매지컬 모의고사
수학 영역 정답

1	③	2	②	3	①	4	④	5	①
6	⑤	7	③	8	①	9	⑤	10	④
11	③	12	⑤	13	④	14	①	15	②
16	7	17	31	18	8	19	16	20	18
21	507	22	30						

1. 지수법칙을 활용하여 계산하는 문제입니다.

$(2\times\sqrt[3]{2})^{\frac{3}{2}}=(2\times 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}=(2^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}=2^2=4$

2. 도함수에 대한 문제입니다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이고, $f(x)=-x^3+4x^2+2x$에서

$f'(x)=-3x^2+8x+2$, $f'(1)=7$입니다.

3. 삼각함수에 대한 문제입니다.

$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$이고, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{7}}{3}$입니다.

$\sin\theta=\sqrt{7}k$, $\cos\theta=3k$라고 하면 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=16k^2=1$이고,

$\tan\theta>0$이고 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\theta<0$입니다.

$k=-\frac{1}{4}$이므로 $\cos\theta=-\frac{3}{4}$

4. 함수의 극한에 대한 문제입니다.

$f(1)=2$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=-1$이므로 $f(1)+\lim_{x\to 1-}f(x)=1$입니다.

5. 등비수열에 대한 문제입니다.

$3a_4=a_2$에서 주어진 등비수열의 공비를 r이라고 하면

$\frac{a_4}{a_2}=r^2=\frac{1}{3}$입니다.

$a_3+a_5=16$에서 $a_3+\frac{a_3}{3}=\frac{4}{3}a_3=16$, $a_3=12$이고,

$a_1=\frac{a_3}{r^2}=12\times 3=36$입니다.

6. 함수의 극값에 대한 문제입니다.

$f(x)=x^4+3x^2-10x+k$에 대하여 $f'(x)=4x^3+6x-10$,

$2(x-1)(2x^2+2x+5)=0$에서 $f'(1)=0$입니다.

$f(1)=1+3-10+k=2$에서 $k=8$입니다.

7. 지수에 미지수가 포함된 방정식을 푸는 문제입니다.

$4^x-k\times 2^x+2(k+1)=0$에 $x=\log_2 3$을 대입하면

$9-3k+2k+2=0$, $k=11$입니다.

$4^x-11\times 2^x+24=0$에서 $(2^x-3)(2^x-8)=0$이므로 다른 한 근은 $x=\log_2 8=3$입니다.

8. 부정적분에 대한 문제입니다.

$f'(x)=2|x-1|-k$는 다음과 같습니다.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+2-k & (x<1)\\ 2x-2-k & (x\geq 1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로 주어진 함수는

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-(k-2)x+C & (x<1)\\ x^2-(k+2)x+C+2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

입니다.

$f(3)-f(0)=-7$이고, $f(3)=9-3(k+2)+C+2=C-3k+5$, $f(0)=C$이므로 $f(3)-f(0)=-3k+5=-7$, $k=4$입니다.

9. 수열의 합을 구하는 문제입니다.

$y=x^2-nx+n=(x-\frac{n}{2})^2-\frac{n^2}{4}+n$에서 $1\leq n\leq 4$인 경우

$x=\frac{n}{2}$에서 최솟값 $n-\frac{n^2}{4}$을 갖습니다.

$\sum_{n=1}^{4}(n-\frac{n^2}{4})=\frac{4\times 5}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{4\times 5\times 9}{6}=\frac{5}{2}$입니다.

$n\geq 5$인 경우, 주어진 구간에서는 $x=2$에서 최솟값 $4-n$을 갖습니다.

$\sum_{n=5}^{8}(4-n)=-10$입니다.

따라서 $\sum_{n=1}^{8}a_n=\frac{5}{2}-10=-\frac{15}{2}$입니다.

10. 함수의 연속에 대한 문제입니다.

$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3 & (x<a)\\ m(x-2)+10 & (x\geq a)\end{cases}$이 연속이 되기 위해서는

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$, $a^2+2a+3=m(a-2)+10$이 성립해야 합니다.

$a^2-(m-2)a+2m-7=0$을 만족시키는 실수 a의 값이 오직 하나 존재해야 하며, 이때 해당 이차방정식은 중근을 갖습니다.

$D=(m-2)^2-4(2m-7)=m^2-4m+4-8m+28$

$m^2-12m+32=(m-4)(m-8)=0$에서 $m=4$ 또는 $m=8$이며, 모든 m의 값의 곱은 32입니다.

[다른 풀이]

방정식 $x^2+2x+3=m(x-2)+10$을 만족시키는 실수 x의 값이 오직 하나여야 하며, 이때 직선 $y=m(x-2)+10$은 곡선 $y=x^2+2x+3$에 접해야 합니다.

$y'=2x+2$라고 하고, 점 (a, a^2+2a+3)에 접한다고 하면 직선 $y=(2a+2)(x-a)+a^2+2a+3$이 점 $(2, 10)$을 지나야 합니다.

$10=2(a+1)(2-a)+a^2+2a+3$

$10=-2a^2+2a+4+a^2+2a+3$, $a^2-4a+3=0$,

$(a-1)(a-3)=0$에서 $a=1$인 경우 $m=2a+2=4$이며, $a=3$인 경우 $m=2a+2=8$입니다.

따라서 모든 m의 값의 곱은 32입니다.

11. 귀납적으로 정의된 수열에 대한 문제입니다.

$a_3\geq 0$인 경우, $a_4=a_3-3$이며, $a_3+a_4=2a_3-3=3$에서 $a_3=3$입니다.

$a_3=3$이고 $a_2\geq 0$인 경우, $a_3=a_2-3$에서 $a_2=6$이며, $a_3=3$이고 $a_2=6$이고 $a_1\geq 0$인 경우 $a_2=a_1-3$에서 $a_1=9$입니다.

$a_3=3$이고 $a_2=6$이고 $a_1<0$인 경우 $\sqrt{4(a_1)^2}=6$에서 $a_1=-3$입니다.

$a_3=3$이고 $a_2<0$인 경우 $\sqrt{4(a_2)^2}=3$인 정수 a_2가 존재하지 않습니다.

$a_3<0$인 경우, $a_3+\sqrt{4(a_3)^2}=3$에서 $a_3=-3$입니다.

$a_3=-3$인 경우 $\sqrt{4(a_2)^2}=-3$인 a_2가 존재하지 않으므로 $a_2\geq 0$이며, $a_3=a_2-3$에서 $a_2=0$입니다.

$a_3=-3$이고 $a_2=0$인 경우, $a_1=3$입니다.

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $9-3+3=9$입니다.

12. 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대한 문제입니다.
두 점 P, Q의 위치는 각각
$x_1(t)=t^3-t^2-t+k$, $x_2(t)=3t^2+2t$입니다.
두 점 P, Q가 시각 $t=a$에서 만나도록 하는 실수 a의 개수가 오직 하나이므로, $x_1(a)=x_2(a)$인 실수 a가 오직 하나 존재합니다.
$x_1(t)-x_2(t)=t^3-4t^2-3t+k=0$에서 이를 미분하면
$v_1(t)-v_2(t)=3t^2-8t-3=(3t+1)(t-3)$이며, $t\geq 0$에서
$x_1(t)-x_2(t)$는 $t=3$일 때 극소입니다.
따라서 $a=3$이며, $x_1(3)=15+k$, $x_2(3)=33$에서 $15+k=33$, $k=18$입니다.
또한, $t\geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $x_1(t)-x_2(t)\geq 0$이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는
$|x_1(t)-x_2(t)|=|t^3-4t^2-3t+18|=t^3-4t^2-3t+18$입니다.
두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 $\frac{k}{3}=6$이 되는 경우는
$|x_1(t)-x_2(t)|=t^3-4t^2-3t+18=6$에서 $t^3-4t^2-3t+12=0$, $t^2(t-4)-3(t-4)=0$, $(t^2-3)(t-4)=0$에서 $t=\sqrt{3}$일 때입니다.
출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 6이 될 때까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^{\sqrt{3}}|v_1(t)|dt$입니다.
점 P의 속력은 $t=1$일 때 음(-)에서 양(+)으로 변하므로 구하는 값은
$-\{x_1(1)-x_1(0)\}+x_1(\sqrt{3})-x_1(1)=-(-1)+2\sqrt{3}-3-(-1)$
$=2\sqrt{3}-1$입니다.

13. 로그함수의 그래프에 대한 문제입니다.
$\log_a(x+3)=\log_a(3x+1)$에서 $x=1$이며, 점 A의 좌표는 $(1,\log_a 4)$입니다.
점 A가 선분 BC를 1:2로 내분하므로 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고, 직선 AC의 기울기가 1이므로 점 B의 좌표를 $(1-t,\log_a 4-t)$, 점 C의 좌표를 $(1+2t,\log_a 4+2t)$로 놓을 수 있습니다.
점 B는 곡선 $y=\log_a(x+3)$ 위의 점이므로 $\log_a(4-t)=\log_a 4-t$가 성립하며, 점 C는 곡선 $y=\log_a(3x+1)$ 위의 점이므로 $\log_a(6t+4)=\log_a 4+2t$가 성립합니다.
$t=\log_a\frac{4}{4-t}$, $2t=\log_a\frac{3t+2}{2}$에서 $2\log_a\frac{4}{4-t}=\log_a\frac{3t+2}{2}$입니다.
$\frac{16}{(4-t)^2}=\frac{3t+2}{2}$에서 $32=(t^2-8t+16)(3t+2)$,
$3t^2-22t^2+32t=0$, $t(t-2)(3t-16)=0$에서 $t=2$입니다.
$2=\log_a 2$에서 $a=\sqrt{2}$이며, 점 A의 좌표는 (1, 4), 점 B의 좌표는 (-1, 2), 점 C의 좌표는 (5, 8)입니다.
점 D의 x좌표를 x_D라고 하면 $\log_{\sqrt{2}}(x_D+3)=8$에서 $x_D=13$이며, 점 D의 좌표는 (13, 8)입니다.
우선 삼각형 OAB의 넓이를 구해 봅시다.
선분 AB의 길이는 $2\sqrt{2}$이며, 직선 AB($x-y+3=0$)와 원점 사이의 거리는 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$입니다. 따라서 삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=3$입니다.
삼각형 ACD에서, 선분 CD의 길이는 8이고, 점 A와 직선 CD 사이의 거리는 4이므로 삼각형 ACD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$입니다.
따라서 두 삼각형의 넓이의 합은 $3+16=19$입니다.

14. 방정식의 실근의 개수에 대한 문제입니다.
함수
$f(x)=\begin{cases}x^3-ax+b & (x<3)\\(x-4)^2+5 & (x\geq 3)\end{cases}$에 대하여 $f(3)=6$이고, $x\geq 3$일 때, $5<t\leq 6$인 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$는 서로 다른 2개의 실근을 갖습니다.
$\{t|g(t)=2\}=\{t|t=p\}\cup\{t|q\leq t\leq 6\}$에서, $x<3$인 경우 $5<t\leq 6$인 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$는 실근을 갖지 않습니다. 그러므로 $x<3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 5보다 크지 않으며, 5보다 작은 경우 q의 값을 결정할 수 없으므로 $x<3$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 5를 가져야 합니다.
또한, 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,3)$에서 증가하는 경우, p의 값을 결정할 수 없으므로 이 구간에서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 존재해야 합니다. 그러므로 $a>0$입니다.
$x<3$에서 $f'(x)=3x^2-a$이며, $f'(-\sqrt{\frac{a}{3}})=f'(\sqrt{\frac{a}{3}})=0$입니다. 열린 구간 $(-\infty,3)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 5인 경우로는 $f(-\sqrt{\frac{a}{3}})=5$인 경우만 가능합니다.
$f(-\sqrt{\frac{a}{3}})=-\sqrt{\frac{a}{3}}\times(\frac{a}{3}-a)+b=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}+b=5$,
$\frac{2}{3\sqrt{3}}\times a\sqrt{a}+b=5$에서 $a=3\times n^2$(n은 자연수)의 꼴이 되어야 합니다.
(i) $n=1$인 경우
$a=3$, $b=3$으로 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x+3 & (x<3)\\(x-4)^2+5 & (x\geq 3)\end{cases}$이며,
$\lim_{x\to 3-}f(x)=21$이므로 조건을 만족시키지 않습니다.
(ii) $n=2$인 경우
$a=12$, $b=-11$로 $f(x)=\begin{cases}x^3-12x-11 & (x<3)\\(x-4)^2+5 & (x\geq 3)\end{cases}$이며,
$\{t|g(t)=2\}=\{t|t=-27\}\cup\{t|-20\leq t\leq 6\}$로
$p=-27$, $q=-20$입니다.
(iii) $n\geq 3$인 경우
$\sqrt{\frac{a}{3}}\geq 3$이 되어서 $\{t|g(t)=2\}=\{t|t=p\}\cup\{t|q\leq t\leq 6\}$에서 p의 값을 결정할 수 없게 되므로 조건을 만족시키지 않습니다.
따라서 조건을 만족시키는 것은 (ii)의 경우로, $(a+b)-(p+q)$
$=12-11-(-27-20)=48$입니다.

15. 사인법칙과 코사인법칙을 활용한 문제입니다.
삼각형 ACD에서 $\overline{\mathrm{AD}}=x$라고 하면
$7^2=4^2+x^2-2\times x\times 4\times\frac{2}{3}$, $x^2-\frac{16}{3}x-33=0$,
$3x^2-16x-99=0$, $(x-9)(3x+11)=0$에서 $\overline{\mathrm{AD}}=9$입니다.
점 E는 선분 AD를 지름으로 하는 반원 위의 점이므로 $\angle\mathrm{AED}=\frac{\pi}{2}$이며, $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AD}}\times\cos(\angle\mathrm{CDA})=9\times\frac{2}{3}=6$입니다.

또한 $\overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{DE}} - \overline{\mathrm{CD}} = 2$입니다.
원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{FAD} + \angle\mathrm{DCF} = \pi$이며, $\angle\mathrm{ECF} + \angle\mathrm{DCF} = \pi$이므로 $\angle\mathrm{FAD} = \angle\mathrm{ECF}$입니다.

$\angle\mathrm{FAD} = \frac{\pi}{2} - \angle\mathrm{ADE}$이므로 $\angle\mathrm{ECF} = \frac{\pi}{2} - \angle\mathrm{ADE}$가 성립하며,

$\cos(\angle\mathrm{ECF}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \angle\mathrm{ADE}) = \sin(\angle\mathrm{ADE})$

$= \sqrt{1 - (\frac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$입니다.

삼각형 ECF에서 $\overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{FC}} \times \cos(\angle\mathrm{ECF}) = 2$, $\overline{\mathrm{FC}} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 2$,

$\overline{\mathrm{FC}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$입니다.

또한 선분 EF의 길이는 $\overline{\mathrm{FC}} \times \sin(\angle\mathrm{ECF}) = \frac{6\sqrt{5}}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$입니다.

삼각형 EFC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{EF}} \times \overline{\mathrm{EC}} = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times 2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$입니다.

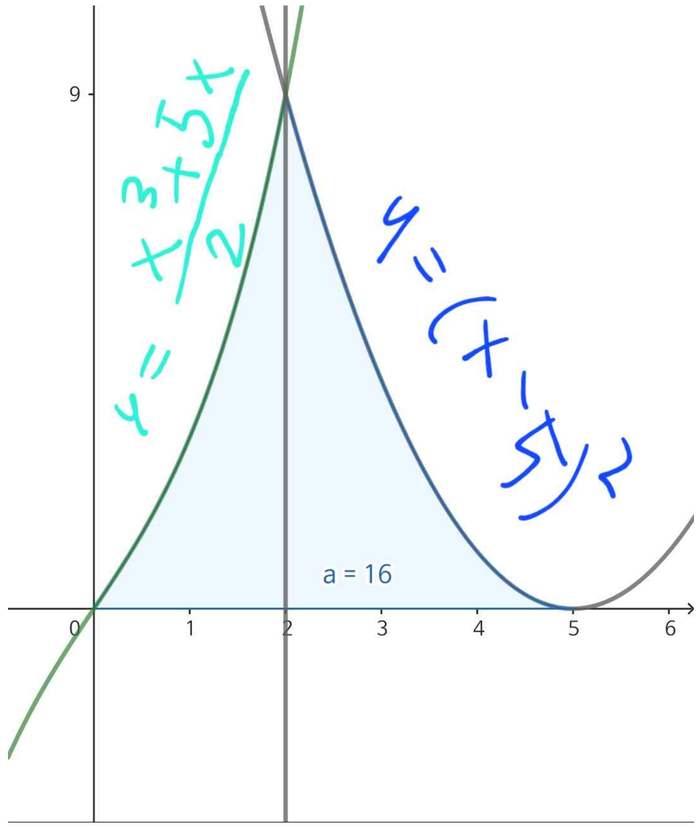
16. 로그에 미지수가 포함된 방정식을 푸는 문제입니다.
$\log_3(4x-1) = 3$에서 $4x - 1 = 3^3 = 27$, $4x = 28$, $x = 7$입니다.

17. 함수의 곱을 미분하는 문제입니다.
$f(x) = (x-2)(2x^2+1)$에서 $f'(x) = 2x^2 + 1 + (x-2)4x$이며, $f'(3) = 19 + 12 = 31$입니다.

18. 삼각함수가 포함된 부등식을 푸는 문제입니다.
$2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x + 1 \le 0$에서 $2(1 - \sin^2 x) + \sqrt{3}\sin x + 1 \le 0$,
$-2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 3 \le 0$, $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x - 3 \ge 0$,
$(2\sin x + \sqrt{3})(\sin x - \sqrt{3}) \ge 0$에서 $\sin x - \sqrt{3} < 0$이므로
$2\sin x + \sqrt{3} \le 0$, $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{4}{3}\pi \le x \le \frac{5}{3}\pi$입니다.

$\alpha = \frac{4}{3}\pi$이고 $\beta = \frac{5}{3}\pi$이므로 $\frac{\alpha + 4\beta}{\pi} = 8$입니다.

19. 적분으로 넓이를 구하는 문제입니다.
두 곡선의 교점을 구하면 $\frac{x^3 + 5x}{2} = (x-5)^2$,
$x^3 + 5x = 2x^2 - 20x + 50$, $x^3 - 2x^2 + 25x - 50 = 0$,
$x^2(x-2) + 25(x-2) = 0$, $(x-2)(x^2+25) = 0$에서 $x = 2$입니다.



구해야 하는 넓이는 $\int_0^2 \frac{x^3 + 5x}{2} dx + \int_2^5 (x^2 - 10x + 25) dx$입니다.

$\int_0^2 \frac{x^3 + 5x}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} + \frac{5x^2}{4}\right]_0^2 = 7$이고,

$\int_2^5 (x^2 - 10x + 25) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 25x\right]_2^5 = 9$이므로 구하는 넓이는 $7 + 9 = 16$입니다.

20. 함수의 미분가능성에 대한 문제입니다.
$f(x) = |x^3 - (a+1)x^2 + 3(a-1)x - 2a + 3|$
$= |(x-1)(x^2 - ax + 2a - 3)|$입니다.

$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{|x-1| \times |x^2 - ax + 2a - 3|}{x - 1}$
$= -|1 - a + 2a - 3| = -|a-2|$입니다.

마찬가지로 $\lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = |a-2|$입니다.

$a = 2$인 경우 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 미분가능하며, $f(x) = |(x-1)(x^2 - 2x + 1)| = |(x-1)^3|$입니다.
이때 함수 $f(x)$가 $x = k$에서 미분가능하지 않도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않습니다.
따라서 $a \ne 2$이며, 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 미분가능하지 않아야 하고, 그 외의 값에서는 전부 미분이 가능해야 합니다.
그러기 위해서는 우선 방정식 $f(x) = 0$의 실근이 $x = 1$뿐인 경우를 생각할 수 있습니다.
이때 이차방정식 $x^2 - ax + 2a - 3 = 0$은 실근을 가지지 말아야 하므로 $a^2 - 4(2a-3) = a^2 - 8a + 12 = (a-2)(a-6) < 0$, $a = 3$, $a = 4$, $a = 5$가 가능합니다.
$a = 6$인 경우, $f(x) = |(x-1)(x^2 - 6x + 9)| = |(x-1)(x-3)^2|$이며, 이 함수는 $x = 3$에서 미분가능하고 $x = 1$에서는 미분가능하지 않으므로 조건을 만족합니다.
따라서 조건을 만족시키는 a의 값은 3, 4, 5, 6으로 모두 더하면 18입니다.

21. 등차수열에 대한 문제입니다.

$a_n \times b_n = 30n^2 + 9n - 12 = 3(10n^2 + 3n - 4) = 3(5n+4)(2n-1)$

a_n, b_n은 n에 대한 일차식이고, $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$은 n에 대한 이차식이며, 최댓값이 존재하므로 등차수열의 공차는 b_n이 더 커야 합니다.

$a_n = 2n-1$, $b_n = 15n+12$인 경우 $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$의 최댓값이 자연수가 되지 않습니다.

$a_n = 5n+4$, $b_n = 6n-3$인 경우 $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n}(7-k)$이 $n=6$ 또는 $n=7$일 때 최댓값 21을 가지므로 조건을 만족합니다.

두 집합 $A = \{a_n | n\text{은 자연수}\}$, $B = \{b_n | n\text{은 자연수}\}$를 원소 나열법으로 제시하면

$A = \{9, 14, 19, 24, 29, \ldots\}$, $B = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$입니다.

집합 $A \cap B$는 $A \cap B = \{9, 39, 69, \ldots\}$이며, $t = 69$입니다.

$a_p = 5p+4 = 69$에서 $p = 13$입니다.

$\sum_{k=1}^{13} a_k = \frac{13 \times (a_1 + a_{13})}{2} = \frac{13 \times (9+69)}{2} = 507$입니다.

22. 정적분으로 정의된 함수를 추론하는 문제입니다.

$\int_1^x \{f(t) + g(t)\} = x\{f(x) - g(x)\} - 2x^3 + 2x^2 + 8x - g(-1)$를 미분하면

$f(x) + g(x) = f(x) - g(x) + x\{f'(x) - g'(x)\} - 6x^2 + 4x + 8$

$2g(x) = x\{f'(x) - g'(x)\} - 6x^2 + 4x + 8$

이 식에 $x = 0$을 대입하면 $g(0) = 4$이며, $g(x)$는 일차함수이므로 $g(x) = mx + 4$로 놓을 수 있으며, $g'(x) = m$입니다.

$2mx + 8 = x\{f'(x) - m\} - 6x^2 + 4x + 8$에서

$f'(x) = 6x + 3m - 4$, $f(x) = 3x^2 + (3m-4)x + C$입니다.

$\int_1^x \{f(t) + g(t)\} = x\{f(x) - g(x)\} - 2x^3 + 2x^2 + 8x - g(-1)$에

$x = 1$을 대입하면 $0 = f(1) - g(1) + 8 - g(-1)$이며, $g(1) + g(-1) = 8$이므로 $f(1) = 0$,

$f(x) = 3x^2 + (3m-4)x - 3m + 1$입니다.

(나)에서, $f(x) = (x-1)(3x + 3m - 1)$이므로 $\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{x-k}$에서

$k = 1$ 또는 $k = \frac{1-3m}{3}$입니다.

$k = 1$인 경우, $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x+3m-1)}{x-1} + f(0) + 19 = 0$

$3m + 2 + (-3m+1) + 19 = 0$인 m의 값은 존재하지 않습니다.

$k = \frac{1-3m}{3}$인 경우,

$$\lim_{x \to \frac{1-3m}{3}} \frac{(x-1)(3x+3m-1)}{x - \frac{1-3m}{3}} + f(0) + 19 = 0$$

$3\left(\frac{1-3m}{3} - 1\right) + (-3m+1) + 19 = -6m + 18 = 0$에서 $m = 3$이며, $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$, $g(x) = 3x + 4$입니다.

$f(2) + g(4) = 14 + 16 = 30$입니다.

수학 영역(미적분) 정답

23	⑤	24	④	25	③	26	③
27	②	28	②	29	50	30	6

23. 지수함수의 극한을 구하는 문제입니다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x} = \lim_{x \to 0} \left\{ 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times (\sqrt{x+1} + 1) \right\}$$

$2 \times 1 \times 2 = 4$입니다.

24. 매개변수로 나타내어진 함수의 미분에 대한 문제입니다.

$x = -\frac{4}{t+1}$, $y = \sin(2t)$에 대하여

$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{(t+1)^2}$, $\frac{dy}{dt} = 2\cos(2t)$이며, $t = 0$인 경우 $\frac{dx}{dt} = 4$, $\frac{dy}{dt} = 2$이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$입니다.

25. 수열의 극한을 구하는 문제입니다.

점 $(n, 2n^2)$을 중심으로 하면서 x축과 접하는 원의 반지름의 길이는 $2n^2$입니다.

y축 위의 점 $(0, a_n)$에 대하여 $\sqrt{n^2 + (a_n - 2n^2)^2} = 2n^2$에서

$n^2 + (a_n - 2n^2)^2 = 4n^4$, $(a_n - 2n^2)^2 = 4n^4 - n^2$,

$|a_n - 2n^2| = n\sqrt{4n^2 - 1}$에서 $a_n = 2n^2 - n\sqrt{4n^2 - 1}$입니다.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} n(2n - \sqrt{4n^2 - 1})$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n(2n - \sqrt{4n^2 - 1})(2n + \sqrt{4n^2 - 1})}{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n + \sqrt{4n^2 - 1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{4}$$ 입니다.

26. 정적분을 급수로 나타내는 문제입니다.

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} |\sin(\frac{2\pi k}{n})|$에서 $\frac{k}{n} = x$로 놓으면 $k = 1$일 때 $x = 0$, $k = n$일 때 $x = 1$입니다.

$f(x) = x|\sin(2\pi x)|$라고 하면 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$입니다.

$$\int x\sin(2\pi x)dx = -\frac{x\cos(2\pi x)}{2\pi} + \int \frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}dx$$

$= -\frac{x\cos(2\pi x)}{2\pi} + \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2} = F(x)$라고 합시다.

$0 \le x < \frac{1}{2}$에서 $f(x) = x\sin(2\pi x)$이고, $\frac{1}{2} \le x \le 1$에서 $f(x) = -x\sin(2\pi x)$이므로

$$\int_0^1 f(x)dx = F(\tfrac{1}{2}) - F(0) - \left\{ F(1) - F(\tfrac{1}{2}) \right\} = 2F(\tfrac{1}{2}) - F(0) - F(1)$$

$= 2 \times \frac{1}{4\pi} - 0 - (-\frac{1}{2\pi}) = \frac{1}{\pi}$입니다.

27. 치환적분을 활용한 문제입니다.

$f(x) = e^{3x} + e^x + 2$의 역함수 $g(x)$에 대하여, $\int_1^3 \frac{1}{x^2} g(\frac{12}{x})dx$에서 $\frac{12}{x} = t$로 치환하면 $dt = -\frac{12}{x^2}dx$, $dx = -\frac{x^2}{12}dt$입니다.

$x = 1$일 때 $t = 12$이고, $x = 3$일 때 $t = 4$이므로

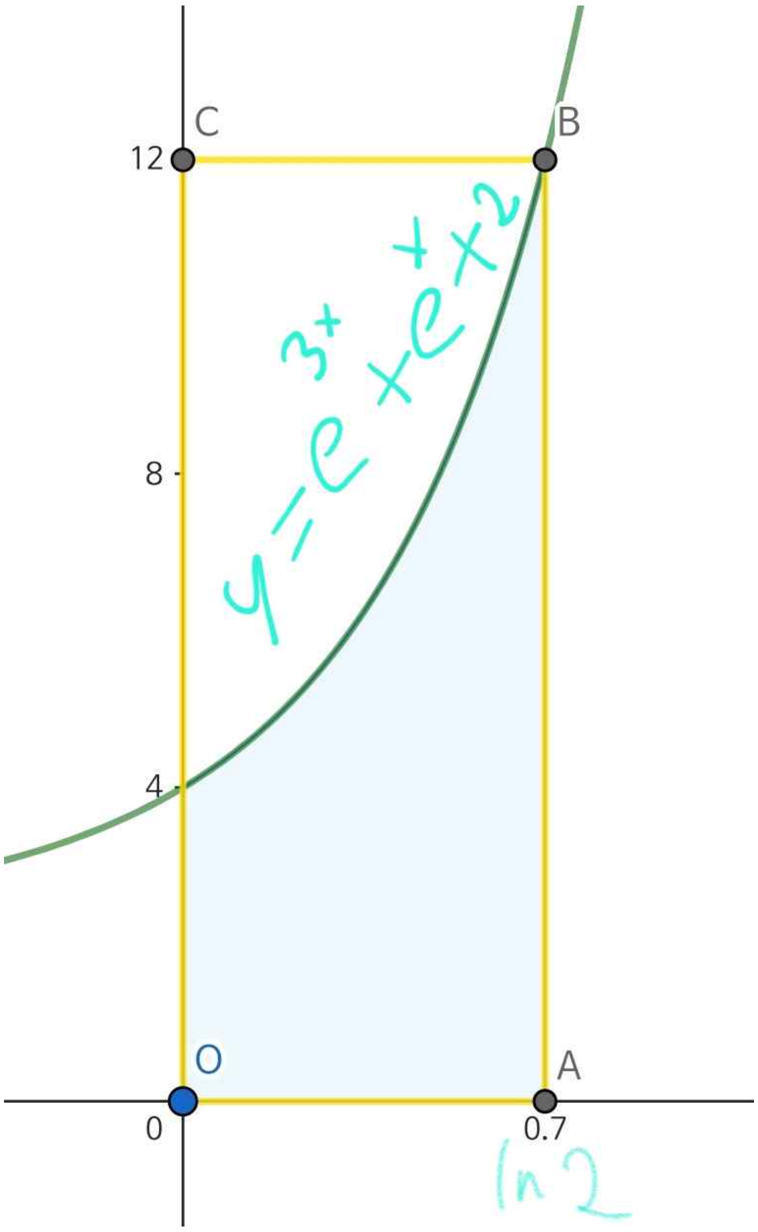
$\int_{12}^{4} \left\{ g(t) \times \frac{1}{x^2} \times (-\frac{x^2}{12}) \right\} dt = \frac{1}{12} \int_4^{12} g(t)dt$입니다.

$t=f(s)$로 치환하면, $f(0)=4$, $f(\ln 2)=12$이고 $dt=f'(s)ds$이므로 $\frac{1}{12}\int_0^{\ln 2} g(f(s))f'(s)ds=\frac{1}{12}\int_0^{\ln 2} sf'(s)ds$

$=\frac{1}{12}\times[sf(s)]_0^{\ln 2}-\frac{1}{12}\int_0^{\ln 2} f(s)ds$를 계산하면

$\ln 2-\frac{1}{12}\times\left[\frac{e^{3x}}{3}+e^x+2x\right]_0^{\ln 2}=\ln 2-\frac{1}{12}(\frac{14}{3}+2\ln 2-\frac{4}{3})$

$=\frac{5}{6}\ln 2-\frac{5}{18}$입니다.



[다른 풀이]

$\int_4^{12} g(x)dx=12\ln 2-\int_0^{\ln 2} f(x)dx$이므로

$\int_0^{\ln 2}(e^{3x}+e^x+2)dx=\left[\frac{e^{3x}}{3}+e^x+2x\right]_0^{\ln 2}=\frac{10}{3}+2\ln 2$에서

$\int_4^{12} g(x)dx=12\ln 2-\int_0^{\ln 2} f(x)dx=12\ln 2-(\frac{10}{3}+2\ln 2)$

$=10\ln 2-\frac{10}{3}$

$\frac{1}{12}\int_4^{12} g(x)dx=\frac{5}{6}\ln 2-\frac{5}{18}$입니다.

28. 등비급수에 대한 문제입니다.

주어진 등비수열의 첫째항과 공비를 각각 a, r이라고 하면 $ar=3$이며, $0<r<1$입니다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n=\frac{3}{r}+\frac{3}{1-r}\le 16$에서

$3\le r(1-r)16\,(r(1-r)>0)$, $16r^2-16r+3\le 0$

$(4r-1)(4r-3)\le 0$, $\frac{1}{4}\le r\le\frac{3}{4}$입니다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\times a_{n+1})\ge 5\times\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\times a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n)^2\times r\}=r\times\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=r\times\frac{a^2}{1-r^2}$

$=\frac{a^2r}{1-r^2}=\frac{3a}{1-r^2}$이며, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$은 첫째항은 a, 공비는 $-r$인 등비급수의 합인 $\frac{a}{1+r}$입니다.

$\frac{3a}{1-r^2}\ge\frac{5a}{1+r}$에서 $\frac{3}{1-r}\ge 5$, $3\ge 5-5r$, $5r\ge 2$, $r\ge\frac{2}{5}$이므로 $\frac{2}{5}\le r\le\frac{3}{4}$입니다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$은 첫째항이 $a_1=\frac{3}{r}$이고 공비가 r^2인 등비급수의 합입니다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}=\frac{\frac{3}{r}}{1-r^2}=\frac{3}{r-r^3}$이며, $\frac{2}{5}\le r\le\frac{3}{4}$에서 $\frac{3}{r-r^3}$의 최댓값과 최솟값을 구해야 합니다.

$f(r)=\frac{3}{r-r^3}$이라고 하면 $f'(r)=-(1-3r^2)\times\frac{3}{(r-r^3)^2}$이며,

$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 극솟값을 가지며, 최솟값은

$f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}}=\frac{3}{\frac{2}{9}\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$입니다.

$f(\frac{2}{5})=\frac{3}{\frac{2}{5}-\frac{8}{125}}=\frac{3}{\frac{42}{125}}=\frac{125}{14}$,

$f(\frac{3}{4})=\frac{3}{\frac{3}{4}-\frac{27}{64}}=\frac{3}{\frac{21}{64}}=\frac{64}{7}$에서 $\frac{125}{14}<\frac{64}{7}$이므로 최댓값은 $\frac{64}{7}$입니다.

따라서 $7M+2\sqrt{3}m=7\times\frac{64}{7}+2\sqrt{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}=64+27=91$입니다.

29. 함수의 적분을 구하는 문제입니다.

주어진 그림에서 $\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$가 성립합니다.

$\overline{\mathrm{AO}}=1$이고, 두 삼각형 AOQ, HPQ는 서로 닮음이며, 닮음비는 $1:\sin\theta$입니다.

즉, 선분 OQ의 길이는 $1\times\frac{1}{1+\sin\theta}=\frac{1}{1+\sin\theta}$입니다.

삼각형 AOQ에서 $\angle\mathrm{AOQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$이며, $\sin(\angle\mathrm{AOQ})=\cos\theta$입니다.

삼각형 AOQ의 넓이는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AO}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\cos\theta=\frac{\cos\theta}{2(1+\sin\theta)}$입니다.

$\int_{\theta_1}^{\theta_2} S(\theta)d\theta=\frac{1}{2}[\ln(1+\sin\theta)]_{\theta_1}^{\theta_2}=\frac{1}{2}(\ln\frac{5}{3}-\ln\frac{16}{15})=\frac{1}{2}\ln\frac{25}{16}=\ln\frac{5}{4}$

$k=\ln\frac{5}{4}$에서 $e^k=\frac{5}{4}$, $40\times e^k=50$입니다.

30. 몫의 미분법을 활용한 문제입니다.

함수 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x-2)+2}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ a & (f(x)=0) \end{cases}$에 대하여 $f(k)=0$인 실수 k의 값은 오직 1개만 존재할 수 있습니다.
만약에 2개 이상이라면, 주어진 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 될 수 없습니다.
두 함수 $f(x)$, $f(x-2)+2$는 모두 삼차함수이며, $f(k)=0$인 실수 k에 대하여 $f(k-2)+2=0$이 성립해야 합니다.
두 함수 $f(x)=(x-k)(x^2+m_1x+n_1)$,

$f(x-2)+2=(x-k)(x^2+m_2x+n_2)$

에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to k}\frac{f(x-2)+2}{f(x)}=a$이고, $g(x)=\dfrac{x^2+m_2x+n_2}{x^2+m_1x+n_1}$입니다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $x^2+m_1x+n_1>0$입니다.
함수 $g(x)$가 $x=b$에서 최솟값 0을 가지는 경우, $g(b)=g'(b)=0$이므로 $g(x)=\dfrac{(x-b)^2}{x^2+m_1x+n_1}$와 같은 식이 됩니다.
$f(x-2)+2=(x-b)^2(x-k)$에서
$f(x)=(x+2-b)^2(x+2-k)-2$이며,
$f(k)=2(k+2-b)^2-2=0$에서 $k+2-b=\pm1$, $k-b=-1$ 또는 $k-b=-3$이 되어야 합니다.
$k-b=-3$인 경우, $f(x)=(x-1-k)^2(x+2-k)-2$인데, $f(k-\sqrt{3})=f(k+\sqrt{3})=0$이 되어 조건을 만족시키지 못합니다.
$k-b=-1$인 경우, $f(x)=(x+1-k)^2(x+2-k)-2$인데, $f(x)=(x-k)\{(x-k)^2+4(x-k)+5\}=0$인 x의 값은 k뿐이므로 조건을 만족합니다.

즉, $g(x)=\dfrac{(x-k-1)^2}{(x-k)^2+4(x-k)+5}$입니다.

$g(x+k)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+4x+5}=\dfrac{x^2+4x+5-6x-4}{x^2+4x+5}=1-\dfrac{6x+4}{x^2+4x+5}$

$g'(x+k)=\dfrac{-6(x^2+4x+5)+(6x+4)(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2}$

$=\dfrac{-6x^2-24x-30+12x^2+32x+16}{(x^2+4x+5)^2}=\dfrac{6x^2+8x-14}{(x^2+4x+5)^2}$

$=\dfrac{2(3x^2+4x-7)}{(x^2+4x+5)^2}=\dfrac{2(x-1)(3x+7)}{(x^2+4x+5)^2}=0$에서 함수 $g(x+k)$는 $x=-\dfrac{7}{3}$일 때 극대이며, $x=1$일 때 극소입니다.

함수 $g(x)$가 $x=-\dfrac{1}{3}$에서 최댓값을 가지므로 $-\dfrac{7}{3}+k=-\dfrac{1}{3}$, $k=2$, $b=3$입니다.
$f(x)=(x-2)(x^2+1)$, $f(x-2)+2=(x-2)(x-3)^2$이며,
$g(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+1}$입니다.

$M=g(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{\frac{100}{9}}{\frac{1}{9}+1}=10$이며, $a=\displaystyle\lim_{x\to2}g(x)=\frac{1}{5}$입니다.

따라서 $a\times b\times M=\dfrac{1}{5}\times3\times10=6$입니다.