다.

따라서 $p+q=11$이다.

답 11

120. 3

058

$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^3-3a^2+5a}{a}=a^2-3a+5$

$f'(x)=3x^2-6x+5 \Rightarrow f'(2)=5$

$a^2-3a+5=5 \Rightarrow a=3\ (\because a>0)$

답 3

Theme 36 미분계수를 이용한 극한값 계산

121. 10

027

$f(x)=x^3+2x+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$

$=2f'(1)=10$

답 10

122. 9

028

$f(x)=4x^3-ax \Rightarrow f'(x)=12x^2-a$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-1}{3h}=b$

$\lim_{h\to0}3h=0 \Rightarrow \lim_{h\to0}\{f(1+2h)-1\}=0$

$\Rightarrow \lim_{h\to0}f(1+2h)=1 \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow a=3$

($\because f(x)$는 다항함수이므로 $x=1$에서 연속)

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-1}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{3h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}f'(1)=\frac{2}{3}(12-3)$

$=6=b$

따라서 $a+b=3+6=9$이다.

답 9

$\frac{0}{0}$꼴인 것을 확인 후 로피탈의 정리를 사용하면

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-1}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{2f'(1+2h)}{3}$

$=\frac{2}{3}f'(1)=b=6$

123. 2

029

$f(x)=-x^2+6x+2 \Rightarrow f'(x)=-2x+6$

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-2h)+f(a)}{h}$

$=\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}+2\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\right\}$

$=f'(a)+2f'(a)=3f'(a)=3(-2a+6)=6$

따라서 $a=2$이다.

답 2

로피탈의 정리를 사용하면

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)+2f'(a-2h)}{1}$

$=3f'(a)=6$

Theme 37 함수의 곱의 미분법

124. 5

18. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

이므로

$f'(1)=2(a+4)+2(a+2)$

$\quad=4a+12=32$

따라서 $a=5$

정답 5

125. 28

068

$f(2)=1,\ f'(2)=2$

$g(x)=x^3f(x)$

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)=12+16=28$이다.

답 28

126. ①

075

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$

① $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$

$\lim_{x\to0}x=0 \Rightarrow \lim_{x\to0}(f(x)+g(x))=0 \Rightarrow f(0)+g(0)=0$

$J(x)=f(x)+g(x)$라 하면 $J(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{J(x)-J(0)}{x-0}=J'(0)=3$

$\Rightarrow f'(0)+g'(0)=3$

② $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$

$\lim_{x\to0}xg(x)=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to0}(f(x)+3)=0 \Rightarrow f(0)=-3,\ g(0)=3$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\frac{1}{g(x)}\right)$

$=\frac{f'(0)}{g(0)}=\frac{f'(0)}{3}=2$

$\Rightarrow f'(0)=6,\ g'(0)=-3$

$h(x)=f(x)g(x)$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=6\times3+(-3)\times(-3)=27$

이다.

답 ①

Theme 38 함수의 미분가능성

127. ④

057

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & (x<1) \\ bx+4 & (x\ge1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$x=1$에서 미분가능하다.

$x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1) \Rightarrow 1+a+b=b+4 \Rightarrow a=3$

$x=1$에서 미분가능하므로

$g(x)=x^3+3x+b,\ h(x)=bx+4$

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=h'(1)=b$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=g'(1)=6$

$b=6$

따라서 $a+b=9$이다.

답 ④

128. 76

026

$f(x)=|x-2|(x^2+ax)+x^2$

$$f(x)=\begin{cases} (x-2)(x^2+ax)+x^2 & (x\ge2) \\ -(x-2)(x^2+ax)+x^2 & (x<2) \end{cases}$$

$f'(2)=b$이므로 $x=2$에서 좌미분계수와 우미분계수가

서로 같아야 한다.

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x^2+ax)+x^2-4}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}(x^2+ax)+\lim_{x\to2+}(x+2)=4+2a+4=8+2a$

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)(x^2+ax)+x^2-4}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\{-(x^2+ax)\}+\lim_{x\to2}(x+2)=-4-2a+4=-2a$

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

이므로 $8+2a=-2a \Rightarrow 4a=-8 \Rightarrow a=-2$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4=f'(2)=b$

$f'(b-a)=f'(6)$의 값을 구하면

$x\ge2$에서 $f(x)=(x-2)(x^2-2x)+x^2$

$f'(x)=(x^2-2x)+(x-2)(2x-2)+2x$이므로

$f'(6)=(36-12)+40+12=76$이다.

답 76

★ 조금 더 실전적으로 풀어보자.

$f(x)$가 $f(x)=\begin{cases}(x-2)(x^2+ax)+x^2 & (x\geq 2)\\ -(x-2)(x^2+ax)+x^2 & (x<2)\end{cases}$

이므로

$x\geq 2$에서 $f(x)=(x-2)(x^2+ax)+x^2$

$g(x)=(x-2)(x^2+ax)+x^2$라 하면 $y=g(x)$는
다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
즉, $x=2$에서 미분가능하다.

$x=2$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$

결국 극한값 $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$를
직접 구하지 않고 $g'(2)$를 구하면 된다.

$g(x)=(x-2)(x^2+ax)+x^2$

$g'(x)=(x^2+ax)+(x-2)(2x+a)+2x$

$\Rightarrow g'(2)=4+2a+4=8+2a$

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=g'(2)=8+2a$

$x<2$에서 $f(x)=-(x-2)(x^2+ax)+x^2$.
위와 마찬가지 논리로
$h(x)=-(x-2)(x^2+ax)+x^2$라 하면

$\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=h'(2)=-2a$

$8+2a=-2a \Rightarrow 4a=-8 \Rightarrow a=-2$

Tip1 실전적인 풀이도 알고 있고 미분계수의 정의를 활용하는 정석적 풀이도 알고 있어야 한다.

Tip2 도함수의 극한과 미분계수의 관계에 대한 자세한 내용은 도함수의 활용 Master step 225번 해설에서 자세히 다루기로 하자.

129. 48

048

$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\leq 0)\\ -x & (0<x\leq 1)\\ -2x+1 & (x>1)\end{cases}$

와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$

함수 $f(x)g(x)=\begin{cases}(x+1)g(x) & (x\leq 0)\\ -xg(x) & (0<x\leq 1)\\ (-2x+1)g(x) & (x>1)\end{cases}$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $x=0$

$x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=f(0)g(0) \Rightarrow g(0)=0$

$x=0$에서 미분가능하므로

$h(x)=(x+1)g(x),\ j(x)=-xg(x)$

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=j'(0)=-g(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=h'(0)=g(0)+g'(0)=0$

즉, $g(0)=0,\ g'(0)=0$

② $x=1$

$x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$x=1$에서 미분가능하므로

$j(x)=-xg(x),\ k(x)=(-2x+1)g(x)$

$\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=k'(1)=-2g(1)-g'(1)$

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=j'(1)=-g(1)-g'(1)$

$-2g(1)-g'(1)=-g(1)-g'(1)$

즉, $g(1)=0$

$g(0)=g'(0)=g(1)=0$이므로 $g(x)=x^2(x-1)$이다.
따라서 $g(4)=16\times 3=48$이다.

답 48

Tip $f(x)$가 다항함수일 때, $f(a)=f'(a)=0$
이면 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 가져야한다.

<증명>
$f(a)=0$이므로 $f(x)=(x-a)g(x)$
$f'(x)=g(x)+(x-a)g'(x)$
$f'(a)=0$이므로 $g(a)=0$
즉, $g(x)=(x-a)h(x)$
따라서 $f(x)=(x-a)^2h(x)$이다.

130. 3

049

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & (x<2)\\ 2x-4 & (x\ge 2)\end{cases}$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k$$

아래와 같이 전개할 수 있을까?

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{2h}$$
$$=\frac{3}{2}\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}\cdots①$$
$$=2f'(2)\cdots②$$

①에서 ②가 되려면 $f'(2)$가 존재해야 한다.
즉, "$f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하다"는 전제조건이 있어야 한다.

하지만 $f(x)$는

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2,\ \lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$$
$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

이므로 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h},\ \lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$

은 순수하게 극한값 계산으로 봐야 한다.

$$\boxed{\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k}$$

i) $\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$

$2+3h=t$라 하면
$h\to0+\ \Rightarrow\ t\to2+$이므로 (합성함수로 생각)
$f(2+3h)=2(2+3h)-4=6h$

$2-h=t$라 하면
$h\to0+\ \Rightarrow\ t\to2-$이므로 (합성함수로 생각)
$f(2-h)=-(2-h)+2=h$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0+}\frac{6h-h}{2h}=\frac{5}{2}$$

ii) $\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$

$2+3h=t$ 라 하면
$h\to0-\ \Rightarrow\ t\to2-$ (합성함수로 생각)

$f(2+3h)=-(2+3h)+2=-3h$

$2-h=t$라 하면
$h\to0-\ \Rightarrow\ t\to2+$이므로 (합성함수로 생각)
$f(2-h)=2(2-h)-4=-2h$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{-3h+2h}{2h}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k$$
$$\Rightarrow\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}+k$$

따라서 $k=3$이다.

답 3

이번에는 우미분계수와 좌미분계수로 쪼개서 보는 관점에서 풀어보자.

편의상 $f'(2+)$를 $x=2$에서의 우미분계수라 하고,
$f'(2-)$를 $x=2$에서의 좌미분계수라 하자.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & (x<2)\\ 2x-4 & (x\ge 2)\end{cases}$$

$f'(2+)=2,\ f'(2-)=-1$이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{2h}$$
$$=\frac{3}{2}\left\{\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to0+}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$$
$$=\frac{3}{2}f'(2+)+\frac{1}{2}f'(2-)\ =3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

Tip $-h=t$라 하면 $h\to0+\ \Rightarrow\ t\to0-$이므로
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=\lim_{t\to0-}\frac{f(2+t)-f(2)}{t}=f'(2-)$$

마찬가지로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{2h}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to0-}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}f'(2-)+\frac{1}{2}f'(2+)\ =-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k$$

$$\Rightarrow\ \frac{5}{2}=-\frac{1}{2}+k$$

따라서 $k=3$이다.

131. 5

050

$a>0$인 상수 a

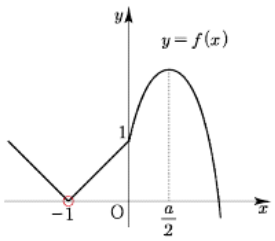
$$f(x)=\begin{cases}|x+1| & (x<0)\\ -x^2+ax+1 & (x\geq0)\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$y=-x^2+ax+1=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+1+\frac{a^2}{4}$$

$a>0\Rightarrow\frac{a}{2}>0$이므로 꼭짓점의 x좌표는 양수이다.

이를 바탕으로 $f(x)$의 그래프를 그리면



$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\neq\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$

위 조건은 우미분계수와 좌미분계수가 같지 않으므로 $x=k$에서 미분가능하지 않다는 의미이다.

$k=-1$일 때,

$\lim\limits_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\neq\lim\limits_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$이고

$\lim\limits_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\neq\lim\limits_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$를

만족시키는 실수 k의 개수가 1이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

함수 $x=0$에서 연속이므로 미분가능성만 조사하면 된다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x+1-1}{x-0}=1$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{-x^2+ax+1-1}{x-0}=a$$

$\Rightarrow a=1$

$f(x)=\begin{cases}|x+1| & (x<0)\\ -x^2+x+1 & (x\geq0)\end{cases}$ 이므로

$f(-5)f\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{5}{4}=5$이다.

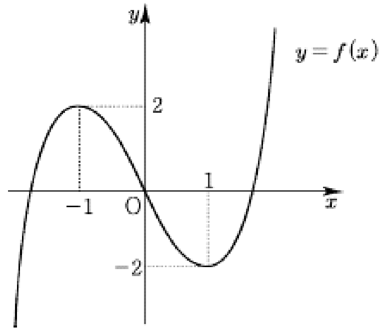
답 5

132. 15

082

$f(x)=x^3-3x,\ f'(x)=3x^2-3$

$f(x)$의 그래프를 그리면



$$g(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geq0)\\ f(x-a)+b & (x<0)\end{cases}$$

$y=f(x-a)+b$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시켜 구할 수 있다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

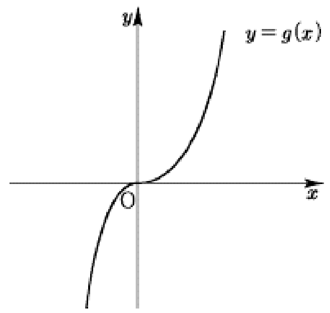
$g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 좌미분계수와 우미분계수가 같고, 우미분계수가 0이므로 $g'(0)=0$이다.

따라서 좌미분계수도 0이 되어야 한다.

이를 만족시키도록 a, b를 결정하면 2가지로 case분류할 수 있다.

① $a=1,\ b=-2$

$g(x)$를 그리면

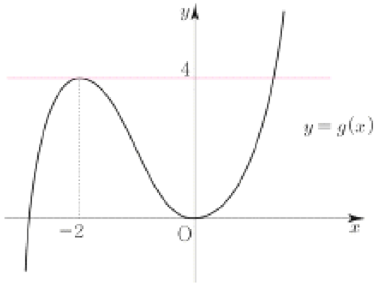


(나) 실수 t에 대하여 방정식 $g(t)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때,

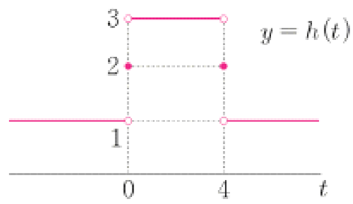
$\lim\limits_{t\to c+}h(t)+h(c)=\lim\limits_{t\to c-}h(t)$이다.

모든 실수 t에 대하여 $h(t)=1$이므로 (나)조건을 만족시키지 않는다.

② $a=-1,\ b=2$
$g(x)$를 그리면



$g(x)$를 바탕으로 $h(t)$를 그리면



$\lim\limits_{t\to 4+}h(t)+h(4)=\lim\limits_{t\to 4-}h(t)$

$\Rightarrow 1+2=3$
이므로 $c=4$일 때, $\lim\limits_{t\to c+}h(t)+h(c)=\lim\limits_{t\to c-}h(t)$

따라서 $a+2b+3c=-1+4+12=15$이다.

답 15

Theme 39 접선의 방정식 -곡선 위의 점이 주어질 때

133. 3

009

$f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x$

$f'(-1)=9,\ f'(1)=-3$이므로
$l_1:\ y=9(x+1)-2 \Rightarrow y=9x+7$
$l_2:\ y=-3(x-1) \Rightarrow y=-3x+3$

$9x+7=-3x+3 \Rightarrow 12x=-4 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

두 직선 $l_1,\ l_2$의 교점은 $\left(-\frac{1}{3},\ 4\right)=(a,\ b)$이므로
$3a+b=-1+4=3$이다.

답 3

134. 3

012

$f(x)=-2x^3+4x$라 하면
$f'(x)=-6x^2+4$
$f'(1)=-2$

수직 조건을 이용해서 접선과 수직인 직선의 방정식을 구하면
$y=\frac{1}{2}(x-1)+2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$이므로 $4ab=3$이다.

답 3

135. 22

016

$y=f(x)$가 $(1,\ 3)$을 지나므로 $f(1)=3$
$(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(1)(x-1)+3 \Rightarrow y=f'(1)x-f'(1)+3$
y절편이 5이므로 $f'(1)=-2$이다.

$g(x)=2x^2f(x)$라 하면
$g'(x)=4xf(x)+2x^2f'(x)$
$g'(1)=4f(1)+2f'(1)=12-4=8$

$(1,\ 2f(1)) \Rightarrow (1,\ 6)$에서의 접선의 방정식은
$y=8(x-1)+6 \Rightarrow y=8x-2$
접선이 $(3,\ a)$를 지나므로 $a=22$이다.

답 22

136. ⑤

11. 출제의도 : 미분계수의 정의를 이용하여 삼차함수의 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이

고 $f(0)=0$이므로
$f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)
로 놓을 수 있다.
이때
$f'(x)=3x^2+2px+q$
이다.
삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$에서
$f(a)=1$이고 $f'(a)=3$이다.
한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$
이므로
$y=3(x-a)+1$, 즉 $y=3x-3a+1$이다.
이 접선의 y절편이 4이므로
$-3a+1=4$
에서
$a=-1$
이상에서 $f(-1)=1$, $f'(-1)=3$이므로
$f(-1)=-1+p-q=1$에서
$p-q=2$ ⋯ ㉠
이고,
$f'(-1)=3-2p+q=3$에서
$2p-q=0$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$p=-2$, $q=-4$
이므로
$f(x)=x^3-2x^2-4x$
이다.
따라서 $f(1)=1-2-4=-5$

정답 ⑤

Theme 40 접선의 방정식 -기울기가 주어질 때

137. 10

020

$f(x)=x^4-2x^2+k$라 하면
$f'(x)=4x^3-4x$
$g(x)=24x-3k$라 하면
$g'(x)=24$

접점의 x좌표를 t라 하면
$f'(t)=g'(t) \Rightarrow 4t^3-4t=24 \Rightarrow t^3-t-6=0$
$\Rightarrow (t-2)(t^2+2t+3)=0 \Rightarrow t=2$

이므로 접점의 x좌표는 2이다.

$f(2)=g(2) \Rightarrow 8+k=48-3k \Rightarrow 4k=40$
$\Rightarrow k=10$

답 10

138. 16

022

$f(x)=-x^3+5x$라 하면
$f'(x)=-3x^2+5$
접점의 x좌표를 t라 하면
$-3t^2+5=-7 \Rightarrow 3t^2=12 \Rightarrow t=2$ or $t=-2$

① $t=-2$
$(-2, f(-2))$에서의 접선의 방정식은
$y=-7(x+2)-2 \Rightarrow y=-7x-16$
제 3사분면을 지나므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $t=2$
$(2, f(2))$에서의 접선의 방정식은
$y=-7(x-2)+2 \Rightarrow y=-7x+16$
제 3사분면을 지나지 않으므로 조건을 만족한다.

따라서 직선의 y절편은 16이다.

답 16

139. ②

145

$y=x^2$ 위의 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은
$y=-4(x+2)+4 \Rightarrow y=-4x-4$

직선 $y=-4x-4$가 $y=x^3+ax-2$에 접한다.
$f(x)=x^3+ax-2$라 하면
$f'(x)=3x^2+a$

접점의 x좌표를 t라 하면
$f'(t)=-4 \Rightarrow 3t^2+a=-4 \Rightarrow a=-3t^2-4$
$f(t)=-4t-4 \Rightarrow t^3+at-2=-4t-4$
$\Rightarrow at=-t^3-4t-2$

$a=-3t^2-4,\ at=-t^3-4t-2$를 연립하면
$-3t^3-4t=-t^3-4t-2 \Rightarrow 2t^3=2 \Rightarrow t=1$
$t=1$이므로 $a=-7$이다.

답 ②

training - 1step 015번 해설에서 배운
근과 계수의 관계 Technique을 적용시켜 풀어보자.

직선 $y=-4x-4$가 $y=x^3+ax-2$에 접할 때,
접점의 x좌표를 α라 하면
방정식 $-4x-4=x^3+ax-2 \Rightarrow x^3+(a+4)x+2=0$
은 α를 중근으로 갖는다. 다른 한 실근을 β라 하면

$\alpha+\alpha+\beta=2\alpha+\beta=0 \Rightarrow \beta=-2\alpha$

$2\alpha\beta+\alpha^2=a+4$

$\alpha^2\beta=-2$

$\beta=-2\alpha,\ \alpha^2\beta=-2$를 연립하면
$-2\alpha^3=-2 \Rightarrow \alpha=1$
$\alpha=1$이므로 $\beta=-2$
$2\alpha\beta+\alpha^2=a+4 \Rightarrow -4+1=a+4 \Rightarrow a=-7$

Tip <그 땐 그랬지>
썰을 풀자면 2010학년도 6월 평가원 가형은
1등급 컷이 69점인 역대 평가원 모의고사 중
극악 난이도의 시험이었다.
(필자가 재수 때 현장에서 쳤던 시험이기도 하다.)
당시 이 문제가 4번에 출제되어 1페이지를 빠르게
넘기지 못하게 하는 숨은 복병역할을 톡톡히 하였다.

Theme 41 접선의 방정식
-곡선 밖의 점이 주어질 때

140. ④

133

$f(x)=x^3-x+2$

$f'(x)=3x^2-1$
접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은 다음과 같다.
$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t+2$
접선은 $(0,\ 4)$를 지나므로
$4=(3t^2-1)(-t)+t^3-t+2 \Rightarrow 2=-2t^3 \Rightarrow t=-1$
즉, 접선의 방정식은 $y=2(x+1)+2=2x+4$이다.
따라서 접선의 x절편은 -2이다.

답 ④

141. ②

155

$f(x)=-x^3-x^2+x$

$f'(x)=-3x^2-2x+1$

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=\left(-3t^2-2t+1\right)(x-t)-t^3-t^2+t$이다.

원점을 지나므로 $(0,\ 0)$을 대입하면
$0=3t^3+2t^2-t-t^3-t^2+t$

$\Rightarrow 0=2t^3+t^2=t^2(2t+1)$

$\Rightarrow t=0$ or $t=-\dfrac{1}{2}$

① $t=0$ 일 때, $f'(0)=1$

② $t=-\dfrac{1}{2}$일 때, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$

이므로 구하고자하는 모든 직선의 기울기의 합은 $\dfrac{9}{4}$이다.

답 ②

Theme 42 접선의 방정식
-두 곡선에 동시에 접하는 접선

142. 10

032

$f(x)=x^3+ax+b,\ g(x)=3x^2+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=6x$

접점이 $(1,\ 0)$이므로

$f(1)=g(1)=0 \Rightarrow 1+a+b=0,\ c=-3$

$f'(1)=g'(1) \Rightarrow 3+a=6 \Rightarrow a=3$

이므로 $1+a+b=0,\ a=3 \Rightarrow b=-4$

따라서 $a-b-c=3+4+3=10$이다.

답 10

143. 19

033

$f(x)=-x^2+4$

$g(x)=x^2-6x+9=(x-3)^2$

의 접점을 각각 $(a,\ f(a)),\ (b,\ g(b))$라 하자.

$f'(a)=g'(b) \Rightarrow -2a=2b-6 \Rightarrow a+b=3$

$\Rightarrow b=3-a$

$f'(a)=\dfrac{g(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow -2a=\dfrac{(b-3)^2-(-a^2+4)}{b-a}$

$\Rightarrow -2a=\dfrac{a^2+a^2-4}{3-2a}$

$\Rightarrow 4a^2-6a=2a^2-4$

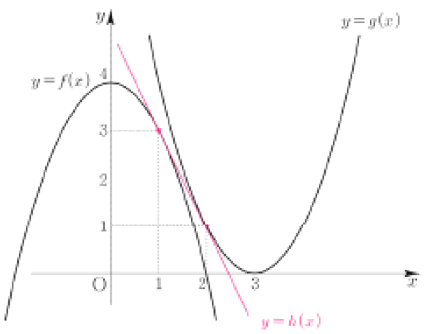
$\Rightarrow a^2-3a+2=0$

$\Rightarrow (a-1)(a-2)=0$

$\Rightarrow a=1$ or $a=2$

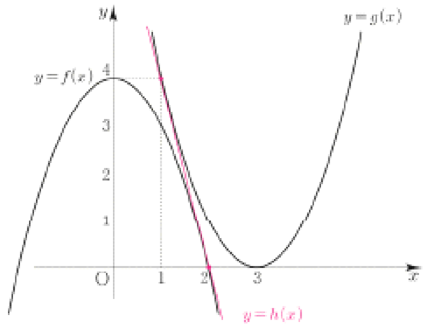
① $a=1,\ b=2$

$h(x)=-2(x-1)+3=-2x+5$



② $a=2,\ b=1$

$h(x)=-4x+8$



따라서 모든 $h(-1)$의 합은 $7+12=19$이다.

답 19

Theme 43 접선의 방정식
-교점에서의 접선

144. 90

035

$f(2)=g(2)=3$

$f'(2)\times g'(2)=-1$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2)g(2))$에서의

접선의 방정식은

$y=\{f'(2)g(2)+f(2)g'(2)\}(x-2)+f(2)g(2)$

$y=3\{f'(2)+g'(2)\}(x-2)+9=8x-7$이므로

$f'(2)+g'(2)=\dfrac{8}{3}$이다.

$\{f'(2)-g'(2)\}^2=\{f'(2)+g'(2)\}^2-4f'(2)g'(2)$

$=\dfrac{64}{9}+4=\dfrac{100}{9}$

$\sqrt{\{f'(2)-g'(2)\}^2}=\dfrac{10}{3} \Rightarrow |f'(2)-g'(2)|=\dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow f'(2)-g'(2)=\dfrac{10}{3}\ \ (\because f'(2)>g'(2))$

따라서 $27\{f'(2)-g'(2)\}=90$이다.

답 90

Theme 44 접선의 방정식의 활용

145. 25

037

삼각형 ABP의 밑변을 $\overline{AB}=\sqrt{5}$라 하면
높이가 최소일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 최소이다.

직선 AB의 방정식은 $y=-2x-1$이므로
점 P에서의 접선의 기울기가 -2일 때, 높이가 최소이다.

$f(x)=x^2-4x+5$라 하면
$f'(x)=2x-4$
$2x-4=-2 \Rightarrow x=1$이므로 $\mathrm{P}(1,\ 2)$이다.

삼각형 ABP의 높이 h는 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$와
직선 $y=-2x-1 \Rightarrow 2x+y+1=0$ 사이의 거리와 같다.
$h=\dfrac{|2+2+1|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\dfrac{5}{2}=m$
이므로 $10m=25$이다.

답 25

Tip <신발끈 공식>

삼각형의 세 꼭짓점의 좌표를 알면 신발끈 공식을
이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

삼각형의 세 꼭짓점의 좌표가
$(a,\ b),\ (c,\ d),\ (e,\ f)$일 때,
삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & c & e & a \\ b & d & f & b \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|ad+cf+eb-(cb+ed+af)|$$

ex $\mathrm{A}(-1,\ 1),\ \mathrm{B}(-2,\ 3),\ \mathrm{P}(1,\ 2)$일 때,
삼각형 ABP의 넓이 S를 구하시오.

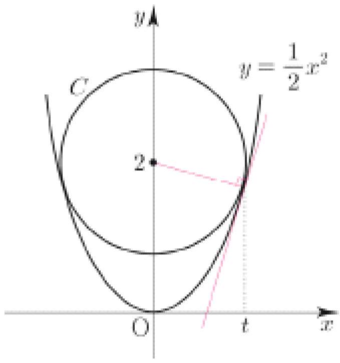
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}|-3-4+1-(-2+3-2)|$$
$$=\frac{1}{2}|-5|=\frac{5}{2}$$

146. 3

038

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$라 하면 $f'(x)=x$

접점의 x좌표를 $t\ (t>0)$라 하면
두 점 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$, $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기와
$\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$에서의 접선의 기울기는 서로 수직이다.



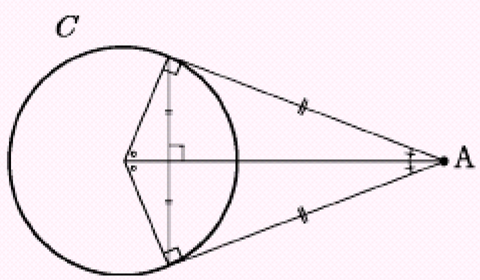
$\dfrac{\frac{1}{2}t^2-2}{t-0}\times t=-1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}t^2=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}\ (\because t>0)$
$\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right) \Rightarrow (\sqrt{2},\ 1)$
두 점 $(\sqrt{2},\ 1)$, $(0,\ 2)$사이의 거리가 원 C의
반지름 r이므로 $r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(1-2)^2}=\sqrt{3}$이다.

원 C의 넓이는 3π이므로 $a=3$이다.

답 3

Tip 원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선은
문제를 풀어나가는 key point일 때가 많다.
즉, 반드시 그어야 하는 보조선 중 하나이다.

아래 그림과 같이 점 A에서 원 C에 접선을
그었을 때, 그어야하는 보조선은 다음과 같다.



자주 출제되는 도형이니 반드시 기억하자.

147. 55

040

$\overline{PA}=\overline{PB}=\sqrt{5}$, $\cos(\angle APB)=\dfrac{3}{5}$

$\overline{AB}=x$라 하자.

삼각형 ABP에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos(\angle APB)=\dfrac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-x^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{5}=\dfrac{10-x^2}{10} \Rightarrow 30=50-5x^2 \Rightarrow x=2\ (\because x>0)$

$\overline{AB}=2$이고 삼각형 ABP는 이등변삼각형이므로

$A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$이다.

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{PB}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{5-1}=2$

즉, $P(0,\ 2)$

직선 BP의 기울기는 -2이므로

점 C에서의 접선의 기울기는 -2이다.

$f(x)=-4x^4+k$라 하면

$f'(x)=-16x^3$

점 C의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=-2 \Rightarrow -16t^3=-2 \Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$

직선 BP의 방정식은 $y=-2x+2$이고,

점 C은 직선 BP위의 점이므로 C의 y좌표는 1이다.

$C\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$은 곡선 $y=f(x)$위의 점이기도 하므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow -\dfrac{1}{4}+k=1 \Rightarrow k=\dfrac{5}{4}$

$C\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$이므로 대칭성에 의해서 $D\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

사각형 ABCD는 등변사다리꼴이므로

넓이 $s=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{DC})\times h=\dfrac{1}{2}\times(2+1)\times 1=\dfrac{3}{2}$

따라서 $20(k+s)=20\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{2}\right)=25+30=55$이다.

답 55

Theme 45 평균값의 정리

148. 15

046

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해서

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$를 만족시키는 c가

열린구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{f(4)-3}{3}=f'(c)$

(나) 조건에 의해서

$0\le\dfrac{f(4)-3}{3}\le 3 \Rightarrow 3\le f(4)\le 12$

$f(4)$의 최솟값은 3, 최댓값은 12이므로

최솟값과 최댓값의 합은 15이다.

답 15

Theme 46 함수의 증가, 감소

149. 1

053

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x$

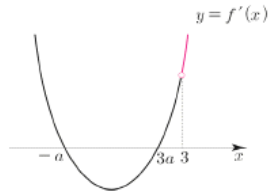
$f'(x)=x^2-2ax-3a^2=(x-3a)(x+a)$

$3<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)<f(x_2)$이므로 $x>3$에서 $f(x)$가 증가한다.

즉, $x>3$에서 $f'(x)\ge 0$

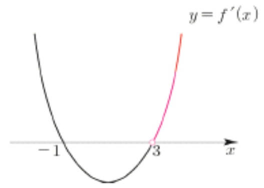
$a>0$이므로 $f'(x)$를 그리면



조건을 만족하려면 $3a<3$이어야 하므로 $a<1$이다.

위와 같은 그림은 직관적으로 당연하게 받아들일 수 있지만

만약 $3a=3$일 때에도 조건을 만족시킬 수 있을까?



$3a=3 \Rightarrow a=1$이어도 조건을 만족시킨다.

$0<a\le 1$이므로 a의 최댓값은 1이다.

답 1

Tip 항상 경계를 조심해야 한다.

a가 자연수나 정수일 때, a의 개수나 합을 물어보는 문제에서 특히 조심해야 한다.

위 문제에서는 $a=1$일 때가 경계가 되는데

$a=1$인 상황을 그려보고 특히 유의하면서 판단하면 된다.

150. 13

129

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$

$(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(x-t)+t^3-(a+2)t^2+at$

이므로 $g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$이다.

$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t=-6t\left(t-\frac{a+2}{3}\right)$

$g(t)$가 열린구간 $(0,\ 5)$에서 증가하므로

$\frac{a+2}{3}$는 양수이고 $5\le\frac{a+2}{3}\Rightarrow 13\le a$

따라서 a의 최솟값은 13이다.

답 13

151. 9

054

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2-4x+1$

$f'(x)=-x^2+kx-4$

$f(x)$의 역함수가 존재하려면 실수 전체에서 감소함수나 증가함수이어야 한다.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 감소함수이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$를 만족시키면 된다.

판별식을 사용하면

$D\le 0\Rightarrow k^2-16\le 0\Rightarrow (k+4)(k-4)\le 0$

$\Rightarrow -4\le k\le 4$

따라서 정수 k의 개수는 9이다.

답 9

152. ①

158

$f(x)=x^3+6x^2+15|x-2a|+3$

$$f(x)=\begin{cases}x^3+6x^2+15x-30a+3 & (x>2a)\\ x^3+6x^2-15x+30a+3 & (x\le 2a)\end{cases}$$

$x>2a$에서 $f(x)=x^3+6x^2+15x-30a+3$이고,

모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3x^2+12x+15=3(x^2+4x+5)>0$이므로

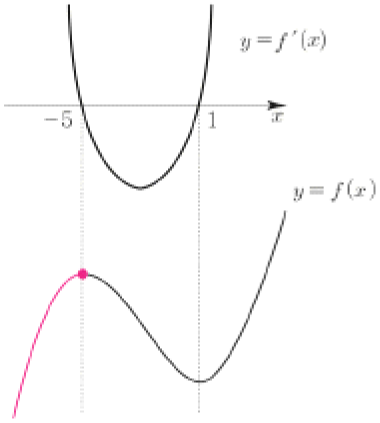
$x>2a$에서 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 $x\le 2a$에서 $f(x)$가 증가하면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$x\le 2a$에서 $f(x)=x^3+6x^2-15x+30a+3$이고

$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$이므로

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$x\le 2a$에서 $f(x)$가 증가하려면

$2a\le -5\Rightarrow a\le -\frac{5}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다.

답 ①

Tip1 <$f(x)$는 $x=2a$에서 미분가능해야할까?>

$x=2a$에서 미분가능해야 $f(x)$가 증가하는 것은 아니다.

Guide step에서 배운 내용을 다시 상기시켜보자.
(개념 파악하기 - (4) 함수의 증가와 감소는
어떻게 알 수 있을까?)
함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수
$x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면

$f(x)$는 그 구간에서 **증가**한다고 학습하였다.

즉, 미분가능해야 증가하는 것이 아니라 위 조건만 만족시키면 그 구간에서 증가한다고 볼 수 있다.

다만 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 학습하였다.

만약 $f(x)$가 상수함수가 아닌 다항함수라면 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$라고 학습하였다.

Tip2 위 풀이가 이해가 잘 안 된다면 아래 해설강의를 참고하도록 하자.

T2 158번 해설강의

https://youtu.be/bnmiT2Gp3D8

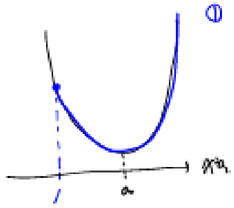
153. ②

12. 실수 a에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \geq 1\}$인 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재할 때, $f(2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$f'(x)=x^2-2ax+3a$

① $a\geq 1$



$f'(a)\geq 0 \Rightarrow a^2-2a^2+3a\geq 0$

$-a^2+3a\geq 0$

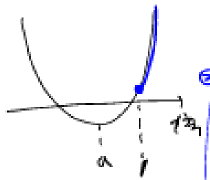
$a^2-3a\leq 0$

$a(a-3)\leq 0$

$0\leq a\leq 3$

$\therefore 1\leq a\leq 3$

② $a<1$



$f'(1)\geq 0 \Rightarrow 1-2a+3a\geq 0$

$1+a\geq 0$

$a\geq -1$

$\therefore -1\leq a<1$

$-1\leq a\leq 3$

$$f(2)=\frac{8}{3}+2a \Rightarrow -2+\frac{8}{3}\leq f(2)\leq 6+\frac{8}{3}$$

$\therefore M-m=8$

Theme 47 함수의 극대, 극소

154. 2

060

$f(x)=x^3+ax^2+bx+5$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=2$에서 극솟값 1를 가지므로

$f(2)=1 \Rightarrow 4a+2b+13=1 \Rightarrow 2a+b=-6$

$f'(2)=0 \Rightarrow 12+4a+b=0 \Rightarrow 4a+b=-12$

두 식을 연립하면 $a=-3$, $b=0$

$f(x)=x^3-3x^2+5$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x=0$에서 극대이고 극댓값 5를 가지므로 $c=0$, $d=5$이다.

따라서 $a+b+c+d=-3+0+0+5=2$이다.

답 2

155. 67

075

최고차항의 계수가 자연수인 삼차함수 $f(x)$

(가) 함수 $(x^2+2)f(x)$는 $x=0$에서 극값 6을 갖는다.

$2f(0)=6 \Rightarrow f(0)=3$

$2\times0\times f(0)+(0^2+2)f'(0)=0 \Rightarrow f'(0)=0$

(나) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

$f'(0)=0$인데 극값을 갖지 않으려면

$f(x)=ax^3+b$ 꼴이어야 한다.

(Guide step에서 배운 삼차함수 개형 ②번 꼴)

$f(0)=3$이므로 $f(x)=ax^3+3$

(다) $\dfrac{12}{f'(2)}$는 자연수이다.

$\dfrac{12}{f'(2)}=\dfrac{12}{12a}=\dfrac{1}{a}$

a가 자연수이므로 조건을 만족시키려면 $a=1$이어야 한다.

$f(x)=x^3+3$이므로 $f(4)=67$이다.

답 67

156. ②

10. 함수 $f(x)=x^3-(a+1)x^2+b$는 $x=a$에서 극솟값 1을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만나고, 점 B에서의 접선이 점 B가 아닌 점 C에서 곡선과 만날 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

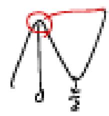
① 78 ② 81 ③ 84 ④ 87 ⑤ 90

$f'(x)=3x^2-2(a+1)x$

$f'(a)=3a^2-2a^2-2a=0 \Rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a=0,\ a=2$

① $a=0$

$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$



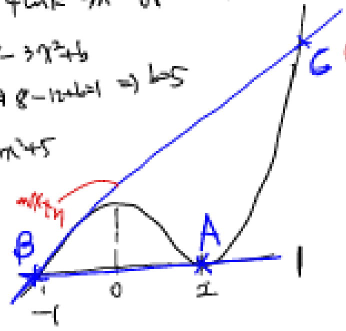
② $a=2$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f(x)=x^3-3x^2+b$

$f(2)=1 \Rightarrow 8-12+b=1 \Rightarrow b=5$

$f(x)=x^3-3x^2+5$



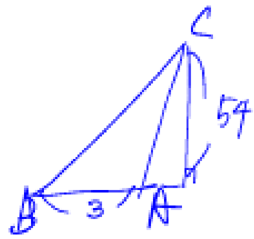
$125-75+5$

3차 계수의 관계 technique.

$f(x)-mx+n \Rightarrow$ 세 실근 합 3 $\Rightarrow -1-1+p=3$

$p=5$.

를 기울기이용.



$\frac{\pi}{8}+\frac{b}{4}$

$-3\pi+6b$

$\frac{1}{2}\times54\times3=81$

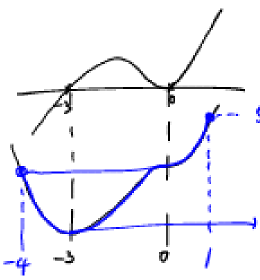
Theme 48 함수의 최대, 최소

157. ⑤

7. 상수 $a\ (a>0)$, b에 대하여 $f(x)=ax^4+4ax^3-b$가 닫힌구간 $[-4,\ 1]$에서 최댓값 2, 최솟값 -30을 가질 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 41 ② 42 ③ 43 ④ 44 ⑤ 45

$f'(x)=4ax^3+12ax^2$
$=4ax^2(x+3)$



$5a-b=2$

$81a-108a-b$
$-27a-b=-30$

$5a-b=2$
$-27a-b=-30$
$32a=32$
$a=1$
$b=3$

$f(x)=x^4+4x^3-3$

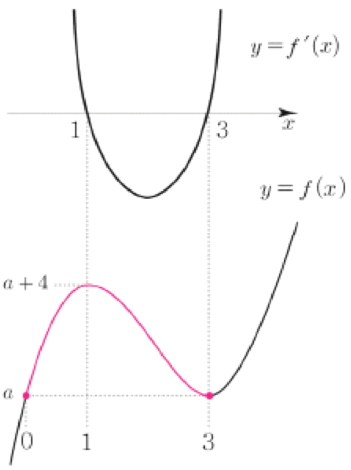
$f(2)=16+32-3$
$=48-3=45$

158. ④

195

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f(0)=a,\ f(1)=a+4,\ f(3)=a$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=a+4$이므로 $a+4=12 \Rightarrow a=8$

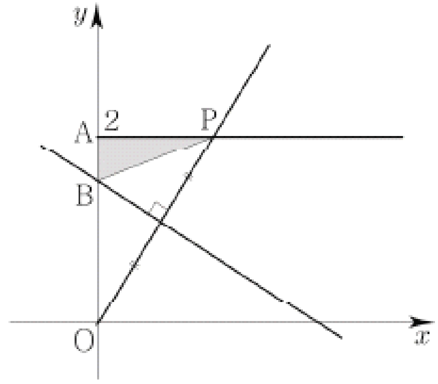
따라서 $a=8$이다.

답 ④

159. 11

171

$0<t<2$
$A(0,\ 2),\ P(t,\ 2)$



직선 OP의 기울기는 $\frac{2}{t}$, 선분 OP의 중점은 $\left(\frac{t}{2},\ 1\right)$

선분 OP의 수직이등분선은

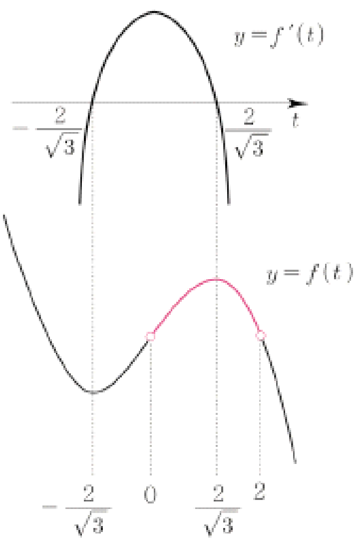
$y=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)+1 \Rightarrow y=-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$

$B\left(0,\ \frac{t^2}{4}+1\right)$이므로

$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{t^2}{4}\right)\times t=\frac{1}{8}(4t-t^3)$

$f'(t)=\frac{1}{8}(4-3t^2)=-\frac{3}{8}\left(t-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면



$0<t<2$에서 $f(t)$의 최댓값은

$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{b}{a}\sqrt{3}$

따라서 $a+b=11$이다.

답 11

Tip

〈만약 $t>2$이면 어떻게 될까?〉

점 B의 y좌표는 $\frac{t^2}{4}+1$이므로 $t=2$일 때, 2이고

$t>2$일 때, y좌표는 2보다 크다.

B의 y좌표가 A의 y좌표보다 크기 때문에

$\overline{AB}=\frac{t^2}{4}-1$이다.

따라서 만약 $t>0$라고 조건을 변경하면

선분 AB는 길이는 양수이므로 절댓값을 취해서

$\overline{AB}=\left|1-\frac{t^2}{4}\right|$라고 해야한다.

길이는 양수이므로 절댓값을 취해줘야 한다.

이를 항상 유의하도록 하자.

Theme 49 방정식의 실근의 개수

160. 51

19. 방정식 $2x^3-12x+5=3x^2+k$가 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

51

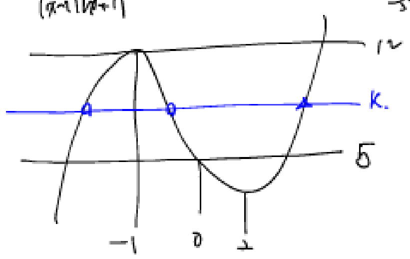
$2x^3-3x^2-12x+5=k$

$6x^2-6x-12$

$6(x^2-x-2)$

$(x-2)(x+1)$

$-2-3+12+5$



$k=6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11$

13 21 30 40

51

7

161. 42

095

$3x^4-6x^3-5x^2+12x=2x^3+x^2-12x+k$

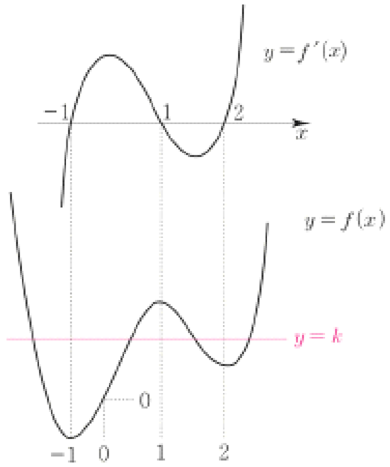
$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f(2)=8,\ f(1)=13,\ f(0)=0$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$f(2)<k<f(1) \Rightarrow 8<k<13$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은

$9+10+11+12=42$이다.

답 42

162. 12

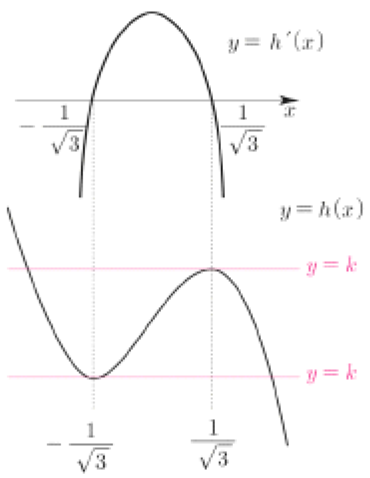
097

$f(x)$의 역함수를 $g(x)$

$f(x)$는 증가함수이므로
$y=f(x)$와 $y=g(x)$와 만나는 점은
$y=f(x)$와 $y=x$와 만나는 점과 같다.

즉, 방정식 $x^3+k=x$이 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$k=-x^3+x$
$h(x)=-x^3+x$라 하면
$h'(x)=-3x^2+1=-3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$h'(x)$를 바탕으로 $h(x)$를 그리면



$k=h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $k=h\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$
이므로 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 곱은
$-\frac{4}{27}=-a \Rightarrow a=\frac{4}{27}$이다.

따라서 $81a=12$이다.

답 12

163. 9

098

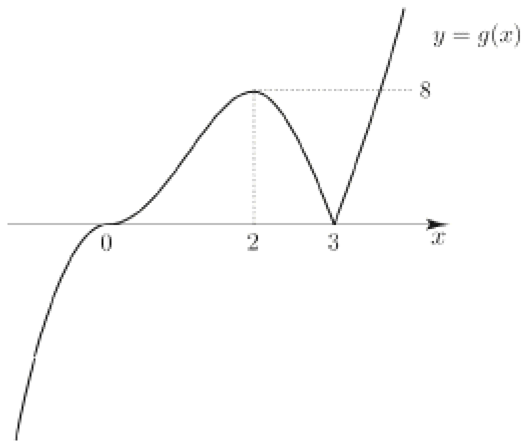
$f(x)=x^2-3x=x(x-3)$
$x|f(x)|=\frac{k}{2} \Rightarrow 2x|f(x)|=k$

$g(x)=2x|f(x)|$라 하면
$x<0$ or $x>3$에서 $f(x)>0 \Rightarrow |f(x)|=f(x)$
$0 \le x \le 3$에서 $f(x) \le 0 \Rightarrow |f(x)|=-f(x)$
이므로

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2(x-3) & (x<0 \text{ or } x>3) \\ -2x^2(x-3) & (0 \le x \le 3) \end{cases}$$

$h(x)=-2x^3+6x^2$라 하면
$h'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$이므로
$x=2$에서 극댓값 8을 갖는다.

이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 $y=k$의 그래프가 한 점에서 만나지 않도록 하는 k의 범위는 $0 \le k \le 8$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는 9이다.

답 9

164. 21

198

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$

$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$

$\Rightarrow f(x)+|f(x)+x|-6x=k$

절댓값을 풀기 위해서 절댓값 안의 함수 $f(x)+x$의 함숫값이 양수인 범위와 음수인 범위를 조사해 보자.

$J(x)=f(x)+x$라 하자.

$J(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x=\frac{x}{2}(x^2-9x+22)$

이차방정식 $x^2-9x+22=0$에서

판별식 $D=81-88<0$이다.

즉, 곡선 $y=J(x)$와 x축은 원점에서만 만난다. 또한

$J'(x)=\frac{3}{2}x^2-9x+11 \Rightarrow J'(0)=11>0$이므로

$x=0$의 좌우에서 $J(x)$의 부호가 $-$ $+$로 바뀐다.

$x<0 \Rightarrow J(x)<0$

$x>0 \Rightarrow J(x)>0$

$x=0 \Rightarrow J(0)=0$

① $x\geq 0$일 때, $J(x)\geq 0 \Rightarrow f(x)+x\geq 0$

$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$

$\Rightarrow f(x)+f(x)+x=6x+k$

$\Rightarrow 2f(x)-5x=k$

$\Rightarrow x^3-9x^2+15x=k$

② $x<0$일 때, $J(x)<0 \Rightarrow f(x)+x<0$

$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$

$\Rightarrow f(x)-f(x)-x=6x+k$

$\Rightarrow -7x=k$

$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하자.

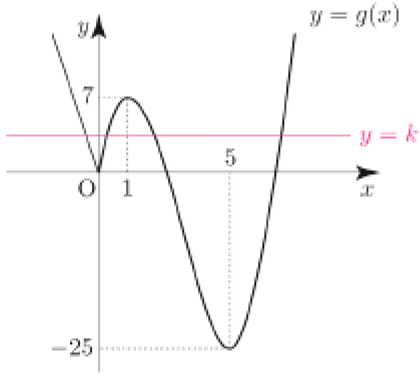
$$g(x)=\begin{cases} x^3-9x^2+15x & (x\geq 0) \\ -7x & (x<0) \end{cases}$$

$h(x)=x^3-9x^2+15x$

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$h(0)=0,\ h(1)=7,\ h(5)=-25$

이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4가 되도록 하는 실수 k의 범위는 $0<k<7$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은 $1+2+3+4+5+6=21$이다.

답 21

Theme 50 접선의 개수

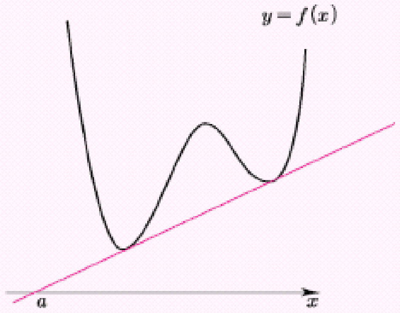
165. 23

101

삼차함수의 접선의 개수는 접점의 개수와 같으므로
서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있도록 하려면
서로 다른 두 개의 접점이 존재하면 된다.

Tip 접선의 개수 = 접점의 개수?

접선의 개수와 접점의 개수가 반드시 같은 것은 아니다.
예를 들어 $f(x)$가 사차함수일 때, 아래와 같은 경우가 가능하다.



즉, 접점이 2개여도 접선이 1개일 수 있다.

하지만 $f(x)$가 삼차함수라면 위와 같은 경우가 발생하지 않으므로 접선의 개수와 접점의 개수는 같다.
(이때, 접점의 개수는 접점의 x좌표의 개수로 판단할 수 있다.)

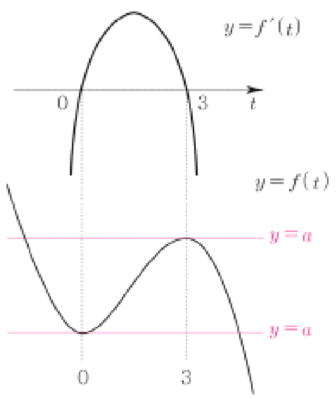
그렇기 때문에 보통 접선의 개수를 물어보는 문제는 $f(x)$가 삼차함수인 경우가 대부분이다.

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=3t^2(x-t)+t^3-4$

접선이 점 $(3,\ a)$을 지나므로
$a=3t^2(3-t)+t^3-4=-2t^3+9t^2-4$

$f(t)=-2t^3+9t^2-4$라 하면
$f'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면



$a=f(0)=-4$ or $a=f(3)=23$
a는 양수이므로 23이다.

답 23

166. 31

102

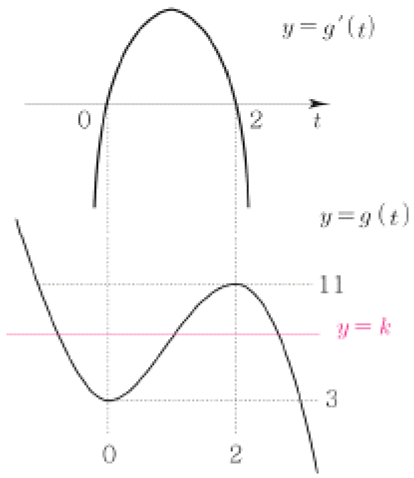
101번에서 배웠듯이 삼차함수이므로
접점의 개수와 접선의 개수는 동일하다.

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=(3t^2-12t+3)(x-t)+t^3-6t^2+3t+3$

접선이 $(0,\ k)$를 지나므로
$k=-2t^3+6t^2+3$

$g(t)=-2t^3+6t^2+3$라 하면
$g'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$
$g(0)=3,\ g(2)=11$

$g'(t)$를 바탕으로 $g(t)$를 그리면



$k<3$ or $k>11 \Rightarrow f(k)=1$
$f(3)=f(11)=2$
$3<k<11 \Rightarrow f(k)=3$

따라서 $\sum_{k=1}^{15} f(k)=1\times6+2\times2+3\times7=31$이다.

답 31

Theme 51 부등식의 활용

167. ⑤

157

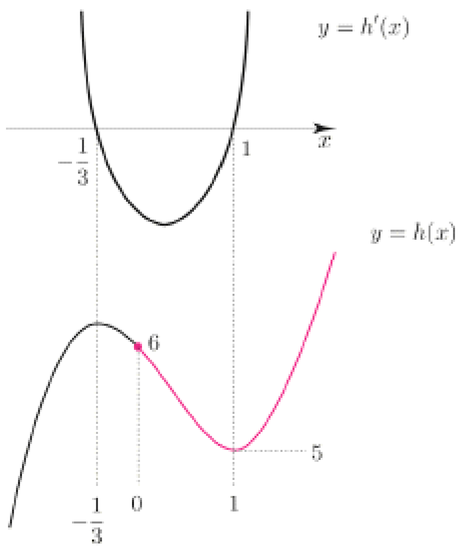
$f(x) \geq g(x) \Rightarrow x^3-x+6 \geq x^2+a \Rightarrow x^3-x^2-x+6 \geq a$

$h(x)=x^3-x^2-x+6$라 하면

$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$h(0)=6,\ h(1)=5$

$h'(x)$를 바탕으로 $h(x)$를 그리면



$x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x) \geq a$가 성립하려면 $a \leq 5$이어야 한다.

따라서 실수 a의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

168. 3

165

$f(x)=x^3+3x^2-k,\ g(x)=2x^2+3x-10$

$f(x) \geq 3g(x)$

$x^3+3x^2-k \geq 6x^2+9x-30$

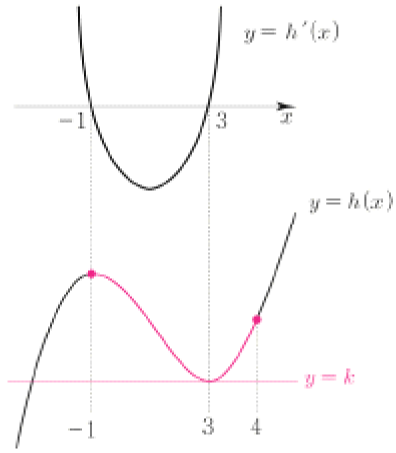
$x^3-3x^2-9x+30 \geq k$

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30$라 하면

$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$h(3)=3$

$h'(x)$를 바탕으로 $h(x)$를 그리면



닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 부등식 $h(x) \geq k$가 항상 성립하려면 $h(3) \geq k \Rightarrow 3 \geq k$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 3이다.

답 3

Theme 52 속도와 가속도

169. 11

115

$t>0$

$x(t)=t^3+at+b$

$v(t)=3t^2+a$

$v'(t)=6t$

$v'(2)=12$이므로 $t=2$에서 점 P는 원점을 지난다.

$v(2)=12+a=13 \Rightarrow a=1$

$x(2)=8+2+b=10+b=0 \Rightarrow b=-10$

따라서 $a-b=11$이다.

답 11

170. ①

152

$x(t)=t^3+at^2+bt$

$v(t)=3t^2+2at+b$

$v'(t)=6t+2a$

$v(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0$

$v'(2)=0 \Rightarrow 12+2a=0 \Rightarrow a=-6$

$a=-6$이므로 $b=9$이다. 따라서 $a+b=3$이다.

답 ①

171. 27

163

$x_1(t)=t^3-2t^2+3t,\ x_2(t)=t^2+12t$

$v_1(t)=3t^2-4t+3,\ v_2(t)=2t+12$

$v_1(t)=v_2(t)\ \Rightarrow\ 3t^2-4t+3=2t+12\ \Rightarrow\ t^2-2t-3=0$

$\Rightarrow\ (t-3)(t+1)=0\ \Rightarrow\ t=3\ (\because t\neq -1)$

P(18), Q(45)이므로 두 점 사이의 거리는 27이다.

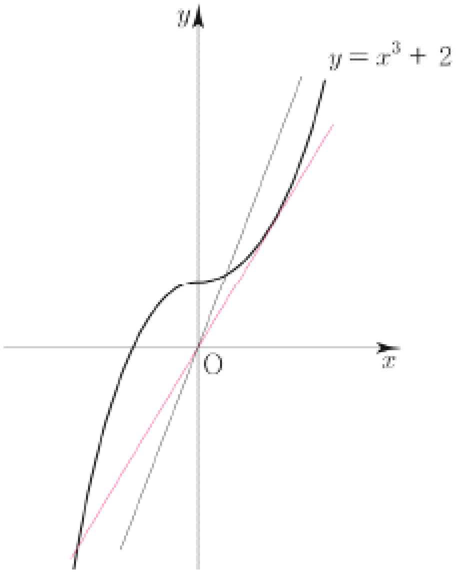
답 27

Theme 53 정점 Technique

172. 13

185

함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$가 만나는 교점의 개수를 $f(k)$



직선 $y=kx$가 함수 $y=x^3+2$의 그래프에 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하자.

$f'(t)=k\ \Rightarrow\ 3t^2=k$

$f(t)=kt\ \Rightarrow\ t^3+2=kt$

위 두 식을 연립하면

$t^3+2=(3t^2)t\ \Rightarrow\ 2=2t^3\ \Rightarrow\ t=1$

$t=1$일 때, $k=3$이다.

$k<3$일 때, $f(k)=1$

$k=3$일 때, $f(3)=2$

$k>3$일 때, $f(k)=3$

이므로 $\sum_{k=1}^{6} f(k)=(1\times 2)+2+(3\times 3)=13$이다.

답 13

173. ②

189

최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$

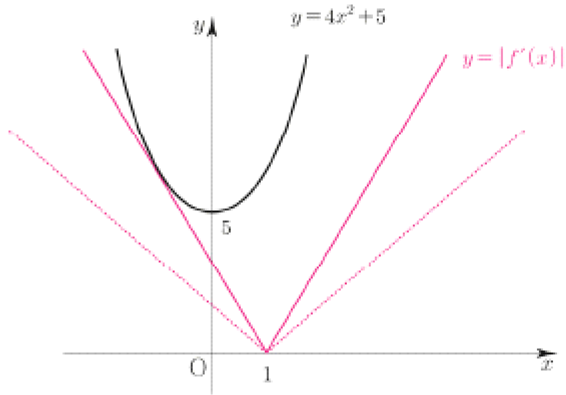
$y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$이므로

$f(x)=a(x-1)^2+C$

$f'(x)=2a(x-1)$

모든 실수 x에서 $|f'(x)|\leq 4x^2+5$이므로

$y=|f'(x)|,\ y=4x^2+5$의 그래프를 그리면



a의 최댓값을 구하는 것이므로 $a>0$일 때라고 가정하고 답을 구해보자.

$y=|2a(x-1)|$는 a에 관계없이 $(1,\ 0)$을 지나고

a가 커지면 커질수록 기울기가 가팔라진다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $|2a(x-1)|\leq 4x^2+5$를

만족시키면서 실수 a가 최대일 때는

$y=-2a(x-1)$와 $y=4x^2+5$와 접할 때이다.

$g(x)=4x^2+5$라 하면

$g'(x)=8x$

접점의 x좌표를 t라 하면

$g'(t)=-2a\ \Rightarrow\ 8t=-2a\ \Rightarrow\ t=-\frac{1}{4}a$

$g(t) = -2a(t-1) \Rightarrow 4t^2+5 = -2a(t-1)$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4}+5 = -2a\left(-\frac{1}{4}a-1\right)$$

$$\Rightarrow a^2+8a-20=0$$

$$\Rightarrow (a+10)(a-2)=0$$

$$\Rightarrow a=2 \ (\because \ a>0)$$

답 ②

조건을 만족시키는 실수 a의 범위를 구해보자.

① $a>0$일 때
$0<a\le 2$이면 주어진 조건을 만족시킨다.

② $a=0$일 때
$0 \le 4x^2+5$이므로 마찬가지로 주어진 조건을 만족시킨다.

③ $a<0$일 때
포인트는 $a<0$일 때인데 $y=|2a(x-1)|$이므로
a의 절댓값만 같으면 $a<0$ 와 $a>0$는
서로 같은 그래프가 그려진다.

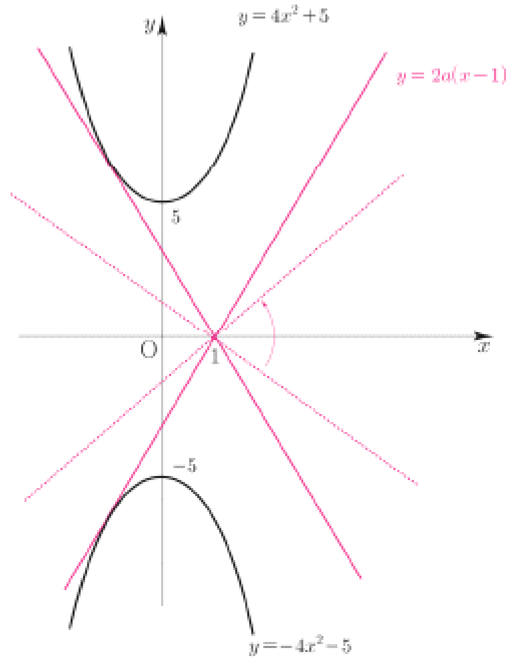
예를 들어
$a=1 \Rightarrow y=|2(x-1)|$
$a=-1 \Rightarrow y=|-2(x-1)|=|2(x-1)|$

즉, $a<0$일 때는 $-2\le a<0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 범위를 구하면
$-2\le a\le 2$이다.

다른 방법으로 구해보자.
$|f'(x)|\le 4x^2+5 \Rightarrow -4x^2-5\le f'(x)\le 4x^2+5$
$\Rightarrow -4x^2-5\le 2a(x-1)\le 4x^2+5$

직선 $y=2a(x-1)$는 a와 관계없이 항상 지나는 정점이
$(1,\ 0)$이고 기울기가 $2a$인 일차함수로 해석할 수 있다.
즉, 점 $(1,\ 0)$을 고정시켜 빙글빙글 돈다고 볼 수 있다.



a의 최대는 $a>0$일 때, $y=-4x^2-5$와 접할 때이고
a의 최소는 $a<0$일 때, $y=4x^2+5$와 접할 때이다.

첫 번째 풀이처럼 접점을 이용하여 풀어도 되고
이차함수이니 판별식으로 풀어도 된다.
이번에는 판별식으로 풀어보자.

① $a>0$일 때
$2a(x-1)=-4x^2-5$

$\Rightarrow 4x^2+2ax-2a+5=0$

$\frac{D}{4}=a^2+8a-20=0$

$\Rightarrow (a+10)(a-2)=0 \Rightarrow a=2 \ (\because \ a>0)$

② $a<0$일 때
$2a(x-1)=4x^2+5$

$\Rightarrow 4x^2-2ax+2a+5=0$

$\frac{D}{4}=a^2-8a-20=0$

$\Rightarrow (a-10)(a+2)=0 \Rightarrow a=-2 \ (\because \ a<0)$

따라서 조건을 만족시키는 a의 범위는 $-2\le a\le 2$이다.

6. 적분

Theme 54 부정적분과 미분의 관계의 활용

174. 8

019

$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$

$F'(x)=f(x)$

$F(x)+xf(x)=4x^3-6x+2$

양변을 x에 대해 미분하면

$2f(x)+xf'(x)=12x^2-6$

$f(x)=ax^n+\cdots$라 하면 좌변의 최고차항은

$(2a+na)x^n$ 이므로 $a=3,\ n=2$ 이다.

$f(x)=3x^2+bx+c$

$f'(x)=6x+b$

를 좌변에 대입하면

$2f(x)+xf'(x)=12x^2-6$

$12x^2+3bx+2c=12x^2-6$

$b=0,\ c=-3$

$f(x)=3x^2-3$

$F(x)=x^3-3x+C_1$

$F(x)+xf(x)=4x^3-6x+2$에 $x=0$을 대입하면

$F(0)=2$이므로 $C_1=2$

$F(x)=x^3-3x+2$

이렇게 $F(x)$를 찾을 수도 있지만 Technical하게

풀어보자.

$F'(x)=f(x)$

$F(x)+xf(x)=4x^3-6x+2$

$F(x)+xF'(x)=4x^3-6x+2$

$\{xF(x)\}'=4x^3-6x+2$

$xF(x)=x^4-3x^2+2x+C_2$

$F(x)$는 다항함수이므로 $C_2=0$이다.

$(\because xF(x)=x(ax^n+\cdots+p)=ax^{n+1}+\cdots+px)$

$xF(x)=x^4-3x^2+2x$

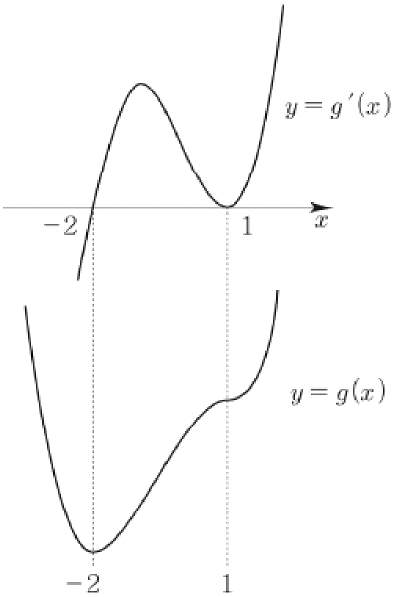
$F(x)=x^3-3x+2$

$g(x)=\int F(x)\,dx$

$g'(x)=F(x)=x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$

$g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+C_3$

$g'(x)$를 바탕으로 $g(x)$를 그리면



$g(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로

$g(-2)=0 \Rightarrow 4-6-4+C_3=0 \Rightarrow C_3=6$

$g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+6$이므로

$g(2)=4-6+4+6=8$이다.

답 8

175. 7

101

다항함수 $f(x)$에 대하여

(가) 모든 실수 x에 대하여
$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$

양변을 x에 대해 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{2}\{f(x)+f(1)\} + \frac{x-1}{2}f'(x)$$

양변에 2를 곱하면

$$2f(x) = f(x)+f(1)+(x-1)f'(x)$$

$$f(x) = f(1)+(x-1)f'(x)$$

$f(x)$는 다항함수이므로

$f(x) = ax^n + \cdots$

① $n \ge 1$

$f(x) = f(1)+(x-1)f'(x)$

우변의 최고차항은 anx^n이므로

$n=1$이다.

② $n=0$ ($f(x)$가 상수함수)

$f(x)=a$

$a=a$이므로 (가)조건을 만족시킨다.

(나) $\int_0^2 f(x)dx = 5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

만약 $f(x)$가 상수함수이면 $f(0)=1$이므로

$f(x)=1$이다.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 1dx = 2$$

$$5\int_{-1}^1 xf(x)dx = 5\int_{-1}^1 xdx = 0$$

$f(x)=1$이면 (나) 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(x)$는 일차함수이므로

$f(x) = ax+b$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (ax+b)dx = \left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^2$$

$$=2a+2b$$

$$5\int_{-1}^1 xf(x)dx = 5\int_{-1}^1 (ax^2+bx)dx = 5\int_{-1}^1 ax^2dx$$

$$=10\int_0^1 ax^2dx = 10\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{10}{3}a$$

$$2a+2b = \frac{10}{3}a \Rightarrow b = \frac{2}{3}a$$

$$f(x) = ax+\frac{2}{3}a$$

$$f(0)=1 \Rightarrow \frac{2}{3}a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$f(x) = \frac{3}{2}x+1$이므로 $f(4)=7$이다.

답 7

Theme 55 부정적분과 함수의 연속성

176. ③

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = 2|x-1|+3x^2$$

이고, $f(0)=1$일 때, $f(-1)+f(2)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)$
$(x \ge 1)$ $2x-2+3x^2$
$(x<1)$ $-2x+2+3x^2$

$f(x)$
$(x \ge 1)$ x^3+x^2-2x+3
$(x<1)$ x^3-x^2+2x+1

$f(-1) = -1-1-2+1$
$=-3$

$f(2) = 8+4-4+3$
$=11$

177. 60

022

연속함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=\begin{cases} -3x^2 & (|x|<1) \\ 2 & (|x|>1) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & (x<-1) \\ -3x^2 & (-1<x<1) \\ 2 & (x>1) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<-1) \\ -x^3+b & (-1\le x\le 1) \\ 2x+c & (x>1) \end{cases}$$

(등호는 어디에 붙든지 상관없다.)

$f(-2)=3 \Rightarrow -4+a=3 \Rightarrow a=7$

$x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1) \Rightarrow -2+a=1+b \Rightarrow b=4$

$x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Rightarrow -1+b=2+c \Rightarrow c=1$

$$f(x)=\begin{cases} 2x+7 & (x<-1) \\ -x^3+4 & (-1\le x\le 1) \\ 2x+1 & (x>1) \end{cases}$$

이므로 $f(-2)f(0)f(2)=3\times 4\times 5=60$이다.

답 60

Theme 56 구간에 따라 달라지는 정적분 계산

178. 29

034

$\int_0^3 6x|x-1|\,dx$

$f(x)=6x|x-1|$라 하면

$$f(x)=\begin{cases} -6x^2+6x & (x<1) \\ 6x^2-6x & (x\ge 1) \end{cases}$$

$$\int_0^3 6x|x-1|\,dx=\int_0^1(-6x^2+6x)dx+\int_1^3(6x^2-6x)dx$$

$$=\left[-2x^3+3x^2\right]_0^1+\left[2x^3-3x^2\right]_1^3=1+27-(-1)=29$$

답 29

Theme 57 정적분의 성질

179. 44

030

$\int_1^3 f(x)dx=-1,\ \int_1^3\{f(x)\}^2dx=4$

$$\int_1^3\{3f(x)-1\}^2=\int_1^3\{9\{f(x)\}^2-6f(x)+1\}dx$$

$$=9\int_1^3\{f(x)\}^2dx-6\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 1dx$$

$$=9\times 4-6\times(-1)+[x]_1^3=36+6+2=44$$

답 44

Theme 58 우함수, 기함수, 주기함수의 정적분

180. ①

089

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$
$h(x)=f(x)g(x)$

$f(x)$는 기함수이고 $g(x)$는 우함수이므로
$h(x)$는 기함수이다.

$h'(x)$는 우함수이므로 $xh'(x)$는 기함수이다.

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)\,dx=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+5\int_{-3}^{3}h'(x)dx$$

$$=10\int_{0}^{3}h'(x)dx=10\{h(3)-h(0)\}=10$$

$$\Rightarrow h(3)-h(0)=1$$

$f(-x)=-f(x)$
양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-f(0) \Rightarrow f(0)=0$

$h(0)=f(0)g(0)=0$이므로 $h(3)=1$이다.

답 ①

181. ②

097

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{6}$

$$g(x)=\begin{cases}-f(x+1)+1 & (-1<x<0)\\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

이므로

$$\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{-1}^{0}\{-f(x+1)+1\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}f(x+1)dx+1$$

$$=-\int_{0}^{1}f(x)dx+1$$

$$=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$$

$$\int_{0}^{1}g(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx+\int_{0}^{1}g(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

$g(x+2)=g(x)$이므로

$$\int_{-3}^{2}g(x)dx=\int_{-3}^{-1}g(x)dx+\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{1}^{2}g(x)dx$$

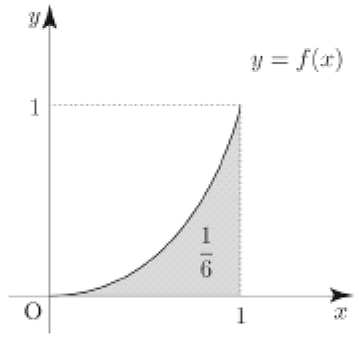
$$=\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{-1}^{0}g(x)dx$$

$$=1+1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

따라서 $\int_{-3}^{2}g(x)dx=\frac{17}{6}$이다.

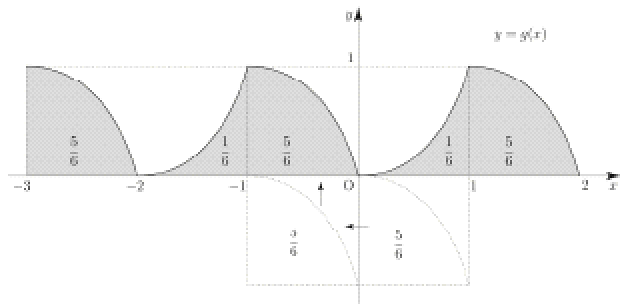
답 ②

이번에는 실전적으로 풀어보자.
$f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{6}$를 만족시키는 함수를 설정하면 다음과 같다.



함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭시킨 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

$g(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 $g(x)$를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 $\int_{-3}^{2}g(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$이다.

Theme 59 정적분으로 정의된 함수 -적분 구간이 상수인 경우

182. 4

047

$f(x)=12x^2+\int_0^1(6x+t)f(t)\,dt$

$f(x)=12x^2+6x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 tf(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=a,\ \int_0^1 tf(t)dt=b$라 하면

$f(x)=12x^2+6ax+b$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(12x^2+6ax+b)dx=\left[4x^3+3ax^2+bx\right]_0^1$$
$$=4+3a+b$$
$$=a$$

$\Rightarrow 2a+b=-4\ \cdots$ ㉠

$$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(12x^3+6ax^2+bx)dx$$
$$=\left[3x^4+2ax^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=3+2a+\frac{b}{2}$$
$$=b$$

$\Rightarrow 4a-b=-6\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 연립하면 $a=-\frac{5}{3},\ b=-\frac{2}{3}$

$f(x)=12x^2-10x-\frac{2}{3}$이므로

$\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^2=\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)^2=(-2)^2=4$이다.

답 4

183. ③

086

$\int_0^1 g(t)\,dt=a$라 하면

(가) 조건에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C$

$g(0)=C$

$\int_0^1 g(t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+at^2+Ct\right]_0^1=\frac{1}{3}+a+C=a$

$\Rightarrow C=-\frac{1}{3}$

이므로 (나) 조건에서

$g(0)-\int_0^1 g(t)dt=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)-\left\{\frac{1}{3}+a+\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow a=-1$

$g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$ 이므로 $g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$이다.

답 ③

Theme 60 정적분으로 정의된 함수 -적분 구간에 변수가 있는 경우

184. ④

098

다항함수 $f(x)$에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt \ \cdots \ ㉠$$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a=2+4a$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$0=3a+\int_1^0 f(t)dt$

$\Rightarrow 0=3a-\int_0^1 f(t)dt \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt=3a$

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$

$\Rightarrow 2+4a=3a \Rightarrow a=-2$

$\Rightarrow f(1)=\int_0^1 f(t)dt=-6,$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-4x+f(x)$

$\Rightarrow xf'(x)=6x^2-4x$

$\Rightarrow f'(x)=6x-4$

$f(x)=3x^2-4x+c$

$f(1)=-6$이므로 $3-4+c=-6 \Rightarrow c=-5$

$f(x)=3x^2-4x-5$

따라서 $a+f(3)=-2+(27-12-5)=8$이다.

답 ④

185. 50

074

다항함수 $f(x)$에 대하여

$\int_1^x (2x-1)f(t)dt=x^3+ax+b$에서

$\int_1^x (2x-1)f(t)dt=(2x-1)\int_1^x f(t)dt$이므로

$x=1$ 대입: $0=1+a+b$

$x=\frac{1}{2}$ 대입: $0=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a+b$

위 두 식을 연립하면 $a=-\frac{7}{4}$, $b=\frac{3}{4}$

따라서

$(2x-1)\int_1^x f(t)dt=x^3-\frac{7}{4}x+\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{4}(x-1)(2x-1)(2x+3)$

$\Rightarrow \int_1^x f(t)dt=\frac{1}{4}(x-1)(2x+3)$

양변을 미분하면

$f(x)=x+\frac{1}{4}$

$\therefore f(1)=\frac{5}{4}$, $40\times f(1)=50$이다.

답 50

다르게 풀어보자.

다항함수 $f(x)$에 대하여

$\int_1^x (2x-1)f(t)dt=x^3+ax+b$

양변에 $x=1$을 대입하면 $0=1+a+b$

$\int_1^x (2x-1)f(t)dt=x^3+ax+b$

$2x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x f(t)dt=x^3+ax+b$

양변을 x에 대해 미분하면

$2\int_1^x f(t)dt+2xf(x)-f(x)=3x^2+a$

$2\int_1^x f(t)dt+(2x-1)f(x)=3x^2+a$

다시 양변을 x에 대해 미분하면

$2f(x)+2f(x)+(2x-1)f'(x)=6x$

$4f(x)+(2x-1)f'(x)=6x$

$f(x)=px^n+\cdots$ 라 하면

좌변의 최고차항은 $(4p+2pn)x^n$이므로

$p=1$, $n=1$이다.

$f(x)=x+q$

$f'(x)=1$

이므로

$4f(x)+(2x-1)f'(x)=6x$

$4(x+q)+2x-1=6x$

$6x+4q-1=6x \Rightarrow q=\frac{1}{4}$

$f(x)=x+\frac{1}{4}$이므로 $f(1)=\frac{5}{4}$이다.

따라서 $40\times f(1)=40\times\frac{5}{4}=50$이다.

186. 10

22. 출제의도 : 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3$

이므로

$f(1)=3$ ……㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

이고, $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=4$

즉,

$f(x)=4x+C_1$ (C_1은 적분상수)

로 놓을 수 있다. 이때 ㉠에서

$f(1)=3$

이므로

$f(1)=4+C_1=3$

$C_1=-1$

즉, $f(x)=4x-1$이므로

$F(x)=2x^2-x+C_2$ (C_2는 적분상수)

한편, 조건 (나)에서

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$

이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$ (C_3은 적분상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고 $G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

로 놓으면

$$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)=2x^4+x^3+x+C_3$$

양변의 x^3의 계수를 비교하면

$2a-1=1$

즉, $a=1$이므로

$G(x)=x^2+x+b$

따라서

$$\begin{aligned}\int_1^3 g(x)dx&=\Big[G(x)\Big]_1^3\\&=G(3)-G(1)\\&=(3^2+3+b)-(1^2+1+b)\\&=10\end{aligned}$$

정답 10

187. ①

15. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$

$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6$ ⋯⋯㉠

이때 조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$이므로 ㉠에 대입하면

$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$

$\{xg(x)\}'=12x^2+24x-6$

$xg(x)=\int(12x^2+24x-6)dx$

$=4x^3+12x^2-6x+C$

(단, C는 적분상수)

이때 $g(x)$는 다항함수이므로 $C=0$

즉 $xg(x)=4x^3+12x^2-6x$이므로

$g(x)=4x^2+12x-6$

따라서

$\int_0^3 g(x)dx$

$=\int_0^3(4x^2+12x-6)dx$

$=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3$

$=36+54-18$

$=72$

정답 ①

Theme 61 정적분으로 정의된 함수 -New 함수

188. 17

056

$f(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\{3|t|-t\}dt$

양변에 $x=\sqrt{2}$을 대입하면

$f(\sqrt{2})=0$

양변을 x에 대해 미분하면

$f'(x)=3|x|-x$

$$f'(x)=\begin{cases}-4x & (x<0)\\ 2x & (x\geq 0)\end{cases}$$

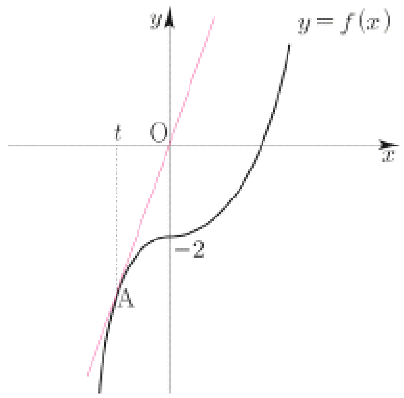
$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+a & (x<0)\\ x^2+b & (x\geq 0)\end{cases}$$

$f(\sqrt{2})=0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b=-2$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0) \Rightarrow a=b \Rightarrow a=-2$

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2-2 & (x<0)\\ x^2-2 & (x\geq 0)\end{cases}$$



원점에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때,
접점을 A라고 하자.
접점의 x좌표를 $t\,(t<0)$라 하면 접선의 방정식은
$y=-4t(x-t)-2t^2-2$
접선이 $(0,\ 0)$을 지나므로
$0=2t^2-2 \Rightarrow t=-1\ (\because t<0)$

$A(-1,\ -4)$이므로 $\overline{OA}^2=1+16=17$이다.

답 17

이번에는 범위를 나누어서 직접 정적분의 값을 구해보자.

$g(t)=3|t|-t$라 하면

$$g(t)=\begin{cases} -4t & (t<0) \\ 2t & (t\geq 0)\end{cases}$$

$f(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\{3|t|-t\}dt=\int_{\sqrt{2}}^{x}g(t)dt$의 값을 구하기 위해서
x의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $x\geq 0$일 때

$$\int_{\sqrt{2}}^{x}g(t)dt=\int_{\sqrt{2}}^{x}2t\,dt=x^2-2$$

② $x<0$일 때

$$\int_{\sqrt{2}}^{x}g(t)dt=\int_{\sqrt{2}}^{0}2t\,dt+\int_{0}^{x}(-4t)\,dt$$
$$=-2+(-2x^2)=-2x^2-2$$

①, ②에 의하여 $f(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\{3|t|-t\}dt=\int_{\sqrt{2}}^{x}g(t)dt$는
다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} -2x^2-2 & (x<0) \\ x^2-2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

Tip 첫 번째 풀이와 같이 $f'(x)$를 구한 후 부정적분과
연속 조건을 이용하여 $f(x)$를 구하는 방법도 있고,
두 번째 풀이와 같이 범위를 구분하여 직접
정적분의 값을 구하는 방법도 있다.
후자의 경우 범위에 따라 적분해야 하는 함수가
바뀌기 때문에 실수하기 쉽다는 단점이 있다.
특히, ② $x<0$인 경우와 같이 적분구간 안에
적분해야 하는 함수가 달라지는 경우에는 구간을
나누어 적분해야 하기에 실수하기 더욱 쉽다.
따라서 첫 번째 풀이처럼 미분한 뒤 $f'(x)$로 부터
$f(x)$를 구하는 방식이 효율적이다.

189. ②

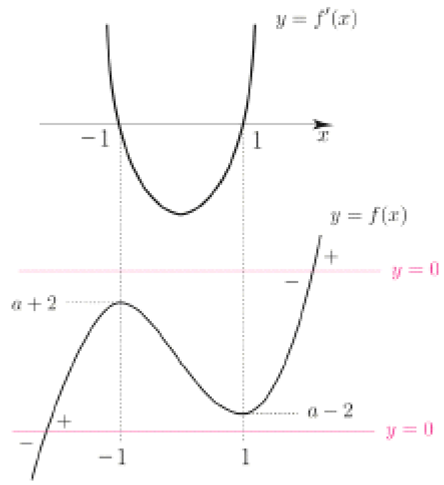
095

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여
$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$
$F(0)=0,\ F'(x)=f(x)=x^3-3x+a$

$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면
$f(x)$의 부호변화가 오직 한 번만 존재해야 한다.

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$
$f(-1)=a+2,\ f(1)=a-2$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$f(x)$의 부호변화가 오직 한 번만 존재해야 하므로
$a+2\leq 0$ or $a-2\geq 0 \Rightarrow a\leq -2$ or $a\geq 2$
따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

Tip 만약 문제에서 함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 것이 아니라 극댓값을 갖도록 하는 것이라면 $f(x)$의 $+$ $-$로 부호변화가 존재해야 하므로 $a-2<0<a+2 \Rightarrow -2<a<2$이다. 단순히 극값이 아니라 극댓값 또는 극솟값을 물어볼 경우 $-$ $+$인지 또는 $+$ $-$인지 도함수의 부호변화에 유의해서 판단해야 한다.

이번에는 사차함수의 성질을 바탕으로 풀어보자.

$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 방정식 $F'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지지 않아야 한다. (Guide step 도함수의 활용 - 사차함수 심화특강 참고하도록 하자. 머릿속에서 사차함수 개형이 떠올라야 한다.)

$F'(x)=0$

$x^3-3x+a=0$

$a=-x^3+3x$

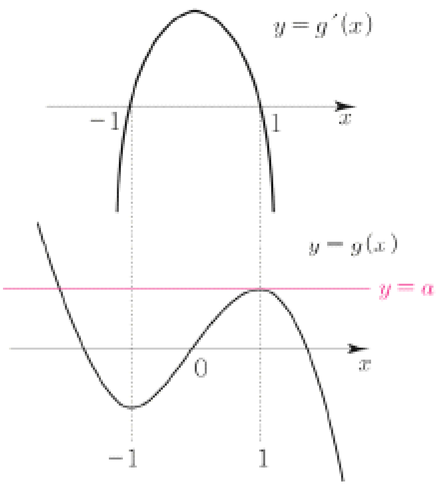
방정식 $a=-x^3+3x$이 서로 다른 세 실근을 가지지 않아야 하므로 곡선 $y=-x^3+3x$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나지 않아야 한다.

$g(x)=-x^3+3x$라 하면

$g'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$

$g(-1)=-2,\ g(0)=0,\ g(1)=2$

$g'(x)$를 바탕으로 $g(x)$를 그리면



따라서 양수 a의 최솟값은 $g(1)=2$이다.

190. 8

103

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4\,dt$$

$$=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4dt-\int_a^x \{f(t)\}^5dt$$

의 양변을 미분하면

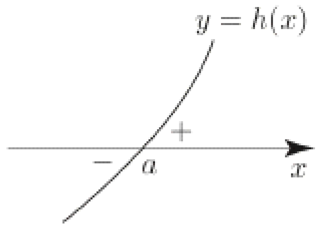
$$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4dt+\{f(t)\}^5-\{f(t)\}^5$$

$$=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4dt$$

$h(x)=\int_a^x \{f(t)\}^4dt$라 하면

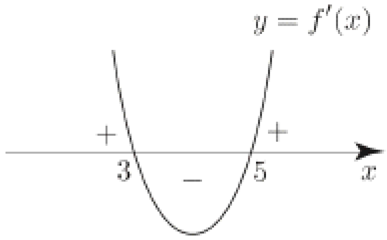
$h(a)=0,\quad h'(x)=\{f(x)\}^4\ \geq 0$

$h(x)$는 증가함수이므로 아래 그림과 같다.



$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x^2-8x+15)$

$=3(x-3)(x-5)$



$g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 $g'(x)=f'(x)h(x)$의 부호변화가 한 번만 있어야 하므로 $a=3$ or $a=5$이어야 한다.

따라서 모든 a의 값의 합은 8이다.

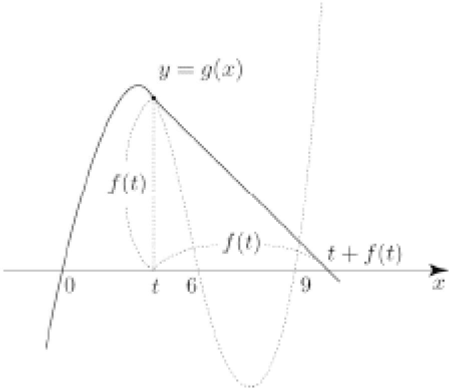
답 8

Tip 비주얼 때문에 쫄지 말자! 한 번 해본다는 마인드로 문제를 풀어보자!

191. ③

090

함수 $g(x)$는 $x \geq t$일 때, 점 $(t,\ f(t))$를 지나고
기울기가 -1인 직선이고, x절편은 $t+f(t)$이다.
$(0<t<6$에서 $f(t)>0$이므로 $t+f(t)>0)$



함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의
넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

양변을 t에 대하여 미분하면
$S'(t)=f(t)+f(t)f'(t)=f(t)\{1+f'(t)\}$

$f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$이므로
$0<t<6$에서 $f(t)>0$이므로
semi $S'(t)=1+f'(t)$이다.

$$1+f'(t)=1+\frac{1}{9}(3t^2-30t+54)=\frac{1}{3}(t-3)(t-7)$$

이므로 $S(t)$는 $0<t<6$에서 $t=3$에서 최댓값을 갖는다.

$$S(3)=\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$$
$$=\frac{1}{9}\int_0^3(x^3-15x^2+54x)dx+18$$
$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3+18$$
$$=\frac{57}{4}+18=\frac{129}{4}$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인
영역의 넓이의 최댓값은 $\frac{129}{4}$이다.

답 ③

192. ②

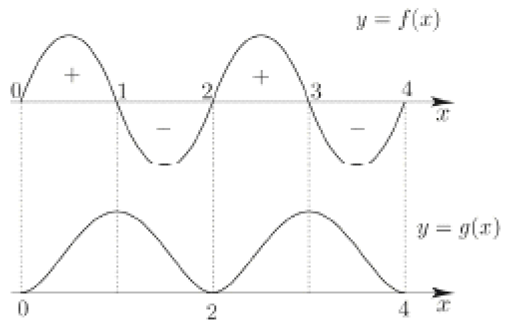
116

$n-1 \leq x < n$일 때, $|f(x)|=|6(x-n+1)(x-n)|$이므로
$n-1 \leq x < n$일 때, $f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 또는
$f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$ 이다.

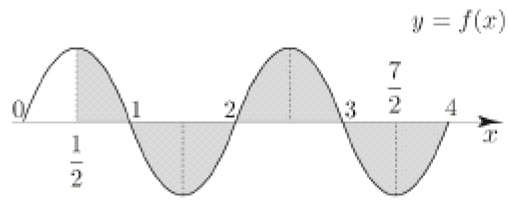
$$g(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^4 f(t)dt$$
$$=F(x)-f(0)-F(4)+F(x)$$
$$=2F(x)-F(0)-F(4)$$

이므로 $g'(x)=2f(x)$이다.

함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수이므로
$x=2$에서 최솟값 0을 가지려면 $x=2$에서 극솟값 0을
가져야 하므로
$g'(2)=0 \Rightarrow f(2)=0$
$g(2)=0 \Rightarrow \int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$
조건을 만족시키려면 $f(x)$가 다음과 같아야 한다.



넓이의 관점에서 대칭성을 활용해보자.



따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx=\int_{\frac{7}{2}}^4 f(x)dx$$
$$=-\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$
$$=-\frac{|6|}{6}(1-0)^3\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

이다.

답 ②

Theme 62 함수의 추론과 정적분

193. 110

104

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$
$\Rightarrow f(0)=0,\ f(1)=1$

(나) 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$

$f(x+1)=xf(x)+ax+b$
양변에 0을 대입하면
$f(1)=b \Rightarrow b=1$

$x+1=t$라 하면
$f(t)=(t-1)f(t-1)+a(t-1)+1 \ (1\le t\le 2)$
$t-1$은 $0\le t-1\le 1$이므로 (가) 조건에 의해
$1\le t\le 2$에서
$f(t)=(t-1)(t-1)+a(t-1)+1$

$=t^2-2t+1+at-a+1$

$=t^2+(a-2)t-a+2$

이를 바탕으로 $0\le x\le 2$에서 $f(x)$를 구하면

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x\le 1) \\ x^2+(a-2)x-a+2 & (1<x\le 2)\end{cases}$$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$x=1$에서 미분가능해야 한다.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1,\ \lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2+a-2=a$$
$\Rightarrow a=1$

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x\le 1) \\ x^2-x+1 & (1<x\le 2)\end{cases}$$
이므로

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^2-x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2$$
$$=\frac{8}{3}-2+2-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{6}$$

따라서 $60\times\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}=110$이다.

답 110

Theme 63 정적분으로 정의된 함수의 빼기함수 Technique

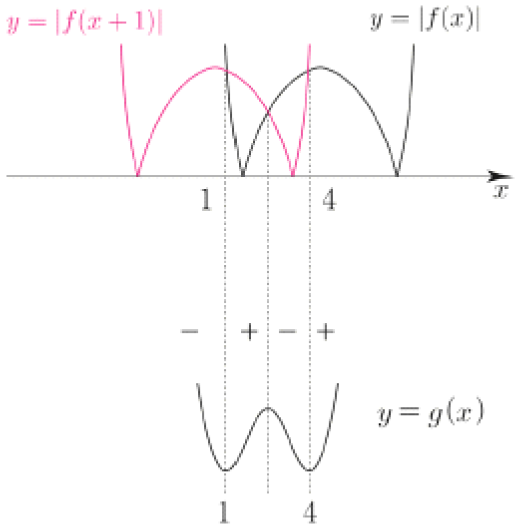
194. 13

107

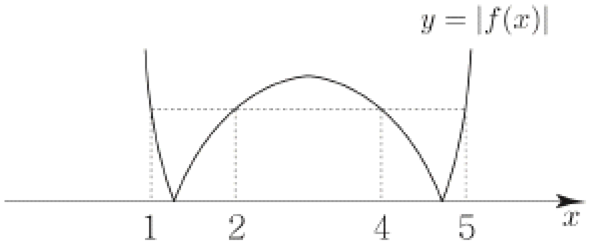
빼기함수 Technique을 활용하여 구해보자.
$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt \Rightarrow g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$

$y=|f(x+1)|$의 그래프는 $y=|f(x)|$의 그래프를
x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시켜 그릴 수 있다.

함수 $g(x)$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이므로
다음 그림과 같다.



$g'(1)=0 \Rightarrow |f(2)|=|f(1)| \Rightarrow f(1)=-f(2)$
$g'(4)=0 \Rightarrow |f(5)|=|f(4)| \Rightarrow -f(4)=f(5)$



$f(x)=2x^2+ax+b$라 하면

$f(1)=-f(2) \Rightarrow 2+a+b=-8-2a-b$

$\Rightarrow 3a+2b=-10 \cdots$ ㉠

$-f(4)=f(5) \Rightarrow -32-4a-b=50+5a+b$

$\Rightarrow -9a-2b=82 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a=-12$, $b=13$이므로

$f(x)=2x^2-12x+13$이다.

따라서 $f(0)=13$이다.

답 13

195. 43

119

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

$g(a)=\int_a^{a+4} f(x)dx$라 하면

$g(a)=F(a+4)-F(a)$

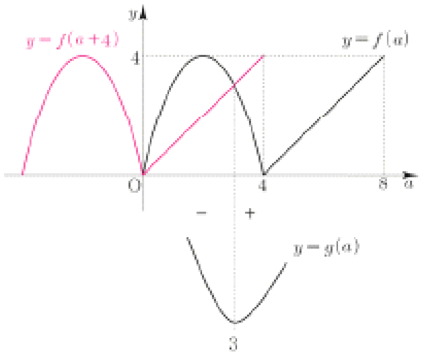
양변을 a에 대해 미분하면

$g'(a)=f(a+4)-f(a)$

$y=f(a+4)$의 그래프는 $y=f(a)$의 그래프를

a축 방향으로 -4만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

빼기함수 Technique을 사용하여 $g(a)$를 그려보자.



두 곡선 $y=f(a+4)$, $y=f(a)$는 $a=3$에서 만난다.

$(\because a=-a(a-4) \Rightarrow a=0 \text{ or } a=3)$

$0 \le a \le 4$에서 $g(a)$는 $a=3$에서 최솟값을 가지므로

$$g(3)=\int_3^7 f(x)dx=\int_3^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$

$$=\int_3^4(-x^2+4x)dx+\int_4^7(x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_3^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^7=\frac{37}{6}$$

따라서 $p+q=43$이다.

답 43

직접 $\int_a^{a+4} f(x)dx$를 구해서 풀어보자.

$$\int_a^{a+4} f(x)dx=\int_a^4 f(x)dx+\int_4^{a+4} f(x)dx$$

$$=\int_a^4(-x^2+4x)dx+\int_4^{a+4}(x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4}$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$라 하면

$g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$이므로

$0 \le a \le 4$일 때, $g(a)$는 $a=3$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $g(3)=\frac{37}{6}$이다.

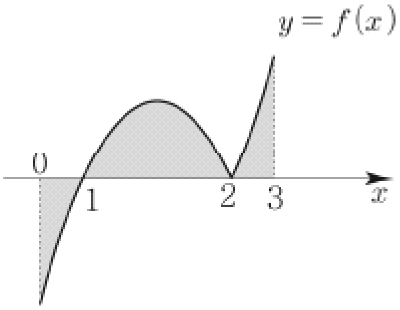
Theme 64 곡선과 x축 사이의 넓이

196. 22

006

$f(x)=(x-1)|x-2|$

$$f(x)=\begin{cases} -(x-1)(x-2) & (x<2) \\ (x-1)(x-2) & (x \geq 2) \end{cases}$$



$$\int_0^1 -f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$

대칭성에 의해서 $\int_0^1 -f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx$이므로

$$\int_0^1 -f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+2\int_2^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 -(x-1)(x-2)dx+2\int_2^3 (x-1)(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}(2-1)^3+2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{10}{6}=\frac{11}{6}=k$$

따라서 $12k=22$이다.

답 22

197. 13

007

$$\int_{-4}^1 \{2f(x)+|f(x)|-3\}dx$$

$$=2\int_{-4}^1 f(x)dx+\int_{-4}^1 |f(x)|dx-\int_{-4}^1 3dx$$

$$=2(\mathrm{A}-\mathrm{B})+(\mathrm{A}+\mathrm{B})-15$$

$$=2(10-2)+(10+2)-15$$

$$=16+12-15=13$$

답 13

198. ②

054

(A의 넓이) $-$ (B의 넓이) $=3$이므로

$\int_0^3 f(x)dx=3$ 이어야 한다.

(위 풀이가 이해가 잘되지 않는다면 Guide Step에서 개념 파악하기 (4) 두 곡선 사이의 넓이를 활용하여 문제를 어떻게 해결할까?를 참고하도록 하자.)

$f(x)=kx(x-2)(x-3)=k(x^3-5x^2+6x)$

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 k(x^3-5x^2+6x)dx$$

$$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$$

$$=k\left(\frac{81}{4}-45+27\right)=\frac{9}{4}k=3$$

따라서 $k=\frac{4}{3}$이다.

답 ②

199. ④

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 y축에 의하여 이등분된다.

이때 $A=2B$이므로

$$\int_0^k (-x^2+2x+6)dx=0$$

이어야 한다. 즉,

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k=0$$

$$-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$$

$$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6)=0$$

$k>4$이므로 $k=6$

정답 ④

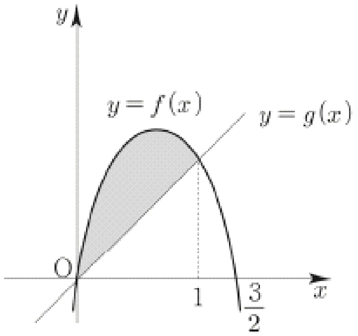
Theme 65 곡선과 직선 사이의 넓이

200. 4

045

$f(x) = -2x^2+3x,\ g(x)=x$

$-2x^2+3x=x \Rightarrow 2x(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ or $x=1$



둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^1(-2x^2+3x-x)dx$$

$$=\int_0^1(-2x^2+2x)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}=\frac{q}{p}$$

따라서 $p+q=4$이다.

답 4

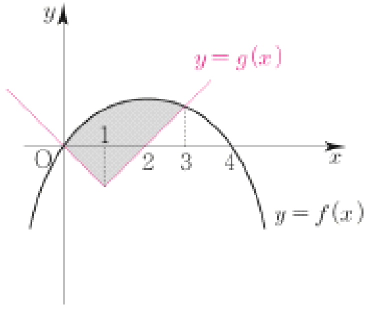
공식을 사용하면 $\frac{|-2|}{6}(1-0)^3=\frac{1}{3}=\frac{q}{p}$

201. 14

054

$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\ g(x)=|x-1|-1$

$\frac{1}{3}x(4-x)=x-2 \Rightarrow x=3\ (\because x>2)$



$$S=\int_0^3\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(-x)\right\}dx$$

$$+\int_1^3\left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(x-2)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3=\frac{7}{2}$$

따라서 $4S=14$이다.

답 14

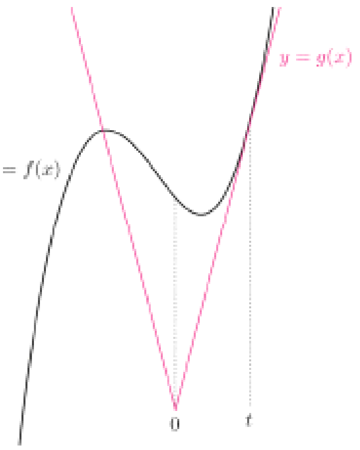
202. 80

073

$f(x)=x^3+x^2-x$

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2이므로 다음 그림과 같아야 한다.



직선 $y=4x+k$이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때,

접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=4t+k \Rightarrow t^3+t^2-t=4t+k$

$\Rightarrow t^3+t^2-5t=k$ ⋯ ㉠

$f'(t)=4 \Rightarrow 3t^2+2t-1=4 \Rightarrow (3t+5)(t-1)=0$

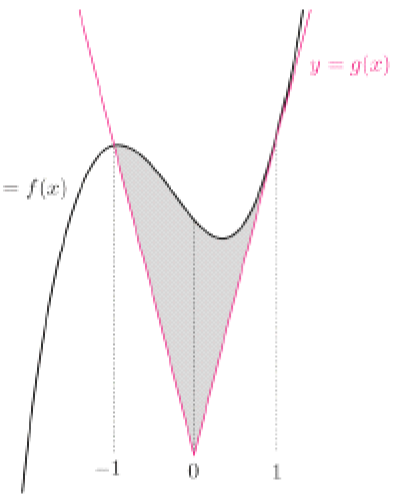
$\Rightarrow t=1$ ($\because$ $t>0$)

㉠에 $t=1$을 대입하면 $1+1-5=k \Rightarrow k=-3$이다.

$-4x-3=x^3+x^2-x \Rightarrow x^3+x^2+3x+3=0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2+3)=0 \Rightarrow x=-1$

이므로 직선 $y=-4x-3$과 곡선 $y=f(x)$는 $(-1,\ f(-1))$에서 교점을 가진다.



$$S=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\{x^3+x^2-x-(-4x-3)\}dx$$

$$+\int_{0}^{1}\{x^3+x^2-x-(4x-3)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+3+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+3$$

$$=\frac{8}{3}$$

따라서 $30\times S=30\times\frac{8}{3}=80$이다.

답 80

203. ③

13. 출제의도 : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$, $g(x)=mx+2$라 하고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$$A=\int_{0}^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$B=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

따라서

$B-A$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx-\int_{0}^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{0}^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}\left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_{0}^{2}$$

$=1+1-2m-4$

$=-2m-2=\frac{2}{3}$

따라서 $m=-\frac{4}{3}$

정답 ③

Theme 66 두 곡선 사이의 넓이

204. 4

19. 출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

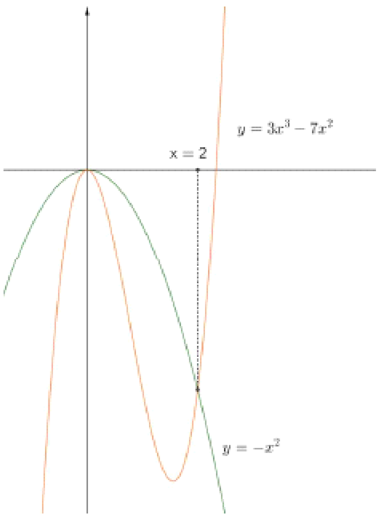
두 곡선 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$이 만나는 점의 x좌표는

$3x^3-7x^2=-x^2$

$3x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

이때, 두 함수 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2\{(-x^2)-(3x^3-7x^2)\}dx$

$=\int_0^2(-3x^3+6x^2)dx$

$=\left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3\right]_0^2$

$=(-12+16)-0$

$=4$

정답 4

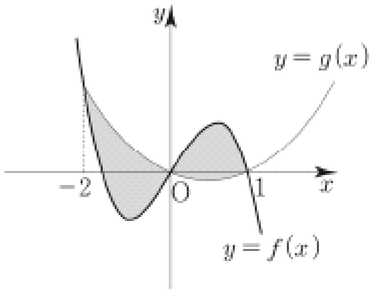
205. 49

017

$f(x)=-x^3+x$, $g(x)=x^2-x$

$-x^3+x=x^2-x \Rightarrow x(x+2)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=-2$ or $x=0$ or $x=1$



둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-2}^{0}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_{-2}^{0}\{(x^2-x)-(-x^3+x)\}dx$

$+\int_0^1\{(-x^3+x)-(x^2-x)\}dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_0^1(-x^3-x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$

$=\frac{37}{12}=\frac{q}{p}$

따라서 $p+q=49$이다.

답 49

206, ③

15. 최고차항의 계수가 1인 두 사차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{|x| \mid f(x)=g(x),\ x는\ 실수\} = \{0,\ 1\}$

(나) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx$ $\Rightarrow \int_{-1}^{1} f-g\,dx = 0$

(다) $\int_{0}^{2} f(x)dx = 1,\ \int_{0}^{2} g(x)dx = -7$

$\int_{-3}^{3} |f(x)-g(x)|dx$의 값은? [4점]

① 126 ② 128 ③ 130 ④ 132 ⑤ 134

$\int_{-1}^{1} x^3 - x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx$

$f(x)-g(x)=0$

3차 $a x^3(x-1)$ (나)거짓 X

$a x^2(x+1)$ X

$a (x+1)^2 x$ X

$a (x-1)^2 x$ X

$a x(x-1)(x+1)$ O

2차 $a x(x+1)$ X

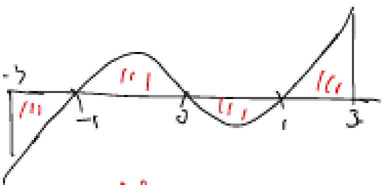
$\therefore f(x)-g(x) = a x(x-1)(x+1) = a x(x^2-1)$

$= a(x^3 - x)$

$\int_0^2 f-g\,dx = a\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 8$

$a(4-2)=8 \Rightarrow a=4$

$f(x)-g(x) = 4(x^3-x)$



$2\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx$

$= 2\left(\int_0^1 -4(x^3-x)\,dx + \int_1^3 4(x^3-x)\,dx\right)$

$= 130$

207. ④

071

두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 $x=2$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 C라 하면

$\int_0^2 (-x^2+k)dx = A+C$, $\int_0^2 (x^3+x^2)dx = B+C$

이고, $A=B$이므로 두 식을 빼면

$\int_0^2 (-x^2+k-x^3-x^2)dx = 0 \Rightarrow \int_0^2 (-x^3-2x^2+k)dx = 0$

$\Rightarrow \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + kx\right]_0^2 = 0 \Rightarrow 2k = \frac{28}{3} \Rightarrow k = \frac{14}{3}$

따라서 상수 $k=\frac{14}{3}$이다.

답 ④

Theme 67 넓이의 분할

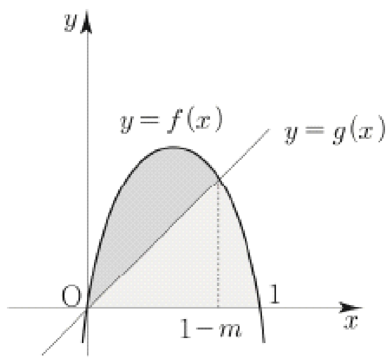
208. 2

025

$f(x) = -x^2+x = -x(x-1)$, $g(x) = mx$

$-x^2+x = mx \Rightarrow x(x+m-1)=0$

$\Rightarrow x=0$ or $x=1-m$



$\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^{1-m} \{f(x)-g(x)\}dx$

$\frac{1}{6}(1-0)^3 = 2\times\frac{1}{6}(1-m-0)^3$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{3}(1-m)^3$

$\frac{1}{2} = (1-m)^3$

따라서 $4(1-m)^3 = 2$이다.

답 2

209. ①

049

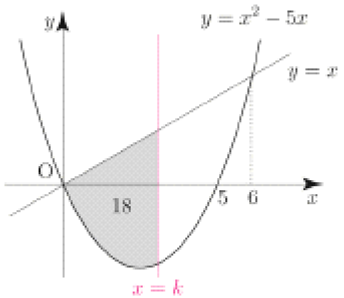
$x^2-5x=x \Rightarrow x(x-6)=0 \Rightarrow x=0$ or $x=6$이므로

곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 0, 6

이므로 둘러싸인 부분의 넓이는 넓이공식에 의해

$\frac{|1|}{6}(6-0)^3=36$이다.

(물론 $\int_0^6 \{x-(x^2-5x)\}dx$로 구해도 된다.)



곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를

직선 $x=k$가 이등분하므로

$$\int_0^k \{x-(x^2-5x)\}dx=18$$

$$\Rightarrow \int_0^k (-x^2+6x)dx=18$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^k=-\frac{1}{3}k^3+3k^2=18$$

$\Rightarrow k^3-9k^2+54=0$

$\Rightarrow (k-3)(k^2-6k-18)=0$

$\Rightarrow k=3$ or $k=3\pm3\sqrt{3}$

$\Rightarrow k=3$ ($\because$ $0<k<5$)

따라서 상수 $k=3$이다.

답 ①

Theme 68 역함수의 그래프와 넓이

210. 10

028

$f(x)=x^3-2x^2+2x$

$f'(x)=3x^2-4x+2 \;\; \geq 0$

$f(x)$는 증가함수이므로 $f(x)$와 역함수 $g(x)$의

그래프의 교점은 반드시 $y=x$선상에 존재한다.

(함수의 연속 Master step 64번 해설 tip 참고)

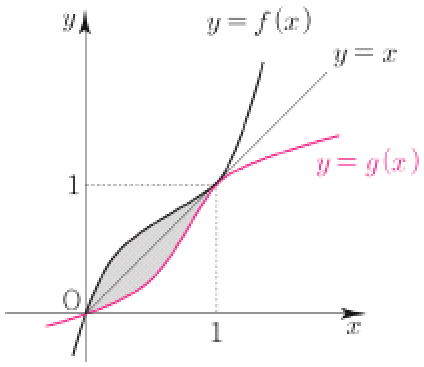
$x^3-2x^2+2x=x \Rightarrow x(x-1)^2=0$

$\Rightarrow x=0$ or $x=1$

($x=1$에서 중근을 가지므로 곡선 $y=f(x)$는

직선 $y=x$와 (1, 1)에서 접한다.)

즉, (0, 0), (1, 1)에서 만난다.



$$k=\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx=2\int_0^1 \{f(x)-x\}dx$$

$$=2\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{6}$$

따라서 $60k=10$이다.

답 10

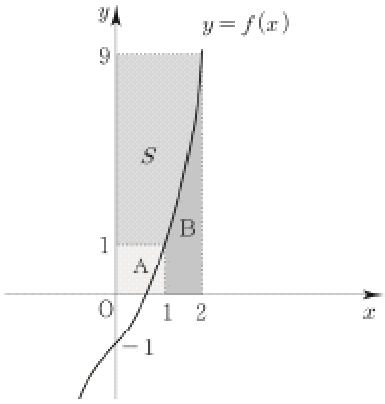
211. ③

058

$f(x)=x^3+x-1$

$f(1)=1,\ f(2)=9$

$\int_1^9 g(x)dx=S$라 하면



$\mathrm{A}=1\times1=1$

$\mathrm{B}=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^3+x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2=\frac{17}{4}$

큰 직사각형의 넓이 $=2\times9=18$

큰 직사각형의 넓이 $-(\mathrm{A}+\mathrm{B})=S$이므로

$18-\left(1+\frac{17}{4}\right)=\frac{68}{4}-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}=S$

답 ③

Theme 69 속도와 거리

212. 6

043

$v(t)=3t^2-4t+k$

$x(t)=t^3-2t^2+kt\ (\because x(0)=0)$

$x(1)=-3 \Rightarrow -1+k=-3 \Rightarrow k=-2$

$x(t)=t^3-2t^2-2t$이므로

$x(3)=27-18-6=3$이다.

따라서 시각 $t=1$에서 $t=3$까지의 점 P의 위치의 변화량은

$\int_1^3 v(t)dt=x(3)-x(1)=3-(-3)=6$이다.

답 6

213. ③

050

$v(t)=-4t^3+12t^2$

$v'(t)=-12t^2+24t$

$v'(k)=12 \Rightarrow -12k^2+24k=12 \Rightarrow k^2-2k+1=0$

$\Rightarrow (k-1)^2=0 \Rightarrow k=1$

닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 $v(t)=-4t^2(t-3)<0$이므로

$|v(t)|=-v(t)$ 이다.

따라서 시각 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_3^4|v(t)|dt=\int_3^4-v(t)dt$

$=\int_3^4(4t^3-12t^2)dt$

$=\left[t^4-4t^3\right]_3^4$

$=0-(81-108)=27$

이다.

답 ③

214. ⑤

088

$v_1(t)=3t^2+4t-7,\ v_2(t)=2t+4$

$x_1(0)=1,\ x_2(0)=8$이므로

$x_1(x)=t^3+2t^2-7t+1,\ x_2(t)=t^2+4t+8$

점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$f(t)=|t^3+2t^2-7t+1-(t^2+4t+8)|$

$=|t^3+t^2-11t-7|$

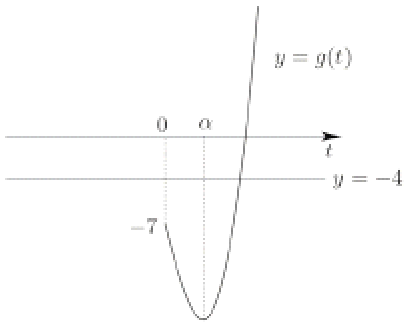
$g(t)=t^3+t^2-11t-7$이라 하면

$g'(t)=3t^2+2t-11$

$g'(t)=0 \Rightarrow t=\frac{-1-\sqrt{34}}{3}$ or $t=\frac{-1+\sqrt{34}}{3}$

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{34}}{3}$ 라 하자.

이를 바탕으로 $g(t)$를 그리면



$f(t)=4$를 만족시키는 양수 t의 최솟값은
$g(t)=-4$를 만족시키는 양수 t와 같다.

$g(t)=-4 \Rightarrow t^3+t^2-11t-7=-4$

$\Rightarrow t^3+t^2-11t-3=0$

$\Rightarrow (t-3)(t^2+4t+1)=0$

$\Rightarrow t=3$

$t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 S라 하면

$$S=\int_0^3 |v_1(t)|dt = \int_0^3 |3t^2+4t-7|dt$$

$$=\int_0^1 (-3t^2-4t+7)dx + \int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$$

$$=\left[-t^3-2t^2+7t\right]_0^1 + \left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$$

$$=4+28=32$$

이다.

답 ⑤

215. ⑤

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(2)와 점 B(k)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2-4, \quad v_2(t)=8$$

이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 $t=a\,(a>0)$에서 한 번만 만나도록 하는 모든 실수 k에 대하여 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리의 최솟값은? [4점]

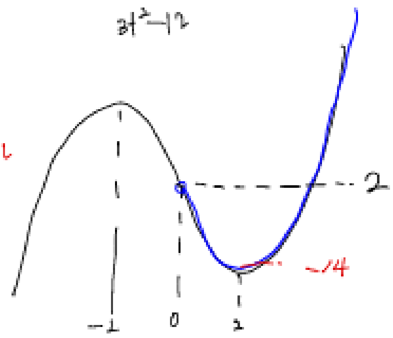
① $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$　② $\dfrac{26\sqrt{3}}{9}$　③ $\dfrac{28\sqrt{3}}{9}$　④ $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$

$x_1(t)=t^3-4t+2$, $x_2(t)=8t+k$

$t^3-4t+2=8t+k$

$t^3-12t+2=k.$

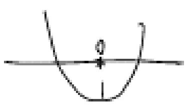
$3t^2-12$



그래프에서 k 범위. k=−14 , 2<k.

즉, a의 최솟값은 2.

$$\int_0^2 |3t^2-4|dt = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} -3t^2+4\,dt + \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 3t^2-4\,dt$$



$$=\frac{32}{9}\sqrt{3}$$

4/20

216. 17

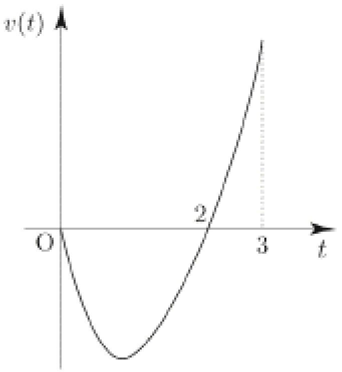
074

(나) 조건에서 $t \ge 2$일 때, $v(t) = 3t^2 + 4t + C$이다.
$a(2) = 16$이므로 $v(t)$는 $t = 2$에서 미분가능하므로
$v(t)$는 $t = 2$에서 연속이다.
$\lim_{t \to 2-} v(t) = 16 - 16 = 0$, $\lim_{t \to 2+} v(t) = 20 + C$

$\Rightarrow \lim_{t \to 2-} v(t) = \lim_{t \to 2+} v(t) \Rightarrow C = -20$

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \le t \le 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (t > 2) \end{cases}$$

이를 바탕으로 $v(t)$를 그리면 다음과 같다.



$$\int_0^3 |v(t)|\,dt = \int_0^2 (-2t^3 + 8t)\,dt + \int_2^3 (3t^2 + 4t - 20)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}t^4 + 4t^2\right]_0^2 + \left[t^3 + 2t^2 - 20t\right]_2^3$$

$$= 8 + 9 = 17$$

따라서 시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리는 17이다.

답 17

217. ③

059

$\int_0^a |v(t)|\,dt = A$, $\int_a^b |v(t)|\,dt = B$,
$\int_b^c |v(t)|\,dt = C$이라 하자.

점 P는 원점에서 출발한 후 시각 $t = a$에서 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 위치가 -8이므로
$-A = -8 \Rightarrow A = 8$

점 P의 시각 $t = c$에서의 위치가 -6이므로
$-A + B - C = -6 \Rightarrow B - C = 2 \cdots$ ㉠

$\int_0^b v(t)\,dt = \int_b^c v(t)\,dt$이므로
$-A + B = -C \Rightarrow B + C = 8 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $B = 5$, $C = 3$
따라서 점 P가 $t = a$부터 $t = b$까지 움직인 거리는
$\int_a^b |v(t)|\,dt = B = 5$이다.

답 ③

Theme 70 함수의 추론과 넓이

218. ③

064

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속

(가) $f(x)=ax^2(0 \le x < 2)$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$

$f(x+2)=f(x)+2$

양변에 $x=0$을 대입하면 $f(2)=f(0)+2$

(가) 조건에 의해서 $f(0)=0$이므로 $f(2)=2$이다.

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2} f(x)=f(2) \Rightarrow 4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(0 \le x < 2)$

$f(x+2)=f(x)+2$

$x+2=t$라 하면

$f(t)=f(t-2)+2 \ (2 \le t < 4)$

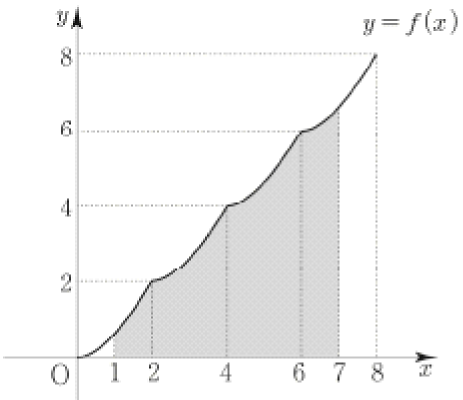
$t-2$는 $0 \le t-2 < 2$ 이므로 (가) 조건에 의해

$f(t-2)=\frac{1}{2}(t-2)^2$이므로

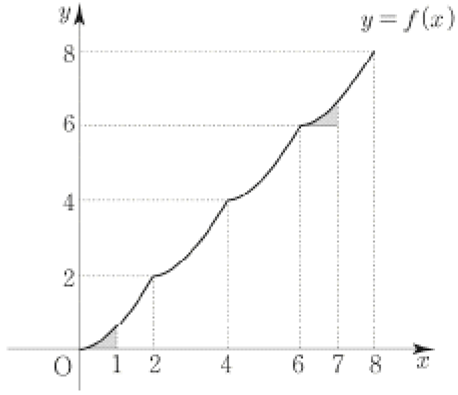
$f(t)=\frac{1}{2}(t-2)^2+2 \ (2 \le t < 4)$

즉, 이전 구간의 함수를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시켜 다음 구간의 함수를 찾을 수 있다.

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면

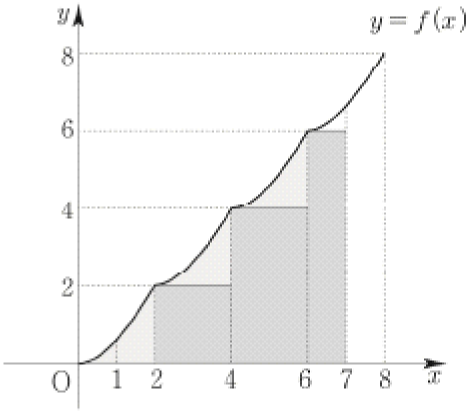


$\int_1^7 f(x)dx$는 위의 색칠한 영역의 넓이와 같다.



위 색칠한 두 영역의 넓이가 같으므로

$\int_1^7 f(x)dx$는 아래의 색칠한 영역의 넓이와 같다.



위 색칠한 영역의 넓이를 S라 하면

$S=3\int_0^2 \frac{1}{2}x^2dx+(2\times2)+(2\times4)+(1\times6)$

$=3\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2+18=22$

따라서 $\int_1^7 f(x)dx=22$이다.

답 ③

219. 17

077

$a>0$, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속

(가) $f(x)=2x^2+ax$ $(0\le x<1)$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)+a^2$

$f(x+1)=f(x)+a^2$

양변에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=f(0)+a^2$

(가) 조건에 의해서 $f(0)=0$이므로 $f(1)=a^2$이다.

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Rightarrow 2+a=a^2 \Rightarrow a=2$ $(\because a>0)$

$f(x)=2x^2+2x=2x(x+1)$ $(0\le x<1)$

$f(x+1)=f(x)+4$

$x+1=t$라 하면

$f(t)=f(t-1)+4$ $(1\le t<2)$

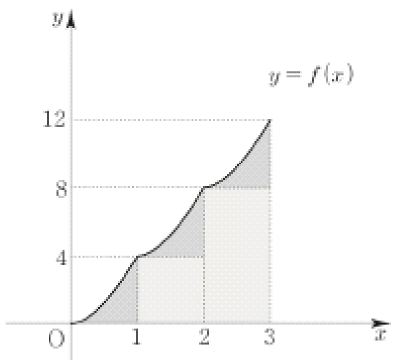
$t-1$는 $0\le t-1<1$이므로 (가) 조건에 의해

$f(t-1)=2(t-1)t$이므로

$f(t)=2(t-1)t+4$ $(1\le t<2)$

즉, 이전 구간의 함수를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 후 y축의 방향으로 4만큼 평행이동시켜 다음 구간의 함수를 찾을 수 있다.

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



위 색칠한 영역의 넓이를 S라 하면

$$S=3\int_0^1 f(x)dx+4+8=3\int_0^1(2x^2+2x)dx+12$$

$$=3\left[\frac{2x^3}{3}+x^2\right]_0^1+12=5+12=17$$

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 17이다.

답 17

220. ②

085

$a_n=2n-1$

$\mathrm{P}_n=(a_n,\ b_n)$이라 하자.

(가) 조건에 의해서 $a_1=1,\ b_1=1$

(다) 조건에 의해서

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2}a_{n+1}$$

$$\Rightarrow b_{n+1}-b_n=a_{n+1}=2n+1$$

라이트 N제 수1 수열 中 3. 수학적 귀납법 Guide step "개념 파악하기 (1) 수열의 귀납적 정의란 무엇일까?" 에서 배웠듯이

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=1+\frac{(n-1)(2n+2)}{2}=n^2$$

(물론 b_n의 일반항을 직접 구하지 않고, 그냥 나열하여 구해도 된다.)

Tip

$a_{n+1}-a_n=b_n$꼴 (라이트 수1 복습)

$a_{n+1}-a_n=b_n$의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입한 뒤 변끼리 더한다.

$$a_2-a_1=b_1$$
$$a_3-a_2=b_2$$
$$a_4-a_3=b_3$$
$$\vdots$$
$$a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$$

$$\Rightarrow\quad a_n-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

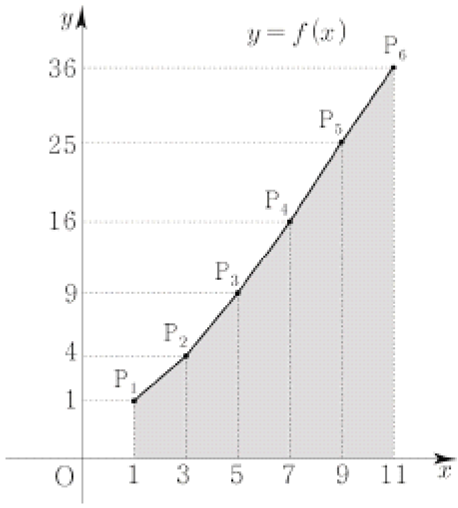
$\mathrm{P}_n=(a_n,\ b_n)=(2n-1,\ n^2)$이므로

$\mathrm{P}_1(1,\ 1),\ \mathrm{P}_2(3,\ 4),\ \mathrm{P}_3(5,\ 9),\ \mathrm{P}_4(7,\ 16),\ \mathrm{P}_5(9,\ 25),$

$P_6(11,\ 36)$

이다.

$x\ge 1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 일치하므로 이를 바탕으로 $f(x)$의 그래프를 그리면



$\int_{1}^{11} f(x)dx$의 값은 사다리꼴의 넓이의 합과 같다.

$$\int_{1}^{11} f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times(1+4)+\frac{1}{2}\times2\times(4+9)+\frac{1}{2}\times2\times(9+16)$$
$$+\frac{1}{2}\times2\times(16+25)+\frac{1}{2}\times2\times(25+36)$$
$$=5+13+25+41+61=145$$

답 ②

Tip

P_n의 y좌표를 b_n으로 두고 P_n의 좌표만 구했다면 어렵지 않게 풀 수 있었다.
이 문제를 풀지 못했던 학생들의 대부분은 아마 비주얼에 압도당했을 가능성이 크다.
절대 쫄지 말자!!! 그냥 한 번 해본다는 마인드는 문제를 풀기 위한 아주 강력한 Tool이다.