$-10 \le a \le 10$, $-10 \le b \le 10$, $1 \le m \le 4$, $1 \le n \le 4$인 네 정수 a, b, m, n에 대하여 함수

$f(x) = x^{m+n} - ax^m - bx^n + ab$가 다음 조건을 만족한다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2 이상이며 서로 다른 모든 실근의 곱은 자연수이다.

서로 다른 순서쌍 (a, b, m, n)의 개수를 구하시오.

김지헌

$f(x)=x^{m+n}-ax^m-bx^n+ab=(x^n-a)(x^m-b)$에서 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근만을 원소로 갖는 집합은 a의 n제곱근과 b의 m제곱근 모두를 원소로 갖는 집합과 동일하다.

실수 a의 n제곱근을 대할 때 행동강령은 n의 홀짝성을 고려한 이후, n이 짝수일 때 a의 부호에 따라 실수 a의 n제곱근의 개수가 달라짐을 관찰하는 것이었다. 이 문제 역시 동일하게 접근하자.

n이 홀수일 때 a의 부호에 관계없이 a의 n제곱근은 오직 하나로 존재하며, a의 부호와 a의 n제곱근의 부호는 동일하다. n이 짝수일 때 a의 n제곱근의 개수는 a가 양수일 때 2, a가 0일 때 1, a가 음수일 때 0이다. 특히 a가 양수일 때 모든 a의 n제곱근의 곱은 $-a^{\frac{2}{n}}$로 음수이다.

이때 a의 n제곱근이면서 b의 m제곱근인 실수가 존재한다면, 오직 하나만 세어야 하므로 조심하자.

a의 n제곱근중 실수인 것을 모두 곱한 것을 A, b의 m제곱근중 실수인 것을 모두 곱한 것을 B라 하자. 이때 문제를 풀기 위해 세 가지 보조정리를 세워 케이스를 분류할 수 있다.

김지헌

lemma.

i) a의 n제곱근이면서 b의 m제곱근인 실수는 존재하지 않는다.

ii) A와 B는 둘 다 정수이거나 둘 다 무리수이다.

iii) A와 B는 둘 다 양수이거나 둘 다 음수이다.

우선 위의 세 가지 보조정리는 귀류법을 통해서 증명할 수 있는데, i)부터 관찰하자.

a의 n제곱근과 b의 m제곱근인 실수가 존재하며 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 곱이 양수일 때가 존재하는지 고려해보자. n과 m이 모두 홀수일 때 a의 n제곱근과 b의 m제곱근은 모두 하나씩 존재하므로 a의 n제곱근과 b의 m제곱근이 동일할 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 모순이다. n이 짝수이고 a가 음수일 때 a의 n제곱근과 b의 m제곱근인

실수가 존재할 수 없다. 즉 n이 짝수라면 a는 반드시 양수이다. 이때 모든 a의 n제곱근의 곱은 음수이므로 b의 m제곱근이면서 a의 n제곱근이 아닌 수는 반드시 음수로 존재해야한다.

b의 m제곱근이 두 음수가 될 수 없으므로 a의 n제곱근이면서 b의 m제곱근인 수는 양수여야 한다. 즉, b는 음수이고 m은 짝수이다. 이때 모든 a의 n제곱근과 모든 b의 m제곱근은 동일하게 되므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 곱이 양수가 될 수 없어 모순이다.

m이 짝수이고 b가 양수일 때 위의 경우와 동일하므로 위의 방정식이 중근을 갖는 경우는 없다.

a의 n제곱근이 정수라면 b의 m제곱근 역시 정수이면서, 대우가 성립하므로 b의 m제곱근이 정수가 아니라면 a의 n제곱근이 정수가 아니다! (동시에 위 명제의 이와 역 또한 성립한다.)

$ii)$와 $iii)$은 앞서 자연수 전체의 집합이 양수 전체의 집합과 정수 전체의 집합의 교집합이었음을 통해 떠올릴 수 있다. $ii)$의 경우 귀류법에 의하여 하나는 0이 아닌 정수, 하나는 무리수인 경우 그 곱은 반드시 무리수가 되기 때문에, $iii)$의 경우 귀류법에 의하여 하나는 양수, 하나는 음수인 경우 그 곱은 반드시 음수가 되기 때문에 주어진 조건을 만족할 수 없다.

이제 n의 값에 따라 A를 관찰하자. (아래의 경우들은 m의 값에 따른 B의 경우와 동일하다.)

n의 값이~

1인 경우 : a의 값에 관계없이 모든 A의 값은 정수이며, a의 값에 따라 부호변화가 존재한다.

2인 경우 : a의 값에 관계없이 모든 A의 값은 음인 정수이다.

3인 경우 : a가 세제곱수(-8, -1, 1, 8)라면 A의 값은 정수이며, a의 값에 따라 부호변화가 존재한다. a가 세제곱수가 아니라면 A의 값은 정수가 아니다.

4인 경우 : a가 제곱수(1, 4, 9)라면 모든 A의 값은 음인 정수이며, a가 제곱수가 아니라면 A의 값은 정수가 아니다.

김지헌

① A와 B가 둘 다 자연수일 때,

$n=1$일 때 가능한 a의 개수는 $a=1,\ 2,\ \cdots,\ 10$에서 10이다. $n=2$일 때 A는 음의 정수이다.

$n=3$일 때 가능한 a의 개수는 $a=1,\ 8$에서 2이다. $n=4$일 때 A는 음수이다.

위의 경우들에서 가능한 순서쌍 $(n,\ a)$의 개수는 12이다.

이때 보조정리 i) a의 n제곱근이면서 b의 m제곱근인 실수는 존재하지 않았음을 떠올리자.

즉, m의 값에 따른 B의 경우와 동일하므로, 가능한 경우의 수는 12×11이다. 이제 $n=m$이고

$a=b$인 경우가 아니지만 a의 n제곱근이면서 b의 m제곱근인 실수가 존재하는 경우를 제외하자.

$\sqrt[3]{1}=1$이고 $\sqrt[3]{8}=2$이므로 $(a,\ b,\ m,\ n)=(3,\ 1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 3,\ 1,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2,\ 8),\ (1,\ 3,\ 8,\ 2)$을

제외하면 $12\times11-4=128$에서 A와 B가 둘 다 자연수일 때 가능한 경우의 수는 128이다.

② A와 B가 둘 다 음의 정수일 때,

$n=1$인 경우와 $n=2$인 경우에 가능한 a의 개수는 $a=-1,\ -2,\ \cdots,\ -10$에서 모두 10이다.

$n=3$일 때 가능한 a의 개수는 $a=-1,\ -8$에서 2이다. $n=4$일 때 가능한 a의 개수는

$a=-1,\ -4,\ -9$에서 3이다. 위의 경우들에서 가능한 순서쌍 $(n,\ a)$의 개수는 25이다.

m의 값에 따른 B의 경우와 동일하므로, 가능한 경우의 수는 25×24이다. 이제 $n=m$이고

$a=b$인 경우가 아니지만 a의 n제곱근이면서 b의 m제곱근인 실수가 존재하는 경우를 제외하자.

a의 n제곱근이면서 b의 m제곱근인 수가 무리수인 경우에도 $A,\ B$는 정수일 수 있음을 유의하자!

a의 n제곱근이면서 b의 m제곱근인 실수가~

-1인 경우 : $-\sqrt[4]{1},\ -\sqrt[3]{1},\ -\sqrt{1},\ -1$에서 순서쌍 $(a,\ b,\ m,\ n)$은 4×3개 존재한다.

-2인 경우 : $-\sqrt[3]{8},\ -\sqrt{4},\ -2$에서 순서쌍 $(a,\ b,\ m,\ n)$은 3×2개 존재한다.

-3인 경우 : $-\sqrt{9},\ -3$에서 순서쌍 $(a,\ b,\ m,\ n)$은 2×1개 존재한다.

김지헌

$-\sqrt{2}$인 경우 : $-\sqrt[4]{4}$, $-\sqrt{2}$에서 순서쌍 $(a,\ b,\ m,\ n)$은 2×1개 존재한다.

$-\sqrt{3}$인 경우 : $-\sqrt[4]{9}$, $-\sqrt{3}$에서 순서쌍 $(a,\ b,\ m,\ n)$은 2×1개 존재한다.

a, b, m, n의 범위를 고려하였을 때 위의 경우가 가능한 모든 경우의 수이며, 총 24개다.

즉, A와 B가 둘 다 음의 정수일 때 가능한 경우의 수는 576이다.

③ A와 B가 둘 다 무리수일 때,

$n=3$ 또는 $n=4$인 경우 A가 무리수일 수 있었음을 떠올리자. $n=3$이고 $m=4$인 경우 (혹은 $n=4$이고 $m=3$인 경우) A와 B의 곱이 정수일 수 없으므로 $n=m$인 경우만 고려하자.

$n=3$이고 $m=3$인 경우, $a=2$, $b=4$일 때 혹은 $a=4$, $b=2$일 때 가능하며, $a=3$, $b=9$일 때 혹은 $a=9$, $b=3$일 때 가능하다. (이때 개수는 4이다.)

$n=4$이고 $m=4$인 경우, $A=-\sqrt{2}$, $B=-2\sqrt{2}$일 때 혹은 $A=-2\sqrt{2}$, $B=-\sqrt{2}$일 때 가능하다. (이때 개수는 2이다.) 즉, A와 B가 둘 다 무리수일 때 가능한 경우의 수는 6이다.

따라서 가능한 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ m,\ n)$의 개수는 $128+576+6=710$이다.

풀이의 전개 방향을 자연수 전체의 집합이 양수 전체의 집합과 정수 전체의 집합의 교집합이었음을 통해 각각의 경우에 귀류법을 이용하여 케이스를 세분화시켰음을 통해 잡았음을 기억하자.

또한 일반적으로 실수 a의 n제곱근의 문제를 풀 때 행동강령이 a의 부호와 n의 홀짝성에 따라 나뉘었음을 통해 A와 B의 부호에 집중하면서 4개의 경우로 분류하여 풀이를 접근할 수 있다.

$i)$ n이 홀수이고 a가 음수이며 m이 홀수이고 b가 음수일 때,

$ii)$ n이 홀수이고 a가 음수이며 m이 짝수이고 b가 양수일 때,

n이 짝수이고 a가 양수이며 m이 홀수이고 b가 음수일 때 위와 동일한 경우의 수를 가진다.

김지헌

$iii)$ n이 홀수이고 a가 양수이며 m이 홀수이고 b가 양수일 때,

$iv)$ n이 짝수이고 a가 양수이며 m이 짝수이고 b가 양수일 때,

이러한 분류기준을 통해 풀이를 전개한 학생들 역시 많을 것으로 예상할 수 있다. 그러한 학생들은 느꼈겠지만 풀이의 길이가 상당히 차이가 날 것이며, 어째서 위의 풀이를 전개하였는지 의문점을 가질 수 있다. 우선적으로 자연수라는 특징에서 정수에 먼저 초점을 두게 되면, 가능한 경우들을 추론하는 과정에 있어 예상과 다르게 부호 때문에 가능한 순서쌍 $(n,\ m)$이 제한됨을 관찰할 수 있었을 것이다. 이때, A와 B의 부호에 집중하면서 풀이의 방향을 새로이 관찰할 필요성이 있다. 문제를 처음 접근할 때 있어 n, m의 홀짝성을 관찰하는 것은 굉장히 훌륭한 태도이지만, 이러한 방향성을 고수하면서 케이스를 분류한다면 상당히 호흡이 긴 문제로써 느껴졌을 것이다.

고난이도의 소위 말하는 '개수세기' 문제를 마주했을 때 학생들은 주어진 복잡한 상황을 어떻게 기준을 세워서 케이스를 분류할 것인지 고민할 수 있다. 우리가 일반적으로 비슷한 주제의 문제에서 사용했던 태도들로써 문제의 상황을 최대한 많이 관찰한 이후, 풀이를 전개하자.

가령 본 문제에서는 자연수 전체의 집합을 두 집합의 교집합으로써 관찰하여 상황을 분해하여 관찰하였으며, 동시에 n의 값에 따라 가능한 A의 정수 여부와 부호를 관찰한 이후 풀이를 전개하기 시작했다. 본 문제를 만들 때의 출제의도는 학생들은 풀이의 방향성을 한번 잡은 이후에는 그 방향성을 수정할 생각을 쉬이 하지 못하는 경향에 있다. 이는 정형화된 풀이가 존재하는 유형에서 치명적일 수 있는데, (가령 본 문제 역시 전형적인 실수 a의 n제곱근 문제의 형태이지만, a의 부호와 n의 홀짝성으로만 분류를 하면 굉장히 호흡이 길어진다!) 상황에 따라 유동적으로 풀이의 첫 단추를 고쳐 맬 수 있도록 유연한 사고를 하는 연습을 하자!

김지헌