2025 대학수학능력시험 9월 모의고사

[주요 문항 해설]

[총평]

전반적으로 **<u>많이 평이했던 시험지</u>**였습니다.
<u>21번은 약간 참신한 유형</u>이었으나, 그것을 제외하면 공통에서 크게 막힐 만한 문제는 없었으며,

미적분의 경우 **<u>30번이 어느정도 무게</u>**가 있었으나 다른 문제들의 난이도가 상대적으로 쉬워
30번에 집중할 시간이 많았을 것입니다.

준킬러라 부를 만한게 거의 없어 **<u>2 - 3등급대 중상위권이 수혜를 보았을 시험지 구성</u>**입니다.

9모와 수능은 독립시행인 만큼, 결과에 일희일비하기보단 9모에서 발견된 약점을 보완해 강점으로 바꾸는 데에
힘쓰시면 되겠습니다.

공통 과목						선택 과목								
						확률과 통계			미적분			기하		
문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점
1	②	2	12	②	4	23	⑤	2	23	⑤	2	23	③	2
2	⑤	2	13	④	4	24	①	3	24	④	3	24	④	3
3	④	3	14	⑤	4	25	⑤	3	25	④	3	25	⑤	3
4	②	3	15	①	4	26	③	3	26	③	3	26	③	3
5	②	3	16	7	3	27	④	3	27	②	3	27	④	3
6	②	3	17	5	3	28	④	4	28	③	4	28	①	4
7	③	3	18	29	3	29	994	4	29	57	4	29	63	4
8	①	3	19	4	3	30	93	4	30	25	4	30	54	4
9	⑤	4	20	15	4									
10	①	4	21	31	4									
11	①	4	22	8	4									

09.

9. 함수 $f(x) = x^2 + x$에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$$5\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 (5x + f(x))dx$$

$$= \int_0^1 (4f(x) - 5x)dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - x)dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{6}$$

답: ⑤

10.

10. $\angle A > \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

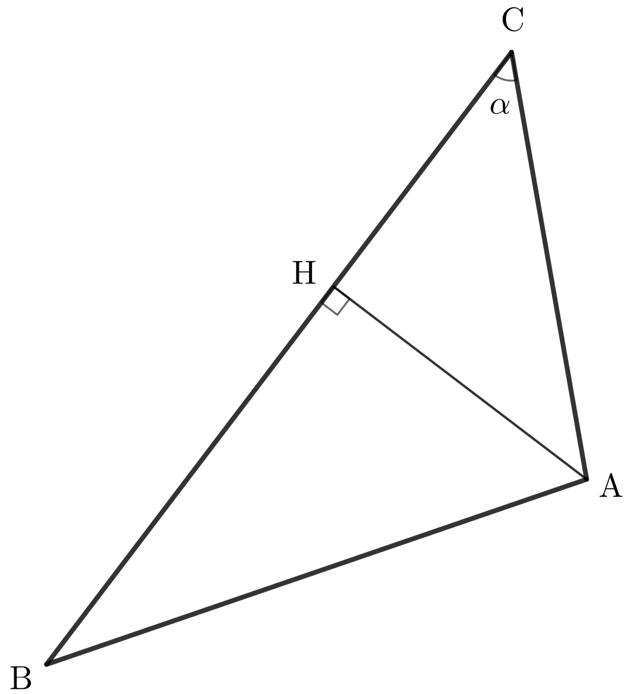
$$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1, \quad \overline{AH} = 2$$

이고, 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 50π 일 때, 선분 BH 의 길이는? [4점]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

STEP 1.

"$\angle A$가 둔각이므로, 둔각삼각형을 그려 해결하자."



"**외접원의 넓이**를 주었으니, **사인법칙**을 써야겠네."

$\overline{AC} = k$, $\overline{AB} = \sqrt{2}k$라 하고, $\angle C = \alpha$라 하자.

외접원의 넓이가 50π이므로, 외접원의 반지름은 $5\sqrt{2}$이고,

따라서 사인법칙에 따라 $\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha} = 10\sqrt{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{k}{10}$이다. $\cdots$ ㉠

STEP 2.

그런데, $\sin$의 정의$\left(\frac{높이}{빗변}\right)$에 따라 $\sin\alpha = \angle\mathrm{C} = \frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{2}{k}$이므로,

이를 ㉠에 대입하면 $\sin\alpha = \frac{k}{10} = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 2\sqrt{5}$이다.

마지막으로, **<u>피타고리스의 정리</u>**를 사용하면 $\overline{\mathrm{BH}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2 = 36$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BH}} = 6$

답: ①

| 무엇을 변별하였는가?

- $\sin$의 정의$\left(\frac{높이}{빗변}\right)$를 이용하여 $\sin\alpha = \frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$임을 이끌어낼 수 있는가?

11.

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^2 + t - 6, \quad x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이다. 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $p-q$의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

STEP 1.

두 점의 **위치가 같아지는 순간**(t)을 찾자.

$t^2 + t - 6 = -t^3 + 7t^2$

$\Rightarrow\ t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$

$\Rightarrow\ t^2(t-6) + (t-6) = (t-6)(t^2+1) = 0$이다.

$\therefore\ t = 6$

STEP 2.

이제, 두 점 P, Q**의 가속도 식**$(a_1,\ a_2)$을 구해보면 각각

$a_1 = 2$

$a_2 = -6t + 14$이므로,

$a_1 - a_2 = 6t - 12$이다.

여기에 $t = 6$을 대입한 값이 곧 $p-q$이므로,

$p - q = 24$이다.

답: ①

12.

12. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22　② -20　③ -18　④ -16　⑤ -14

STEP 1.

"b_n은 대충 봤을 때 **더하고 빼고가 반복**될 것 같은데.. 일단 나열해보면서 관찰해보자."

$b_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \cdots$이므로,

$b_1 = a_1$

$b_2 = a_1 - a_2 = -d$ (여기서, $b_2 = 2$이므로 $d = 2$임을 알 수 있다.)

$b_3 = a_1 - a_2 + a_3 = -d + a_3$

$b_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = -2d$

$b_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = -2d + a_5$

"아, **두 항씩 진행**될 때마다 **$-d$가 하나씩 쌓이는 구조**구나. 게다가 홀수항(b_{2n-1})에는 $+a_{2n-1}$이 하나씩 더 붙네."

그렇다면, $b_7 = -3d + a_7$일 것이다.

따라서, $b_3 + b_7 = -4d + a_3 + a_7 = -8 + 2a_5 = 0$이다.

$\therefore\ a_5 = 4$

STEP 2.

이제 $d = 2$와 $a_5 = 4$를 구했으니, $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_9$의 **구조를 분석**해보자.

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_9$은,

두 항$(a_{2n-1},\ a_{2n})$씩 끊어져서 나오는

$-d,\ -2d,\ -3d,\ -4d$와,

홀수항(a_{2n-1})에서만 나오는
$a_1,\ a_3,\ \cdots,\ a_9$의 합으로 구성되어 있다.

따라서,
$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9=2(-d-2d-3d-4d)+a_1+a_3+\ \cdots\ +a_9$
$=-20d+5a_5=-20$이다.

답: ②

| 무엇을 변별하였는가?

- 나열을 통해 수열 **b_n의 규칙을 파악**할 수 있는가?

- $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9$의 구조를 분석한 뒤, **등차수열의 합의 원리를 응용**하여 답을 구할 수 있는가?

13.

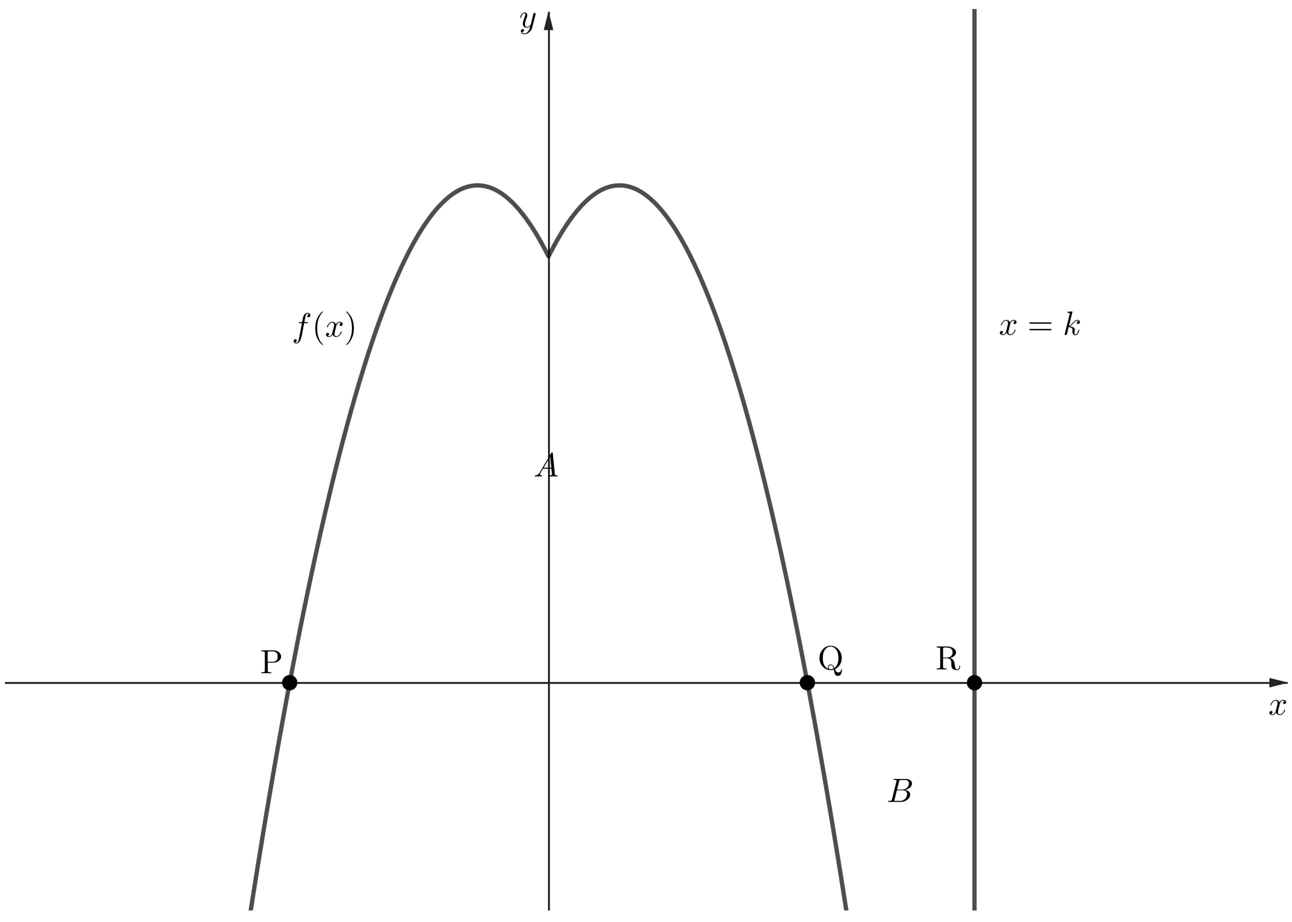
13. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k\,(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

주어진 함수와 조건들을 **그래프로 표현**하면 다음과 같다.



면적 A는 y축을 기준으로 대칭으로, $A=2B \Rightarrow \dfrac{A}{2}=B$라는 것은

<u>면적 A의 오른쪽 절반</u><u>(y축을 기준)</u>이 **<u>면적 B와 넓이가 같다</u>**는 소리로 해석될 수 있다.

이를 정적분으로 표현해보면, $\displaystyle\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=0$이다.

(동일한 넓이의 두 면적이 서로 상쇄되어 0부터 k까지의 정적분 값이 0이 된다.)

따라서, $\displaystyle\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k=-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6)=0$이다.

$\therefore\ k=6$

답: ④

| 무엇을 변별하였는가?

- $A=2B$를 변형하여 **<u>면적 A의 오른쪽 절반</u>**과 **<u>면적 B와 넓이가 같다</u>**는 결론에 이를 수 있는가?

14.

14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

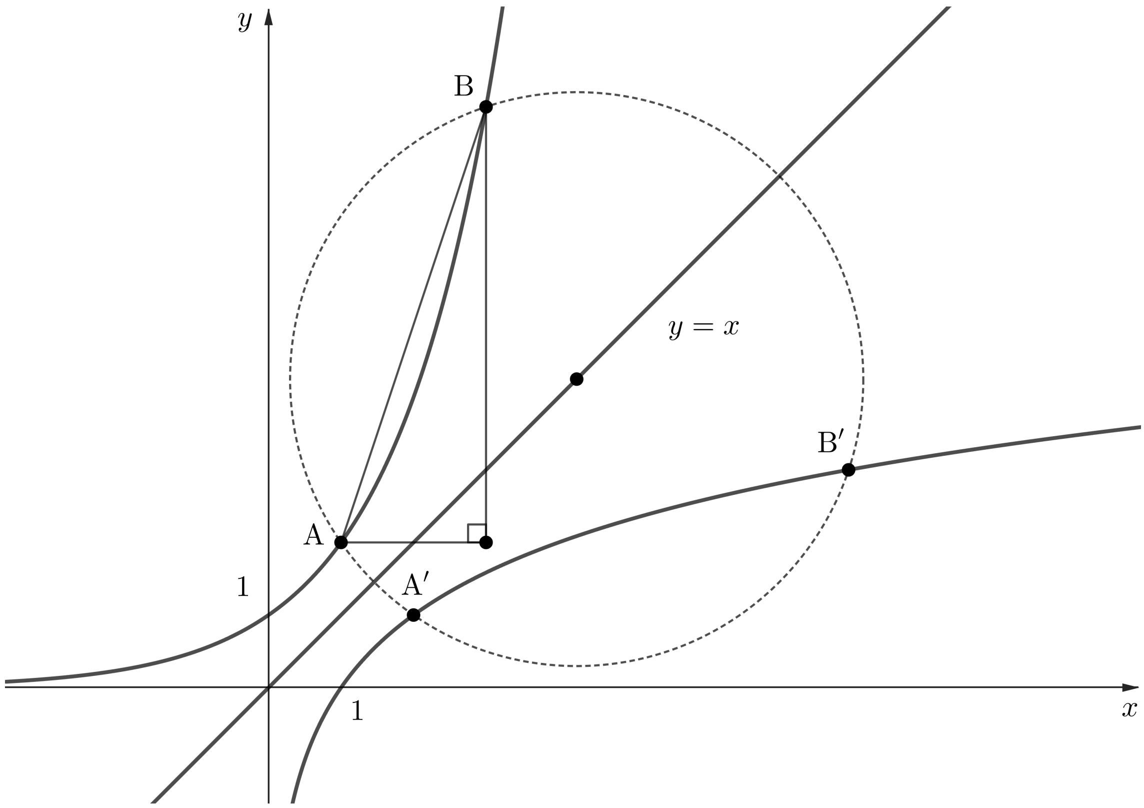
중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

STEP 1.

(가), (나)를 통해 빗변이 $\sqrt{10}n$이고, 밑변과 높이가 각각 n, $3n$인 **직각삼각형**을 만들 수 있다. $\cdots$ ㉠

이후, 발문 아래쪽을 살펴본 뒤 문제의 상황을 그래프로 그려보자.



STEP 2.

그런데, 점 A_n과 B_n을 지나는 **원의 중심이 $y=x$ 위에 있다**는 것은,

해당 원이 $y=2^x$의 역함수인 $y=\log_2 x$에서도 각각 **A_n과 B_n에 대응하는 점**$(\mathrm{A}_n{}', \mathrm{B}_n{}')$**을 지날 것**이라는 것이다.

(원함수와 역함수는 **$y=x$를 기준으로 서로 대칭**이고, 주어진 원도 중심이 $y=x$ 위에 있기에 **$y=x$에 대해 대칭**이다. 따라서, 이 원은 필연적으로 점$(\mathrm{A}_n{}', \mathrm{B}_n{}')$을 지날 수 밖에 없는 것이다.)

이때, 원과 $y=\log_2 x$가 만나는 두 교점 중 x좌표가 더 큰 점은 $\mathrm{B}_n{}'$일 것이고,

이때 $\mathrm{B}_n{}'$의 x좌표는 **B_n의 y좌표**와 같다.

따라서, $\mathrm{B}_n(\log_2 x_n, x_n)$이라고 할 수 있고, ㉠에서 만들어두었던 직각삼각형을 참고하면

$\mathrm{A}_n(\log_2 x_n - n, x_n - 3n)$임을 알 수 있다.

A_n 또한 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로, 대입하여 정리하면

$x_n - 3n = 2^{\log_2 x_n - n} = x_n \times 2^{-n} \Rightarrow x_n = \dfrac{3n}{1-2^{-n}}$임을 알 수 있다.

따라서, $x_1 + x_2 + x_3 = 6 + 8 + \dfrac{72}{7} = \dfrac{170}{7}$이다.

답: ⑤

15.

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} tf(t)\,dt + \int_{-1}^{x} tg(t)\,dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$
(나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_{0}^{3} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

① 72　② 76　③ 80　④ 84　⑤ 88

먼저, (가)를 미분해보면
$xf(x) + xg(x) = 12x^3 + 24x^2 - 6x$이고,

(나)에 따르면 $f(x) = xg'(x)$이므로, $xf(x) + xg(x) = x^2g'(x) + xg(x) = 12x^2 + 24x - 6x$이고,
양변을 x로 나누면 $xg'(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$이다.

이때, 좌변은 $xg(x)$**의 미분꼴**과 같으므로, 양변을 적분해주면
$xg(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x + C$이다. (단, C는 적분상수)

$x = 0$을 넣었을 때, 좌변이 0이므로 $C = 0$이다.

따라서, 다시 한번 양변을 x로 나누면 $g(x) = 4x^2 + 12x - 6$이므로
$\int_{0}^{3} g(x)dx = \int_{0}^{3} (4x^2 + 12x - 6)dx = \left[\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 6x\right]_0^3 = 72$이다.

답: ①

18.

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = 36, \quad \sum_{k=1}^{9} ka_{k+1} = 7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10} ka_k = 36$, $\sum_{k=1}^{9} ka_{k+1} = 7$이 주어져 있고,

우리가 구해야 하는 것은 $\sum_{k=1}^{10} a_k$이다.

"그렇다면, ka_k와 ka_{k+1}에서 **앞에 붙어있는 계수 k를 제거**해야 하는데.. 가장 좋은 방법은 두 식을 빼는 것이다."

그런데, 두 식의 형태가 약간 다르다. 그와 동시에, 묘하게도 서로 빼면 상쇄될 것 같은 느낌이 든다.

한번 두 식의 **구조를 파악**해보자.

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10}$$

$$\sum_{k=1}^{9} ka_{k+1} = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 9a_{10}$$

"이제 확실히 감이 잡힌다. 두 식을 빼면 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, 즉 $\sum_{k=1}^{10} a_k$이 남겠구나.

혹시 모르니 두 식을 실제로 빼보면,

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k - \sum_{k=1}^{9} ka_{k+1} = a_1 + (2-1)a_2 + (3-2)a_3 + \cdots + (10-9)a_{10}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} a_k = 36 - 7 = 29$$

답: 29

20.

20. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

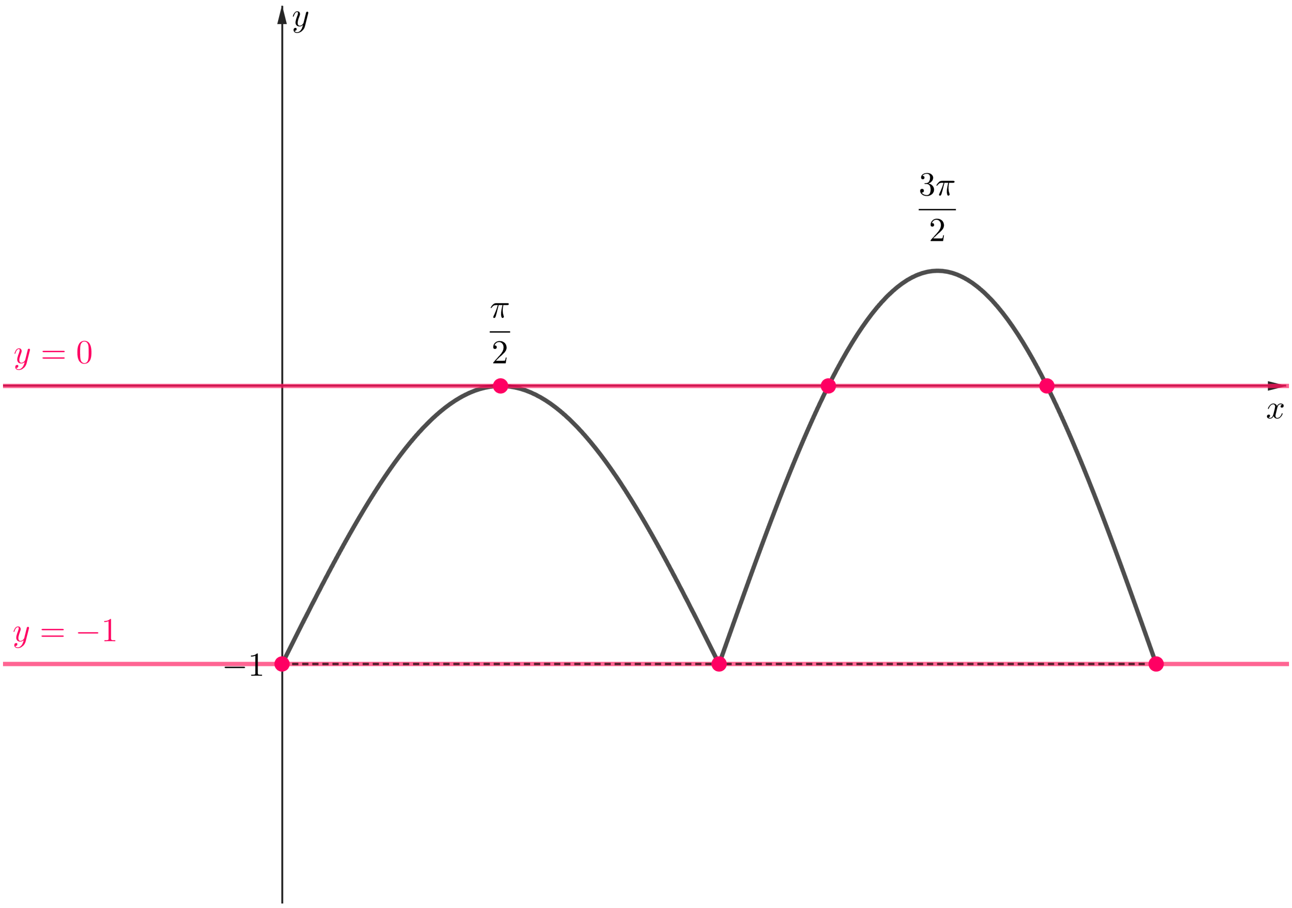
$$f(x)=\begin{cases} \sin x - 1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0 \le t \le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

STEP 1.

'$f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 한'다는 것은,
<u>x**축과 평행한 직선**($y=f(t)$)을 그었을 때 $f(x)$와의 **교점의 개수가** 3</u>이라는 것이다."

일단, $f(x)$의 대략적인 개형을 그려보자.



"여기서, <u>**동일한 y값을 갖는 서로 다른 점이 3개**</u>가 될 만한 y값은 -1과 0 정도가 있겠다."

STEP 2.

이제 모든 t의 값의 합을 구해보자.

1) $y=0$과의 교점(x좌표)의 합은 $\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\times 2=\frac{7}{2}\pi$이고, (오른쪽 두 교점은 x좌표의 평균이 $\frac{3\pi}{2}$임을 이용해 계산)

2) $y=-1$과의 교점(x좌표)의 합은 $0+\pi+2\pi=3\pi$이므로,

모든 t의 값의 합은 $\frac{7}{2}\pi+3\pi=\frac{13}{2}\pi$이다.

$\therefore\ p+q=15$

답: 15

21.

---

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

STEP 1.

"좌우에 각각 k로 이루어진 일차식, 이차식이 있고, 결국 $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}$도 따져보면 이차식이겠지.."

그런데, 아직 $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}$의 정확한 식은 알 수 없으니,

먼저 좌우에 있는 $2k-8$와 $4k^2+14k$를 비교해보자.

$2k-8 \le 4k^2+14k \;\Rightarrow\; 4(k+1)(k+2) \ge 0$

여기서 흥미롭게 살펴봐야 할 부분은 <u>**바로 $k=-2,\ -1$일 때**</u>이다.

이 때 좌우에 있는 식의 값이 같아지므로, $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}$의 값도 하나로 확정된다.

1) $k=-2$일 때, $2k-8=4k^2+14k=-12$이므로, $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}=-12$이다. ⋯ ㉠

2) $k=-1$일 때, $2k-8=4k^2+14k=-10$이므로, $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}=-10$이다. ⋯ ㉡

STEP 2.

"이제 $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}$와 관련된 식 두 개가 주어졌다. 통상적으로 최고차랑의 계수가 1인 삼차식은 x^3+ax^2+bx+c로 표현되니, 미지수가 3개라고 할 수 있다. 즉, 필요한 식이 세 개라는 뜻이다."

"그런데, $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}$는 두 함수 간의 차로 이루어져 있고, 구해야 하는 값도 $f'(3)$이므로, <u>**상수항(c)에 관한 정보는 구할 수도, 구할 필요도 없는 것**</u> 같다."

"우리에게는 이미 두 식이 주어져 있으므로, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓고 $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}$를 식으로 표현해보자."

$$\frac{f(k+2)-f(k)}{2}=\frac{(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c-(x^3+ax^2+bx+c)}{2}$$

$$=\frac{6x^2+12x+8+a(4x+4)+2b}{2}=3x^2+(2a+6)x+2a+b+4$$이다.

(여기서, 마치 조립제법 쓰듯이 아래와 같은 방법으로 계산하면 편하다.)

$f(x+2)$	1	6	12	8
		a	$4a$	$4a$
			b	$2b$
				c
$f(x)$	1	a	b	c
$f(x+2)-f(x)$		6	$4a+12$	$4a+2b+8$

정리하면 $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}=3k^2+(2a+6)k+2a+b+4$이다.

STEP 3.

이제 ㉠과 ㉡을 이용해 a, b를 구해보자.

1) $k=-2$일 때, $3k^2+(2a+6)k+2a+b+4=-12$

$\Rightarrow$ $12-2(2a+6)+2a+b+4=-12$

$\Rightarrow$ $2a-b=16$ $\cdots$ ㉢

2) $k=-1$일 때, $3k^2+(2a+6)k+2a+b+4=-10$

$\Rightarrow$ $3-(2a+6)+2a+b+4=-10$

$\Rightarrow$ $b=-11$

여기서 $b=-11$을 ㉢에 대입하면, $a=\dfrac{5}{2}$이다.

앞서 식을 세웠듯, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$이므로

$f'(x)=3x^2+2ax+b=3x^2+5x-11$이다.

$\therefore$ $f'(3)=31$

답: 31

❙ 무엇을 변별하였는가?

- 좌우에 있는 **일차항, 이차항 간의 대소관계**를 우선적으로 따져본 뒤,
  두 식의 값이 같아지는 $k=-2$, -1일 때에 주목하여 $f(x)$**에 관한 두 식**을 뽑아낼 수 있는가?

- 문제에서 $f(x)$의 **상수항**(c)**에 관한 정보가 필요하지 않음**을 알고 (혹은 뒤늦게 깨달아도 상관없다.),
  $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}$를 이차식으로 표현한 뒤 앞서 뽑아낸 두 식을 연립하여 $f'(x)$를 구할 수 있는가?

22.

22. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_2 \times a_3 < 0$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $\left(a_{n+1} - a_n + \dfrac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

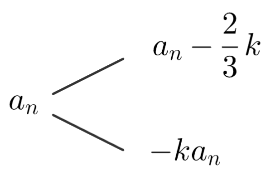
"(나)를 통해 간접적으로 점화식을 줬군."

STEP 1.

이를 점화식으로 표현해보면 다음과 같다.

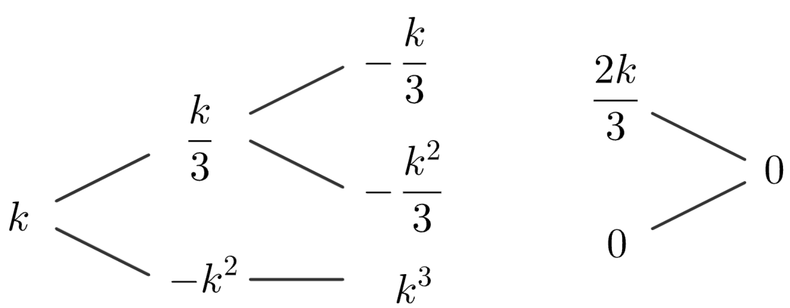
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \dfrac{2}{3}k \\ \\ -ka_n \end{cases}$$

$1)$ 우리에게는 첫째항(a_1)이 주어져 있으니, 다음과 같은 구도로 $a_1 \sim a_3$까지 **순방향으로 전개**해보자.



$2)$ 그 다음, 우리에게는 $a_5 = 0$이라는 조건 또한 주어져 있으므로, $a_4 \sim a_5$를 **역방향으로 전개**해보자.

그렇다면, 최종적으로 아래와 같은 수형도가 만들어질 것이다.



(여기서, $a_2 \times a_3 < 0$이므로, 두 번째 항의 $-k^2 \rightarrow -k^2 - \dfrac{2}{3}k$로 넘어갈 수 없다.)

STEP 2.

이제 남은 일은, **a_3와 a_4가 잘 이어지도록 하는 양수 k**의 값들을 찾는 것이다.

점화식 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\frac{2}{3}k \\ \\ -ka_n \end{cases}$ 을 잘 이용해보자.

여기서, 미리 **점화식을 분석**하여$(a_n \to a_{n+1})$

$1)$ (음수 $\to$ 양수)가 되기 위해서는 $a_{n+1}=-ka_n$을 이용할 수 밖에 없으며 $\cdots$ ㉠

$2)$ (양수 $\to$ 0) 혹은 (양수 $\to$ 양수)가 되기 위해서는 $a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}k$를 이용할 수 밖에 없고, $\cdots$ ㉡

$3)$ (음수 $\to$ 0)은 불가능하다는 것을 알아두면 좋다. $\cdots$ ㉢

$i)$ $a_4=\frac{2}{3}k$일 때,

$1)$ $-\frac{k}{3} \to \frac{2}{3}k$: ㉠에 의해 $\frac{k^2}{3}=\frac{2k}{3} \Rightarrow k=2$

$2)$ $-\frac{k^2}{3} \to \frac{2}{3}k$: ㉠에 의해 $\frac{k^3}{3}=\frac{2k}{3} \Rightarrow k=\sqrt{2}$

$3)$ $k^3 \to \frac{2}{3}k$: ㉡에 의해 $k^3-\frac{2}{3}k=\frac{2}{3}k \Rightarrow k=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$ii)$ $a_4=0$일 때,

$1)$ ㉢에 의해 $-\frac{k}{3} \to 0$과 $-\frac{k^2}{3} \to 0$은 불가능

$2)$ $k^3 \to 0$: ㉡에 의해 $k^3-\frac{2}{3}k=0 \Rightarrow k=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

따라서, 가능한 모든 양수 k에 대한 k^2의 합은

$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=8$이다.

답: 8

┃ 무엇을 변별하였는가?

- 케이스 분류를 최소화하기 위해, 주어진 $a_1=k$와 $a_5=0$을 토대로 $a_1 \sim a_3$까지 **순방향**으로, $a_4 \sim a_5$를 **역방향**으로 전개할 수 있는가? (혹은 $a_1 \sim a_2$까지 **순방향**으로, $a_3 \sim a_5$를 **역방향**으로 전개해도 된다. 그 외에는 케이스가 너무 많아져 문제가 복잡해지게 된다.)

- a_3과 a_4가 **잘 이어지도록 하는 양수 k**의 값을 실수 없이 찾아낼 수 있는가? (혹은 a_2와 a_3)

28.

28. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = f'(2x)\sin\pi x + x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx = 2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx + \frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$ ④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

$g(x) = f'(2x)\sin\pi x + x$

일반적인 적분 퍼즐 문제이다.

"역함수($g^{-1}(x)$)가 나와 있어 식을 복잡하게 만들고 있으니, 이것부터 처리해야겠다."

STEP 1.

$g(0)=0$, $g(1)=1$이므로,

$$\therefore \int_0^1 g^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 g(x)dx$$

STEP 2.

이를 주어진 식에 대입하면,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx$$

$$= 1 - \int_0^1 g(x)dx = 2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 - \int_0^1 (f'(2x)\sin\pi x + x)dx = 2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx = 2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx = \frac{1}{12} \quad \cdots ㉡$$

식이 정리가 되었다.

STEP 3.

문제에서 물어보는 식을 보니, $f(x)$를 포함하고 있으므로, ㉡에서 $2x=t$로 치환해야 할 것 같다.

치환하면 $\int_0^2 f'(t)\sin\frac{\pi}{2}tdt=\frac{1}{6}$ 이다.

마지막으로 위 식을 구해야 하는 식의 형태$\left(f(t)\cos\frac{\pi}{2}\right)$와 맞추기 위해 부분적분을 해보자.

$$\left[f(t)\sin\frac{\pi}{2}tdt\right]_0^2-\frac{\pi}{2}\int_0^2 f(t)\cos\frac{\pi}{2}tdt=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ \int_0^2 f(t)\cos\frac{\pi}{2}dt=-\frac{1}{3\pi}$$

답: ③

29.

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자.
모든 자연수 m에 대하여

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1 + a_{10} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

분수식의 합을 보고, 자연스럽게 **부분분수로 분해하는 아이디어**를 떠올릴 수 있다.

$$\frac{m+1}{n(n+m+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1}$$

(부분분수를 연상케 하는 여러 단서가 있다. 예를 들면, 분모와 분자에 공통적으로 존재하는 $m+1$, 때마침 분모의 두 인수인 n과 $(n+m+1)$ 사이의 차가 $m+1$인 것 등)

이제 S_m을 전개해보자.

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1} \right)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \right) - \left(\frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4} + \cdots \right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m+1}$$ 이다.

따라서,

$$a_1 = S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = \frac{1}{11}$$

이다.

$$\therefore\ a_1 + a_{10} = \frac{3}{2} + \frac{1}{11} = \frac{35}{22}$$

답: 57

❙ 무엇을 변별하였는가?

- 분수식의 합을 보고, 자연스럽게 **부분분수로 분해하는 아이디어**를 떠올릴 수 있는가?

30.

30. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = (k - |x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x) = f(x)$이고 $F(x) \ge f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{2}\right) = pe + q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

STEP 1.

$f(x)$에 $|x|$가 포함되어 있다. $x \ge 0$인 경우와 $x < 0$인 경우로 나누어서 상황을 파악하자.

$$f(x) = \begin{cases} (k-x)e^{-x} & (x \ge 0) \\ (k+x)e^{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

일차식과 지수함수과 곱해진 형태이므로 적분을 수행할 수 있다.
(30번인 만큼 이 정도 계산은 감내해야 한다.)

$$F(x) = \begin{cases} (x-k+1)e^{-x} + C_1 & (x \ge 0) \\ (-x-k-1)e^{-x} + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

$F(0)$의 값을 물어보고 있으므로, 적분 상수를 $F(0)$에 맞춰 표현해보자.

$$F(x) = \begin{cases} (x-k+1)e^{-x} + F(0) + k - 1 & (x \ge 0) \\ (-x-k-1)e^{-x} + F(0) + k + 1 & (x < 0) \end{cases}$$

STEP 2.

이제 최종적으로 모든 실수에 대해 $F(x) \ge f(x)$를 만족한다는 조건을 해석해야 한다.

$F(x)$와 $f(x)$를 각각 그래프로 옮겨서 비교해볼 수도 있지만, $F(x)$와 $f(x)$가 둘 다 복잡한 곡선이므로 이런 방식으로 두 함수의 대소 관계를 파악하는 건 비효율적이다. (이러한 비교 방식이 편한 경우는, 두 함수 중 하나가 직선인 경우다.)

이럴 경우, **함수의 차**(차함수)**를 이용해 대소 관계를 비교**하는 것이 편하다.

$F(x) - f(x) \ge 0$을 해석해서 $F(x) - f(x)$**가 x축보다 더 위에 있도록** $F(0)$의 값을 조정해 주자.

$$F(x)-f(x)=\begin{cases}(2x-2k+1)e^{-x}+k-1+F(0) & (x\ge 0)\\ (-2x-2k-1)e^{-x}+k+1+F(0) & (x<0)\end{cases}$$

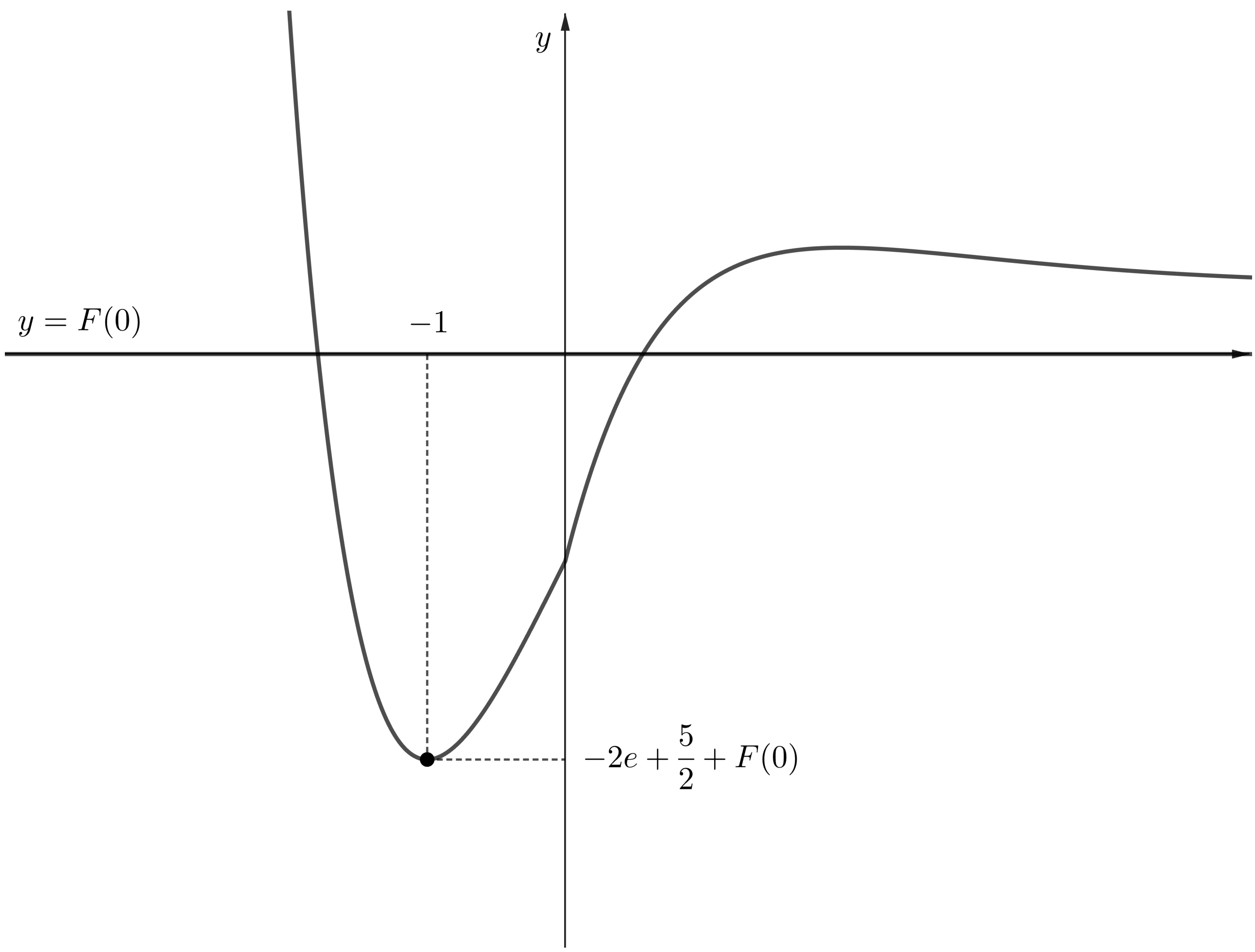
k값에 따라서 개형이 달라질 수 있다. 직접 $k=\frac{1}{4}$, $k=\frac{3}{2}$등의 숫자를 대입해 보면서 상황을 파악하자.

i) $k=\frac{3}{2}$일 때,

$$F(x)-f(x)=\begin{cases}(2x-2)e^{-x}+\frac{1}{2}+F(0) & (x\ge 0)\\ (-2x-4)e^{-x}+\frac{5}{2}+F(0) & (x<0)\end{cases}$$

기존에 알고 있는 (일차식) $\times\, e^{-x}$꼴의 그래프 개형을 기반으로, 미분까지 해서 개형을 파악해 보자.

$$(F(x)-f(x))'=\begin{cases}(-2x+4)e^{-x} & (x\ge 0)\\ (2x+2)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$



위 그래프에서, $F(x)-f(x)$의 최솟값(혹은 x축 아래로 내려갈만한 점근선)이 될 만한 후보들을 살펴보자.

1) $x=-1$일 때 **극솟값**을 갖는다.

이때, 극솟값이 0 이상이 되기 위해서는

$$F(-1)-f(-1)=-2e+\frac{5}{2}+F(0)\geq 0 \Rightarrow F(0)\geq 2e-\frac{5}{2}$$

를 만족시켜야 한다.

2) $x\to\infty$으로 갈수록 점근선을 따라, 특정 값으로 **수렴하면서 감소**한다.

이때, 이 수렴값이 0 이상이 되기 위해서는

$$\lim_{x\to\infty}(F(x)-f(x))=\frac{1}{2}+F(0)\geq 0 \Rightarrow F(0)\geq -\frac{1}{2}$$

을 만족시켜야 한다.

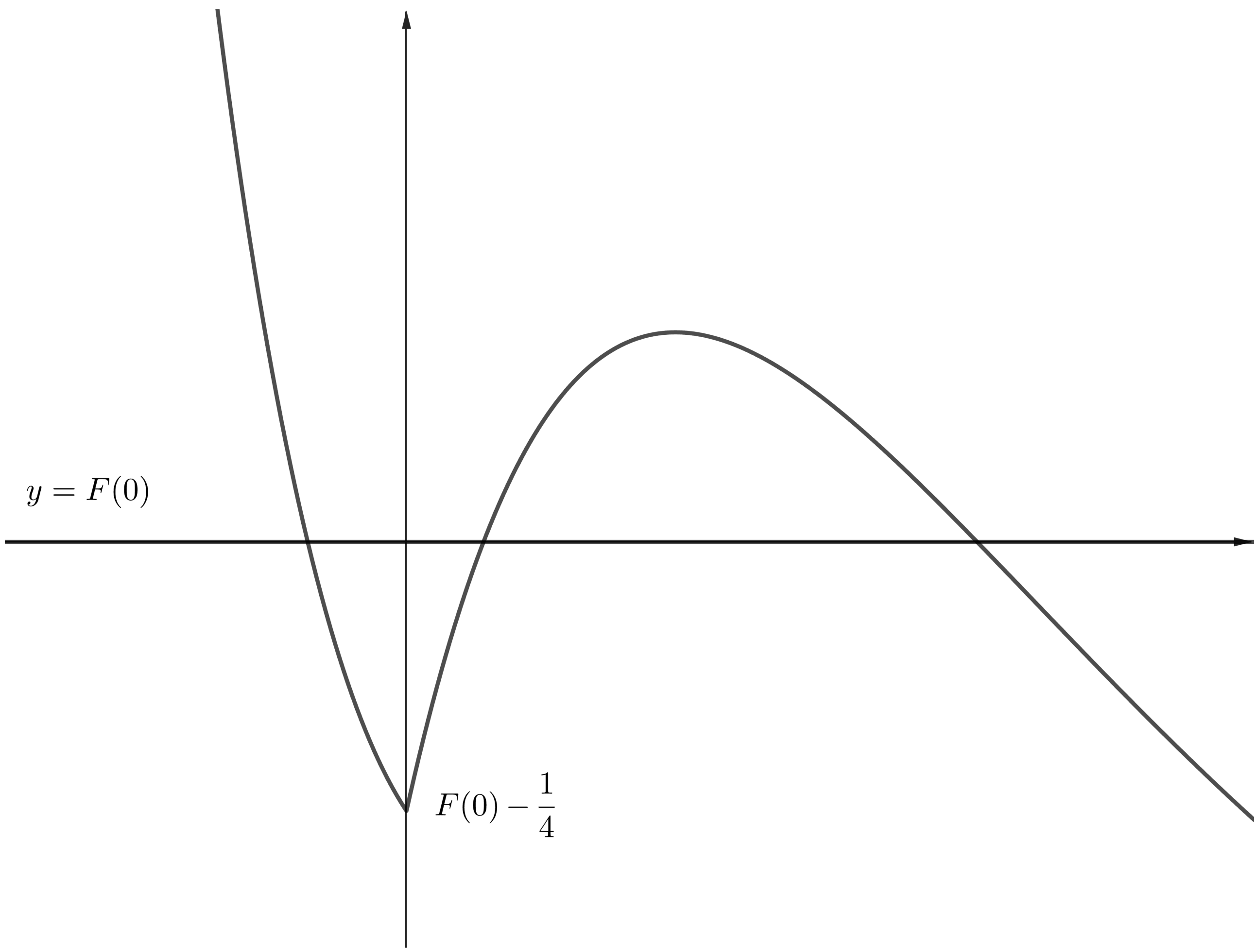
$$\therefore\ g\left(\frac{3}{2}\right)=2e-\frac{5}{2}$$

$ii)$ $k=\frac{1}{4}$일 때,

$$F(x)-f(x)=\begin{cases}\left(2x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}-\frac{3}{4}+F(0) & (x\geq 0)\\ \left(-2x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}+\frac{5}{4}+F(0) & (x<0)\end{cases}$$

위 식도 동일하게 미분해 보자.

$$(F(x)-f(x))'=\begin{cases}\left(-2x+\frac{3}{2}\right)e^{-x} & (x\geq 0)\\ \left(2x-\frac{1}{2}\right)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$



마찬가지로, 위 그래프에서 $F(x)-f(x)$의 최솟값(혹은 x축 아래로 내려갈만한 점근선)이 될 만한 후보들을 살펴보자.

1) $x=0$일 때 **첨점**을 갖는다.

마찬가지로,

$F(0)-f(0)=F(0)-\frac{1}{4}\geq 0 \Rightarrow F(0)\geq \frac{1}{4}$

을 만족시켜야 한다.

2) $x\to\infty$으로 갈수록 점근선을 따라, 특정 값으로 **수렴하면서 감소**한다.

$$\lim_{x\to\infty}(F(x)-f(x))=-\frac{3}{4}+F(0)\geq 0 \Rightarrow F(0)\geq \frac{3}{4}$$

$\therefore\ g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

따라서, $g\left(\frac{3}{2}\right)+g\left(\frac{1}{4}\right)=2e-\frac{7}{4}$ 이다.

$\therefore\ p+q=\frac{1}{4}$

답: 25

❙ 무엇을 변별하였는가?

- $f(x)$를 적분하고, **적분상수를 $F(0)$에 대해 표현**한 뒤 $F(x)-f(x)$**의 개형**을 그릴 수 있는가?

- $F(x)-f(x)$의 개형에서 최솟값(혹은 x축 아래로 내려갈만한 점근선)이 될 만한 후보들을 찾은 뒤, 이 지점(혹은 점근선)이 x축 아래로 내려가지 않도록 하는 $F(0)$**의 최솟값**을 구할 수 있는가?