2024학년도 사관학교 1차 선발시험 리뷰노트

수능 예상 등급컷

	1등급	2등급	3등급	4등급	난이도
확률과 통계	88	79	64	51	보통 이상
미적분	84	74	60	47	
기하	86	77	63	49	

총평 및 예상 기조

공통 앞 부분이 굉장히 밀도 있게 출제되었던 시험이었습니다. 공통 7~8번은 계산량이나 아이디어 측면에서 4점에 들어가도 손색이 없을 정도로 상당히 빡빡했으며, 이와 관련하여 학생들이 시간과의 싸움에서 많이 고생을 했을 것으로 예상됩니다.

4점 후반대 문항의 경우 최근의 출제 경향에 맞게 킬러가 배제되고 큰 아이디어의 요구가 필요하지 않은 문제들로 구성되어 있었습니다. 기출을 변형한 형태의 문항들도 많이 보여 기출문제 학습이 충분히 이루어진 학생이라면 무난하게 넘어갔을 것으로 생각합니다.

신유형이 많은 문제였습니다. 정확히는 새로운 소재들로 많이 구성된 모의고사라고 보는 것이 옳을 것 같습니다. 이는 4점 후반대에서는 잘 나타나지 않았지만 앞 번호 대에서 많이 나타난 것 같습니다. 문항의 퀄리티 자체는 대부분의 시중 문제집을 뛰어넘을 정도로 매우 준수한 편이었습니다.

최근 기조를 잘 반영한 모의고사라 생각합니다. 앞 번호대를 빡빡하게 해서 뒷 번호에 접근할만한 여유를 주지 않은 시험으로 생각이 듭니다. 하지만 최상위권 학생들의 경우 만점을 받기는 오히려 쉬웠을 것이라 생각됩니다. 이와는 대조적으로 3등급 이후의 학생들은 이번 시험에서 만족하지 못할만한 점수를 취득한 학생이 굉장히 많을 것으로 생각합니다. 변별 요소를 킬러가 아닌 일반 4점에 집중시켰기 때문입니다.

시험의 결과와 관계 없이 항상 자신의 소신을 지키며 남은 입시에 임해주셨으면 좋겠습니다! 파이팅!

문제별 REVIEW

다음 페이지부터 참조

2024학년도 사관학교 공통 7번

8. 다음 조건을 만족시키는 모든 유리수 r의 값의 합은? [3점]

(가) $1<r<9$
(나) r를 기약분수로 나타낼 때, 분모는 7이고 분자는 홀수이다.

① 102 ② 108 ③ 114 ④ 120 ⑤ 128

출제요소 등차수열의 합

풀이

조건 (가)를 만족하면서 분모가 7, 분자가 홀수인 유리수를 나열하면

$$\frac{9}{7},\ \frac{11}{7},\ \frac{13}{7},\ \cdots,\ \frac{61}{7} \quad \cdots \ ㉠$$

이므로 이들을 전부 합하면

$$27\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{7}+\frac{61}{7}\right)=135$$

㉠ 중에서 자연수인 것은 3, 5, 7이므로 이들을 빼면

$$135-3-5-7=120$$

FOCUS ON!

등차수열의 합이나 어떤 수열의 합을 구할 때 부분들의 합으로 구하는 경우가 있다. 즉, 이 문제의 경우에 말 그대로 (가), (나)를 동시에 만족하는 수들을 모두 나열해서 규칙성이 있는 일부분별로 합을 구하는 경우가 있다.

하지만 이와 같이 전체에서 조건을 만족하지 않는 부분을 빼는 방식으로도 문제를 해결하는 방법이 있음에 유의하자.

[IDEA BANK]

수학(하) 포함과 배제의 원리
수학(하) 여집합

2022학년도 6월 공통 13번

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

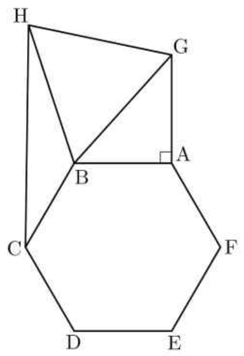
$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150
② 160
③ 170
④ 180
⑤ 190

2024학년도 사관학교 공통 9번

9. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에 대하여 점 G를 $\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{5}$, $\angle\mathrm{BAG}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 점 H를 삼각형 BGH가 정삼각형이 되도록 잡는다. 선분 $\overline{\mathrm{CH}}$의 길이는? (단, 점 G는 정육각형 외부에 있고, 두 선분 $\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{BH}}$는 만나지 않는다.) [4점]



① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

출제요소 코사인법칙과 삼각함수의 성질

풀이

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{BG}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AG}}^2}=3$$

이때, $\angle\mathrm{GBH}+\angle\mathrm{ABC}=\pi$이므로

$$\angle\mathrm{CBH}=\pi-\angle\mathrm{ABG}$$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{BG}}=3$이므로 삼각형 CBH에 대하여 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{2^2+3^2-2\times2\times3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{21}$$

FOCUS ON!

절대 어렵지는 않지만 육각형까지 나오는 경우는 처음이다 보니 당황한 학생이 많았을 것이다. 무엇보다도 도형 문제가 4점 초반에 나오는 경우가 많지 않은 것도 덤이다.

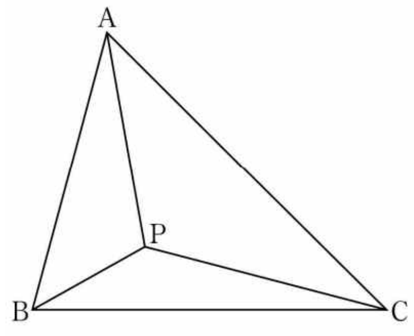
이는 특정 '고난도 출제 단원'에만 집착해서는 안 됨을 시사한다. 도형 문제도 언제든지 쉬워질 수 있고, 지수로그 문제도 언제든지 어려워질 수 있기 때문에 골고루 학습할 필요성을 상기시킨다.

2024학년도 3월 공통 11번

그림과 같이

$$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ,\ \overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$$

인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PBC}=30^\circ$, $\angle\mathrm{PCB}=15^\circ$일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

② $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$

③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

④ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$

⑤ $2+\sqrt{3}$

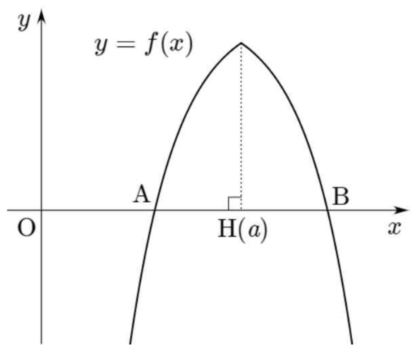
2024학년도 사관학교 공통 11번

11. 함수 $f(x)=-2^{|x-a|}+a$의 그래프가 x축과 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이다. 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 최댓값 q를 가질 때, $p+q$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 14　② 15　③ 16　④ 17　⑤ 18

출제요소　지수함수의 그래프

풀이



함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=a$에 대하여 대칭이다.

곧, 점 $(a,\ f(a))$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{HB}}=3$이다. ($\because$ $\overline{\mathrm{AB}}=6$)

따라서 점 B의 좌표는 $(a+3,\ 0)$이므로 이를 $y=f(x)$에 대입하면

$-2^3+a=0$　　　$\therefore\ a=8$

한편, $f(x)$의 최댓값은 $x=a$일 때, $f(a)$이므로

$p=8,\quad q=f(8)=-2^0+8=7$

$\therefore\ p+q=15$

FOCUS ON!

대칭함수의 성질을 다소 직접적으로 묻는 문제였다.
소재의 특수성으로 인해 동일한 형태의 문제가 나올 가능성이 높지는 않지만 지수함수와 로그함수의 대칭성 등에 대해서 잘 살펴보아야 하는 문제이다.
특히 대칭적인 함수에서 좌표 처리를 어떻게 해야 하는지에 대한 훈련이 뒷받침되어 있는지 확인해보도록 하자.

[IDEA BANK]

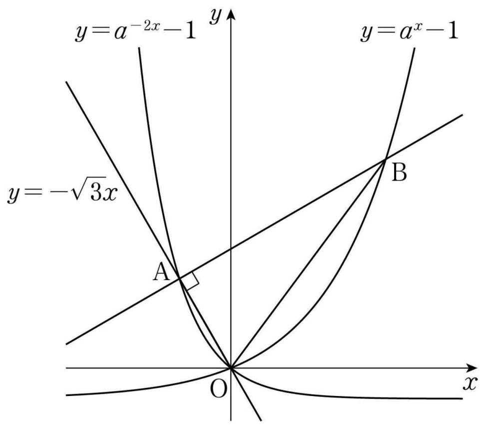
수학(상)　평행이동과 대칭이동
수학(하)　절댓값 함수

2022학년도 10월 공통 21번

그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=a^{-2x}-1,\quad y=a^x-1$$

이 있다. 곡선 $y=a^{-2x}-1$과 직선 $y=-\sqrt{3}x$가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y=a^x-1$과 제1사분면에서 만나는 점 B라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



2024학년도 사관학교 공통 12번

12. 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ a-f(-x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=-4$
(나) 함수 $g(x)$의 극솟값은 0이다.

$g(-a)$의 값은? [4점]

① -40 ② -36 ③ -32 ④ -28 ⑤ -24

출제요소 함수의 극한

풀이

조건 (가)에서 $\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}$
이기 위하여 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$f(0)=a-f(0)$

$\therefore\ f(0)=\frac{a}{2}$

$f(x)=-x^2+px+\frac{a}{2}$ (p는 상수)라고 두면

$$g(x)=\begin{cases} -x^2+px+\frac{a}{2} & (x<0) \\ x^2+px+\frac{a}{2} & (x\geq 0) \end{cases}$$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=p=-4$이다.
곧 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가진다.

$g(2)=4+2p+\frac{a}{2}=-4+\frac{a}{2}=0$ $\quad\therefore\ a=8$

따라서 $g(-8)=-64+32+4=-28$

FOCUS ON!

구간별로 정의된 함수가 나오는 순간 가장 먼저 생각해야 할 것은 연속성과 미분가능성에 대한 정보이다. 문제에서 현재 바라고 있는 내용이 '불연속함수'에 대한 내용인지, '미분가능성'에 대한 내용인지, 아님 단순한 '함수 추론'에 대한 내용인지 정보들을 보고서 빠르게 판단해야 한다. 만약 이 판단이 잘 안 선다면 우리가 기존에 본능적으로 했던 행동들을 개시하면서 차근차근 추적해보면 된다. 이 문제의 경우 조건 (가)의 극한식을 가장 먼저 해석하게 될 것이고 이 과정에서 자연스럽게 함수의 연속성을 생각하게 된다. 이후 일부 미지수가 제거되는 과정에서 함수의 개형이 일정 수준으로 결정되게 된다. 이와 같이 자연스러운 흐름에 따라 원래 하던 루틴을 반복하면 정답에 더욱 가까워질 수 있다.

2022학년도 3월 공통 12번

$a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\leq 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은? [4점]

(가) $x\neq 1$, $x\neq a$일 때, $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$이다.
(나) $h(1)=h(a)$

① $-\frac{15}{6}$
② $-\frac{7}{3}$
③ $-\frac{13}{6}$
④ -2
⑤ $-\frac{11}{6}$

2024학년도 사관학교 공통 13번

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=-3$, $a_{20}=1$이고, 3 이상 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n-1}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

출제요소 수열의 합과 일반항

풀이

주어진 조건식을 전개하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=a_{n-1}$ (단, $n \ge 3$)

$a_n=-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-2})$ ⋯ ㉠

인데,

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}=a_{n-3}$ (단, $n \ge 5$)

이므로 $n \ge 5$이면 모든 자연수 n에 대하여
$a_n=-a_{n-3}$이다. 즉,

$a_{20}=a_{17}=\cdots=a_2=1$

한편, 주어진 조건식에 $n=3$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3=a_2$

$\therefore\ a_3=-a_1=3$

따라서

$$\sum_{n=1}^{50} a_n = 6\{(-3)+1+3+3+(-1)+(-3)\}+(-3)+1$$
$$= -2$$

FOCUS ON!

시그마와 관련된 식이 나왔을 때,

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

을 이용하는 스킬은 매우 기초적인 요소이다. 항상 본능적으로 활용하는 자세를 갖도록 하자. 또한, 한 식과 다른 식이 동시적으로 연계되는 경우가 있을 수도 있으니 한 번 이용한 식이라고 다시 안 쓰일 것이라 무시하지 않았음 한다. 이 문제의 경우 하나의 식이 핵심 아이디어에 최소한 3번은 활용되었다.

2022학년도 7월 공통 21번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$

(나) $|a_{n+1}-a_n| = 2n-1$

$a_2=9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

2024학년도 사관학교 공통 14번

14. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-kx$$

라 하고, 실수 a와 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a \text{ 또는 } x>a+1) \\ -f(x) & (a \le x \le a+1) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 두 실수 k, a의 값에 관계없이 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $k=4$일 때, 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 불연속인 실수 p의 개수가 1이 되도록 하는 실수 a의 개수는 3이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (k, a)의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

출제요소 함수의 극한

풀이

ㄱ. k의 값에 관계 없이 $f(0)=0$이므로 $f(0)=-f(0)$이다. 따라서 a의 값에 관계 없이 $x=0$에서 함수 $g(x)$는 연속이다. **(참)**

ㄴ. $g(x)$가 불연속이 될 수 있는 x는 $x=a$ 또는 $a+1$이다. 따라서 $g(x)$가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않기 위해서는 둘 중 하나의 점에서는 미분가능해야 한다.

따라서 $g(a)=0$ 또는 $g(a+1)=0$이어야 한다.

(i) $g(a)=0$인 경우

$f(x)=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$에서
$a(a+2)(a-2)=0$이므로

$a=-2$ 또는 0 또는 2

(ii) $g(a+1)=0$인 경우

$f(x)=x(x+2)(x-2)$에 $x=a+1$을 대입하면
$(a+1)(a+3)(a-1)=0$이므로

$a=-3$ 또는 -1 또는 1

따라서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a의 개수는 6이다. **(거짓)**

ㄷ. 함수 $g(x)$가 불연속일 수 있는 x는 a, $a+1$ 뿐이다.
따라서 두 점에서 연속이기 위해

$$f(a)=0,\ f(a+1)=0 \ \cdots \ ㉠$$

이어야 한다. 한편, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 개 이상의 실근을 가지려면 $k>0$이어야 한다.

이때, $f(x)=x(x-\sqrt{k})(x+\sqrt{k})$이고
방정식 $f(x)=0$의 해는
$x=-\sqrt{k}$ 또는 0 또는 k이고,

곧, ㉠에서 $\sqrt{k}=1$ 또는 $\sqrt{k}-(-\sqrt{k})=1$이므로

$k=1$ 또는 $\frac{1}{4}$이다.

(i) $k=1$이면 : $a=-1$ 또는 0

(ii) $k=\frac{1}{4}$이면 : $a=-\frac{1}{2}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (k, a)의 개수는 3이다. **(거짓)**

FOCUS ON!

전형적으로 경우의 수를 이용하여 어렵게 만든 문제이다. 문제 자체의 절대적인 난이도는 높지 않지만 하나의 경우라도 잘못 판단하면 자칫 오답에 빠져들 위험이 있기 때문에 정확하고 꼼꼼한 판단이 절대적으로 필요하다.

절대 뇌피셜로 '대충 이러겠지' 하는 느낌을 버려야 하며, 항상 자신을 의심하는 태도로 접근할 필요가 있는 유형이다. 특히나 '~가 존재한다', '~개 존재한다' 등의 발문은 자신이 낸 답을 몇 번이고 의심한 끝에 정답이라고 판단되었을 때 고를 수 있는 여유가 필요하다.

◤ 2023학년도 수능 공통 14번 ◢

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times \lim_{t\to 2+} g(x+t)$에 대하여 **〈보기〉**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄴ, ㄷ

◤ 2024학년도 사관학교 공통 15번

15. 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

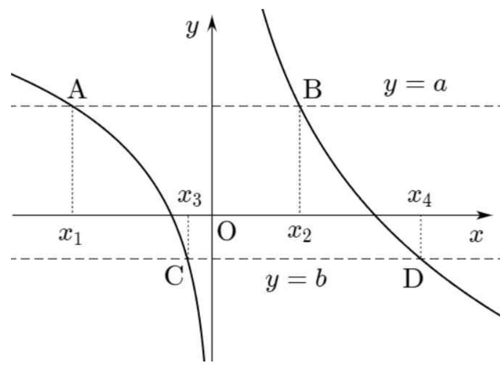
$$f(x)=\begin{cases}\log_4(-x) & (x<0)\\ 2-\log_2 x & (x>0)\end{cases}$$

이 있다. 직선 $y=a$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 하고, 직선 $y=b$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 C, D의 x좌표를 각각 x_3, $x_4(x_3<x_4)$라 하자. $\left|\frac{x_2}{x_1}\right|=\frac{1}{2}$이고 두 직선 AC와 BD가 평행할 때, $\left|\frac{x_4}{x_3}\right|$의 값은? (단, a, b는 $a\neq b$인 상수이다.) [4점]

① $3+3\sqrt{3}$ ② $5+2\sqrt{3}$ ③ $4+3\sqrt{3}$
④ $6+2\sqrt{3}$ ⑤ $5+3\sqrt{3}$

출제요소 로그함수의 그래프

풀이



위의 그래프에서 $x_2=k$라 하면 $x_1=-2k$이다. 따라서

$$\log_4(-(-2k))=2-\log_2 k$$

$$\log_4 2k=\log_2\frac{4}{k}$$

$$2k=\frac{16}{k^2} \qquad \therefore\ k=2$$

한편, 직선 AC와 직선 BD가 평행하므로 두 직선의 기울기가 서로 같다.

한편, 점 A와 점 C의 y좌표 차와 점 B와 점 D의 y좌표 차가 같으므로 각각의 x좌표 차도 같아야 한다.

따라서 점 C의 x좌표를 $-4+t$, 점 D의 x좌표를 $2+t$라 하자. 이때, 점 C와 점 D의 y좌표가 같으므로 각 좌표를 대입하면

$$\log_4(4-t)=2-\log_2(2+t)$$

$$\log_4(4-t)=\log_2\frac{4}{2+t}$$

$$4-t=\left(\frac{4}{2+t}\right)^2$$

$$-t^3+12t=0 \qquad \therefore\ t=0\ \text{또는}\ \pm2\sqrt{3}$$

이때, $t>0$이므로

$$x_3=-4+2\sqrt{3},\ x_4=2+2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \left|\frac{x_4}{x_3}\right|=5+3\sqrt{3}$$

FOCUS ON!

15번 치고는 조금 가볍게 풀렸던 문제였다. 13번에 가도 될 정도로 어렵지는 않았다. 이는 최근의 평가원 기조를 반영하려는 시도로 여겨진다. 특히 최근 킬러를 제거하려는 기조가 강해지면서 앞 문제를 빨리 치고 올라와 객관식을 빠르게 헤치울 필요성이 강조되고 있다. 이 점을 기억하자.

어떤 두 식을 서로 비교할 때 고정된 값이 있다면 식 계산하기가 훨씬 편해진다. 이 문제의 경우 두 직선의 기울기를 비교하는데 직선 상의 두 점의 y좌표 차가 같기 때문에 x좌표 차도 같아야 한다는 아이디어를 얻을 수 있었다. 고정된 값의 중요성을 기억하자.

[IDEA BANK]

중등 수학 2	직선의 방정식
수학(상)	삼차방정식

◤ 2020학년도 10월 나형 21번 ◢

두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, **〈보기〉**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$

ㄷ. $y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2024학년도 사관학교 공통 19번

19. x에 대한 방정식 $x^3-\frac{3n}{2}x^2+7=0$의 1보다 큰 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

출제요소 방정식에서의 미분의 활용

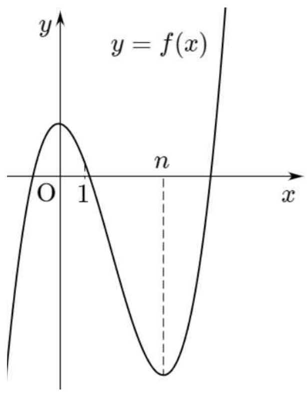
풀이

$f(x)=x^3-\frac{3n}{2}x^2+7$라 하자.

이때, $f'(x)=3x^2-3nx=3x(x-n)$이고, $n>0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 극댓값을 가지고,
$x=n$에서 극솟값을 가진다.

주어진 방정식이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가지기 위해



$$f(1)>0,\ f(n)<0$$

을 만족시켜야 한다. 따라서

$f(1)=8-\frac{3n}{2}>0$에서 $n<\frac{16}{3}$

$f(n)=7-\frac{n^3}{2}<0$에서 $n>\sqrt[3]{14}$

두 부등식을 동시에 만족시키는 자연수 $n=3,\ 4,\ 5$이므로
$3+4+5=12$

FOCUS ON!

방정식과 부등식 문제 풀이의 기본은 그래프 그리기이다.
함수를 적당히 세팅해두고 그래프를 잘 그릴 수 있다면
이러한 유형을 푸는 데에는 무리가 없다.

다만 이번 유형처럼 3점임에도 불구하고 꽤 어려운 형태로 문제가 출제될 수 있기 때문에 학생들은 이에 항상 대비해야 한다. 풀기에야 어렵지는 않지만, 원래의 패턴에서 벗어나 당황했을 때의 멘탈 관리도 중요하다는 것을 잊지 말자.

2022학년도 3월 공통 14번

두 함수

$$f(x)=x^3-kx+6,\quad g(x)=2x^2-2$$

에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.

ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2024학년도 사관학교 공통 21번

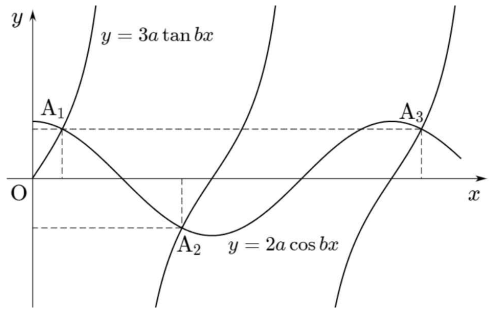
21. 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$y=3a\tan bx,\quad y=2a\cos bx$$

의 그래프가 만나는 점 중에서 x좌표가 0보다 크고 $\frac{5\pi}{2b}$ 보다 작은 세 점을 x좌표가 작은 점부터 x좌표의 크기순으로 A_1, A_2, A_3이라 하자. 선분 A_1A_3을 지름으로 하는 원이 점 A_2를 지나고 이 원의 넓이가 π일 때, $\left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 p는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제요소 삼각함수의 그래프

풀이



$3a\tan bx=2a\cos bx$라 두자.

이때, $a\neq 0$, $b\neq 0$이므로 양변을 a로 나누면

$$\frac{\tan bx}{\cos bx}=\frac{2}{3},\quad \frac{\sin bx}{\cos^2 bx}=\frac{2}{3}$$

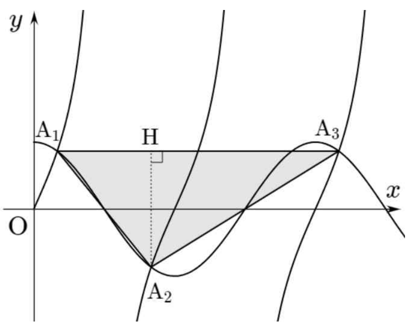
$$2\cos^2 bx=3\sin bx$$

$$2\sin^2 bx+3\sin bx-2=0$$

$$(2\sin bx-1)(\sin bx+2)=0$$

$$\therefore\ \sin bx=\frac{1}{2}\quad(\because\ -1\le \sin bx\le 1)$$

따라서 세 점 A_1, A_2, A_3의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하면 $x_1=\frac{\pi}{6b}$, $x_2=\frac{5\pi}{6b}$, $x_3=\frac{13\pi}{6b}$이다.



이때, 선분 A_1A_3을 지름으로 하는 원이 점 A_2를 지나므로 삼각형 $A_1A_2A_3$은 직각삼각형이다.

이 원의 지름의 길이는 $\overline{A_1A_3}=\frac{2\pi}{b}$이므로

원의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{\pi}{b}\right)^2=\pi$에서 $b=\pi$이고,

점 A_2에서 직선 A_1A_3에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 직각삼각형의 성질에 의해

$$\overline{A_1H}\times\overline{A_3H}=\overline{A_2H}^2$$

$$\frac{2\pi}{3b}\times\frac{4\pi}{3b}=\overline{A_2H}^2$$

$$\therefore\ \overline{A_2H}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

한편, 점 A_1와 점 A_2는 y절편의 절댓값이 같으므로 점 A_1의 y좌표는 $\frac{\sqrt{2}}{3}$이다. 따라서 점 A_1의 좌표를 대입하면

$$3a\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore\ a=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

따라서 $\left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=\frac{2}{27}$이므로 $p+q=29$

FOCUS ON!

삼각함수 문제에서는 특히나 주기성과 대칭성이 매우 강조된다. 이 문제의 경우에 그래프를 그리지 않고 문제를 풀려고 하면 상당히 고난도의 발상이 필요하지만 그래프를 그리면서 풀다보면 계산량이 조금 있을 뿐 난이도 자체는 그리 어렵지 않다.

특히 두 그래프의 교점을 구할 때는 두 함수를 서로 같다고 두고 구하는 방법이 많이 사용되는데, 직접 교점이 구해지는 경우에야 다행이지만 만일 구해지지 않는 경우에는 두 교점의 x좌표의 관계식 형태로도 나올 수 있음에 유의해야 한다.

[IDEA BANK]

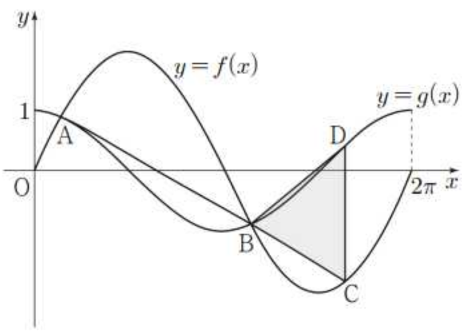
수학(상) 평행이동과 대칭이동
수학(하) 함수

◤ 2023학년도 4월 공통 13번 ◢

그림과 같이 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=k\sin x,\quad g(x)=\cos x$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\dfrac{\sqrt{15}}{8}\pi$

② $\dfrac{9\sqrt{5}}{40}\pi$

③ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}\pi$

④ $\dfrac{3\sqrt{10}}{16}\pi$

⑤ $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

2024학년도 사관학교 공통 22번

22. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x|f(x)|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 극한

$$\lim_{h\to0+}\left\{\frac{g(t+h)}{h}\times\frac{g(t-h)}{h}\right\}$$

가 양의 실수로 수렴하는 실수 t의 개수는 1이다.

(나) x에 대한 방정식 $\{g(x)\}^2+4g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(3)$의 값을 구하시오. [4점]

출제요소 도함수의 활용

풀이

조건 (가)에서 우선 주어진 극한이 수렴하려면
(분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$이어야 하므로 $g(t)=0$이다.

이때,

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\times\lim_{h\to0+}\frac{g(t-h)-g(t)}{h}$$
$$=-\left(\lim_{x\to t+}g'(x)\times\lim_{x\to t-}g'(x)\right)>0$$

다시 말해, $g(t)=0$이면서 $\lim_{x\to t+}g'(x)\times\lim_{x\to t-}g'(x)<0$인 실수 t의 개수가 1이다.

(i) $f(0)\neq0$ 이면

$x=0$에서 $\lim_{x\to t+}g'(x)\times\lim_{x\to t-}g'(x)\geq0$이므로
주어진 조건을 만족하는 실수 t가 존재하기 위해
방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

두 실근을 각각 α, β라고 하면 주어진 조건을 만족시키는 실수 t의 개수가 2이므로 모순.

(ii) $f(0)=0$ 이면

방정식 $f(x)=0$의 나머지 한 실근을 $x=\alpha$라 할 때,

조건 (가)를 만족시키는 실수 t는 오직 α 뿐이다.

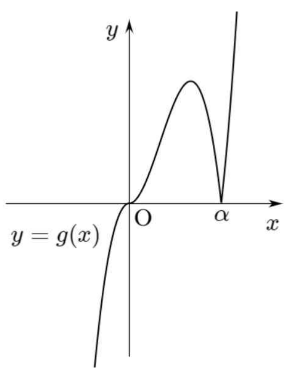
따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

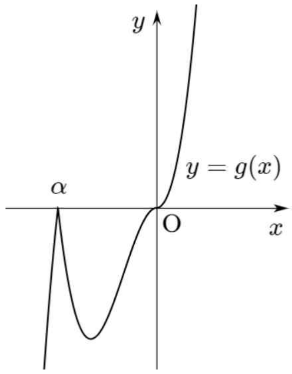
따라서 $g(x)=x|x(x-\alpha)|$라 둘 수 있다.

한편, 조건 (나)에서 방정식 $g(x)\{g(x)+4\}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4이려면 곡선 $y=g(x)$이 직선 $y=0$, $y=-4$와 만나는 모든 점의 개수가 4여야 한다.

… ㉠

$\alpha>0$일 때, $\alpha<0$일 때 $y=g(x)$의 그래프는 각각 다음과 같이 그려진다.





이 중 ㉠을 만족하는 개형은 $\alpha<0$일 때이고 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 조건 (나)에 의해 방정식 $g(x)=-4$의 서로 다른 실근의 개수도 2여야 한다.

$\alpha<x<0$에서 $g(x)=-x^2(x-\alpha)$이므로

$g'(x)=-3x^2+2\alpha x$

곧, $g'(x)=-3x\left(x-\frac{2\alpha}{3}\right)=0$에서 $g(x)$는 $x=\frac{2\alpha}{3}$에서 극솟값을 갖는다. 따라서

$g\left(\frac{2\alpha}{3}\right)=\frac{4}{27}\alpha^3=-4$ $\quad\therefore\ \alpha=-3$

$x>0$에서 $g(x)=x^2(x+3)$이므로 $g(3)=3^2\times6=54$

FOCUS ON!

극한으로 조건이 주어져 있을 때는 그 극한값이 존재할 조건에 대해 우선적으로 살펴보아야 한다. 일반적으로 극한식 형태의 문제는 '미분계수'를 나타내는 극한식과 단순 '함수의 극한'을 나타내는 극한식이 있는데 이 문제의 경우는 '미분계수' 관점의 극한에 가깝다 볼 수 있다.

고난도 문제의 경우 경우에 따라 $\lim_{x\to t+}g'(x)=g'(t+)$처럼 쓰는 등 자신만의 간결화된 표기법을 만들어 자신의 풀이를 더욱 이해하기 쉽게 정리하고 생각을 정돈시킬 필요가 있다.

[IDEA BANK]

수학(상) 이차방정식과 이차함수
수학(하) 절댓값 함수의 그래프
수학(하) 합성함수

◤ 2023학년도 6월 공통 22번 ◢

두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)\,f(x) & (x<0)\\(x+a)\,f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|\,g(x)\,|+\{g(t)\}^2}-|\,g(t)\,|}{(x+3)^2}$의 값이
> **존재하지 않는** 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

정답 및 해설

2022-06-13 [정답] ⑤

(ⅰ) $k=1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때

$f(1)=1$이고 $f(x+1)=f(x)$이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$에서

$f(\sqrt{k})=1$

(ⅱ) $k\neq 1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때

$f(\sqrt{k})=3$

따라서

$\sum_{k=1}^{20}k=210$이고, $1+4+9+16=30$이므로

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$

$$=\sum_{k=1}^{20}\left\{k\times f\frac{(\sqrt{k})}{3}\right\}$$

$$=30\times\frac{1}{3}+(210-30)\times\frac{3}{3}$$

$$=10+180=190$$

2024-03-11 [정답] ③

삼각형 PBC에서

$\angle\mathrm{BPC}=180^{\circ}-(30^{\circ}+15^{\circ})=135^{\circ}$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 135^{\circ}}=\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin 30^{\circ}}$이므로

$\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{3}\times\frac{\sin 30^{\circ}}{\sin 135^{\circ}}=\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AC}}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2+b^2-2\times 2\sqrt{2}\times b\times\cos 60^{\circ}$

$b^2-2\sqrt{2}b-4=0$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^{\circ}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$이므로 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$A=60^{\circ}$에서 $C<120^{\circ}$이므로 $C=45^{\circ}$

$\angle\mathrm{PCA}=45^{\circ}-15^{\circ}=30^{\circ}$이므로 삼각형 APC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\sin 30^{\circ}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

2022-10-21 [정답] 8

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}k(k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{19}k$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4k$이다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자.

직선 OA와 x축이 이루는 예각의 크기가 $60°$이므로

$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}k,\ y_1=\frac{3}{2}k$

따라서 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k,\ \frac{3}{2}k\right)$

직선 AB 의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

직선 AB와 x축이 이루는 예각의 크기가 $30°$이다.

$x_2-x_1=4k\cos 30°=2\sqrt{3}k$에서

$x_2=x_1+2\sqrt{3}k=\frac{3\sqrt{3}}{2}k$

$y_2-y_1=4k\sin 30°=2k$에서

$y_2=y_1+2k=\frac{7}{2}k$

따라서 $\mathrm{B}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k,\ \frac{7}{2}k\right)$

점 A는 곡선 $y=a^{-2x}-1$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}k=a^{\sqrt{3}k}-1$에서 $a^{\sqrt{3}k}=\frac{3k+2}{2}$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y=a^{x}-1$ 위의 점이므로

$\frac{7}{2}k=a^{\frac{3\sqrt{3}k}{2}}-1$에서 $a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k}=\frac{7k+2}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{3k+2}{2}\right)^3=\left(\frac{7k+2}{2}\right)^2$$

$27k^3-44k^2-20k=0,\ k(k-2)(27k+10)=0$

$k>0$이므로 $k=2$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=4k=8$

2022-03-12 [정답] ③

함수 $f(x)$는 $f(1)=0,\ f(a)=0$이고,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to 2+}f(x)=-4+2a$에서

$\lim_{x\to 2-}f(x)\neq\lim_{x\to 2+}f(x)$이므로 $x=2$에서 불연속이다.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $h(x)$는 $x=1,\ x=a,\ x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}=h(1),\ \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=h(a)$에서

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0,\ \lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}g(x)=0,\ \lim_{x\to a}g(x)=0$ 즉, $g(1)=0,\ g(a)=0$

또, $\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)},\ \frac{g(2)}{-1}=\frac{g(2)}{-4+2a}$이므로

$g(2)=0$이고 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$이다.

$$\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-a)}{x-3}$$
$$=\frac{1-a}{2}$$
$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)}{-x}$$
$$=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$h(1)=h(a)$ 이므로

$$\frac{1-a}{2}=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$a>2$ 이므로 $a=4$

따라서

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x\le2)\\ -\dfrac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2)\end{cases}$$

이므로

$$h(1)+h(3)=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{13}{6}$$

2022-07-21 [정답] 180

조건 (가)에 의하여

$$a_{2n-1}+a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}a_k-\sum_{k=1}^{2(n-1)}a_k=17n-17(n-1)=17$$

$(n\ge2)$

조건 (나)에 의하여

$|a_{2n}-a_{2n-1}|=2(2n-1)-1=4n-3 \quad (n\ge1)$

(ⅰ) $n=2$인 경우

$|a_4-a_3|=5$이고 $a_3+a_4=17$

$(a_3,\ a_4)=(6,\ 11)$ 또는 $(a_3,\ a_4)=(11,\ 6)$

조건 (나)에 의하여

$|a_3-a_2|=|a_3-9|=3$이므로

$a_3=6,\ a_4=11$

(ⅱ) $n=3$인 경우

$|a_6-a_5|=9$이고 $a_5+a_6=17$

$(a_5,\ a_6)=(4,\ 13)$ 또는 $(a_5,\ a_6)=(13,\ 4)$

조건 (나)에 의하여

$|a_5-a_4|=|a_5-11|=7$이므로

$a_5=4,\ a_6=13$

(ⅰ), (ⅱ)와 같은 방법을 반복하면

$a_8=15,\ a_{10}=17,\ \cdots,\ a_{20}=27$이므로

$\sum_{n=1}^{10}a_{2n}$의 값은 첫째항이 9이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_{2n}=\frac{10\times(18+9\times2)}{2}=180$

2023-11-14 [정답] ①

ㄱ. $x>1$에서 $g(x)=x$이므로

$$h(1)=\lim_{t\to0+}g(1+t)\times\lim_{t\to2+}g(1+t)$$
$$=\lim_{t\to0+}(1+t)\times\lim_{t\to2+}(1+t)$$
$$=1\times3$$
$$=3 \text{ (참)}$$

ㄴ. $h(x)=\lim_{t\to0+}g(x+t)\times\lim_{t\to2+}g(x+t)$ 이므로

$x<-3$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

$x=-3$일 때 $h(-3)=-3\times f(-1)$

$-3<x<-1$일 때 $h(x)=x\times f(x+2)$

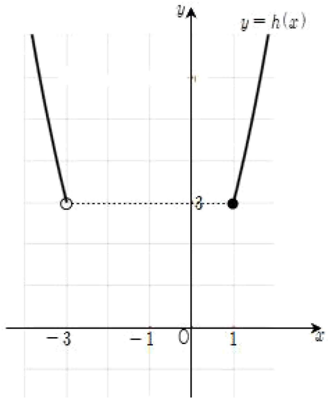
$x=-1$일 때 $h(-1)=f(-1)\times1$

$-1<x<1$일 때 $h(x)=f(x)\times(x+2)$

$x=1$일 때 $h(1)=1\times3$

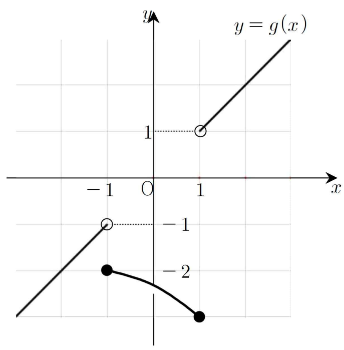
$x>1$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

즉, $x<-3$ 또는 $x\ge1$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



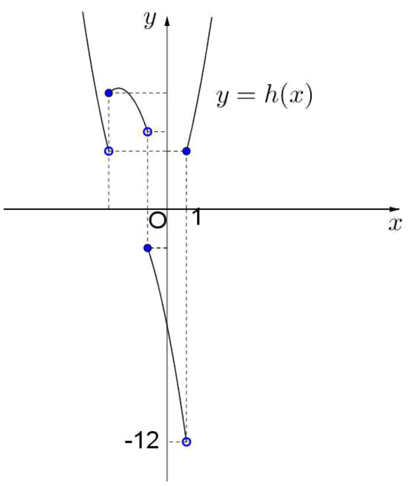
$f(-3)\neq3$이면 함수 $h(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.
즉, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



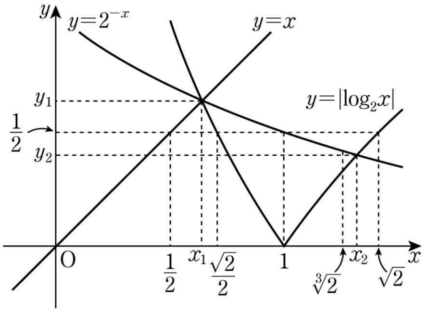
이때,
$h(-3)=-3\times f(-1)=-3\times(-2)=6$
$h(-1)=f(-1)\times 1=-2\times 1=-2$
이다.
$-3<x<-1$에서 $h(x)>0$
또 $-1<x<1$에서 $h(x)=f(x)\times(x+2)$이므로
$h'(x)=f'(x)\times(x+2)+f(x)$
$f'(x)<0,\ x+2>0,\ f(x)<0$ 이므로 $h'(x)<0$
즉, $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소하고,
$f(1)=3$이므로
함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

[다른 풀이]
ㄴ. 〈반례〉
$f(x)=2$라 하자.
$-3<x<-1$일 때, $h(x)=x\times 2=2x$
$x=-1$일 때, $h(x)=2\times 1=2$
$-1<x<1$일 때, $h(x)=2(x+2)$
이때, $\lim_{x\to -1-} h(x)=\lim_{x\to -1-} 2x=-2$
$\lim_{x\to -1+} h(x)=\lim_{x\to -1+} 2(x+2)=2$
$h(-1)=2$이므로
$\lim_{x\to -1-} h(x)\neq \lim_{x\to -1+} h(x)$ 이다.
즉, 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)
ㄷ. 〈반례〉
$f(x)=-x-3$이라 하자.
$x<-3$일 때, $h(x)=x(x+2)$
$x=-3$일 때, $h(x)=-3\times(-2)=6$
$-3<x<-1$일 때,
$h(x)=x\times\{-(x+2)-3\}=-x(x+5)$
$x=-1$일 때, $h(-1)=-2\times 1=-2$
$-1<x<1$일 때,
$h(x)=(-x-3)\times(x+2)=-(x+3)(x+2)$
$x=1$일 때, $h(x)=1\times 3=3$
$x>1$일 때, $h(x)=x(x+2)$
이때, $\lim_{x\to 1-} h(x)=-12$, $h(1)=3$이므로 함수 $h(x)$의
최솟값은 없다. (거짓)



2020-10-21 [정답] ⑤

$y=2^{-x}$, $y=|\log_2 x|$, $y=x$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<1$일 때,
두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=-\log_2 x$의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로
$x_1=y_1$이고 $x_1<1$, $y_1<1$
그림에서 $y=2^{-x}$은 감소함수이므로
$2^{-1}<2^{-x_1}=y_1$ 즉, $\frac{1}{2}<y_1=x_1$
한편, $-\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}<y_1=-\log_2 x_1$이고
$y=-\log_2 x$는 감소함수이므로 $x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$
그러므로 $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄴ. $2^{-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}$이고 $\log_2\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}$
그런데 $8<9$이므로 $2^{\frac{3}{2}}<3$ ······ ㉠
$\sqrt[3]{2}$와 $\frac{3}{2}$을 각각 세제곱하면 $(\sqrt[3]{2})^3<\left(\frac{3}{2}\right)^3$이므로
$\sqrt[3]{2}<\frac{3}{2}$ 즉, $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}$······ ㉡
㉠, ㉡에서 $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3$이므로 $\log_2\sqrt[3]{2}<2^{-\sqrt[3]{2}}$
그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2$
또, $\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$, $2^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$
$\frac{1}{2}>\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$이므로 $\log_2\sqrt{2}>2^{-\sqrt{2}}$
그림에서 $x_2<\sqrt{2}$
그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. $y_1=x_1$이므로 ㄱ에서 $\frac{1}{2}<y_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$
$y_2=\log_2 x_2$이고 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$,
$\log_2\sqrt[3]{2}<\log_2 x_2<\log_2\sqrt{2}$ 이므로 $\frac{1}{3}<y_2<\frac{1}{2}$
그러므로 $y_1-y_2<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$ (참)

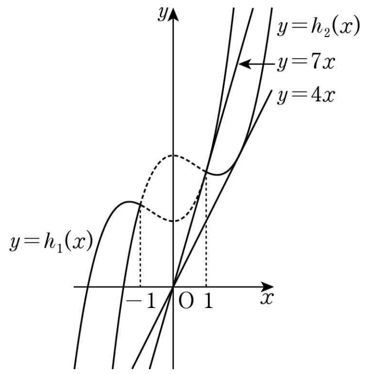
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2022-03-14 [정답] ②

ㄱ. $k=0$일 때, $f(x)+g(x)=x^3+2x^2+4$
$h_1(x)=x^3+2x^2+4$라 하면
$h_1{}'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)=0$
에서 함수 $h_1(x)$는 $x=-\frac{4}{3}$에서 극대, $x=0$에서 극소이다.
$h_1(0)=4>0$이므로 방정식 $h_1(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)-g(x)=0$에서
$x^3-kx+6-(2x^2-2)=0$, $x^3-2x^2+8=kx$
$h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 곡선 $y=h_2(x)$에 직선 $y=kx$가 접할 때만 방정식 $h_2(x)=kx$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다. 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a^2+8)$이라 하면 $h_2{}'(x)=3x^2-4x$에서 접선의 방정식은
$y-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(x-a)$
이 접선이 원점을 지나므로
$0-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(0-a)$,
$(a-2)(a^2+a+2)=0$, $a=2$
따라서 구하는 k의 값은 $h_2{}'(2)=4$뿐이다. (참)

ㄷ. $|x^3-kx+6|=2x^2-2$에서 $2x^2-2\geq 0$이므로 x의 값의 범위는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이고, 주어진 방정식은
$x^3-kx+6=-(2x^2-2)$ 또는 $x^3-kx+6=2x^2-2$,
즉 $x^3+2x^2+4=kx$ 또는 $x^3-2x^2+8=kx$
$h_1(x)=x^3+2x^2+4$, $h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 주어진 방정식의 실근의 개수는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 교점의 개수와 같다.
ㄴ에서 $k=4$일 때 직선 $y=kx$와 곡선 $y=h_2(x)$가 접하므로 $k\leq 4$일 때 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 교점의 개수의 최댓값은 3이다.



$k>4$일 때, $x\leq -1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 원점에서 곡선 $y=h_1(x)$에 그은 접선의 방정식은 $y=7x$이고 접점의 좌표는 $(1,\ 7)$이므로 $k>4$일 때, $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 즉, $k>4$일 때, $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 4이다.
따라서 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

2023-04-13 [정답] ③

$0\leq x\leq 2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=g(x)$에서

$k\sin x=\cos x$

$\frac{\sin}{\cos x}=\tan x=\frac{1}{k}$ $(\cos x\neq 0)$

그러므로 점 A의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

함수 $y=\tan x$의 주기는 π이므로

점 B의 x좌표는 $\alpha+\pi$이고 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(\alpha,\ \cos\alpha)$, $(\alpha+\pi,\ -\cos\alpha)$

선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 C의 좌표는
$\left(\frac{3\times(\alpha+\pi)-1\times\alpha}{3-1},\ \frac{3\times(-\cos\alpha)-1\times\cos\alpha}{3-1}\right)$
이므로 $\mathrm{C}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi,\ -2\cos\alpha\right)$

점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-2\cos\alpha=k\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$

$-2\cos\alpha=k\times(-\cos\alpha)$에서 $k=2$이므로

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$이고, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\ddot{y}((\alpha+\frac{3}{2}\pi\Big)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

에서 점 D의 좌표는 $\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$이고

$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\sqrt{5}$

점 B와 직선 CD 사이의 거리는

$\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-(\alpha+\pi)=\frac{\pi}{2}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

2023-06-22 [정답] 19

함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.
따라서

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이 성립한다.
이때

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}(x+3)f(x)=3f(0),$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}(x+a)f(x-b)=af(-b),$$

$g(0)=af(-b)$
이므로 ㉠에서

$$3f(0)=af(-b)\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

한편,

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}\ \cdots\cdots\ ㉢$$

이때 $t\neq -3$이고 $t\neq 6$인 모든 실수 t에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로
$f(x)=(x+3)(x+k)$ (k는 상수)
의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)(x+k)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|}\qquad\cdots\cdots\ ㉣$$

이때 $t=3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$의 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$ 뿐이다.
주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로
$g(6)=0$, 즉 $(6+a)f(6-b)=0$
이어야 한다.
이때 $a>0$이므로
$f(6-b)=0$에서
$6-b=-3$ 또는 $6-b=-k$
따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$
(i) $b=9$인 경우
$x<0$에서
$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$
이때
$x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로
$-k\geq 0$ 또는 $k=3$ $\cdots\cdots$ ㉤
$x\geq 0$에서
$g(x)=(x+a)f(x-9)$
$=(x+a)(x-6)(x-9+k)$
이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이므로
$9-k<0$ 또는 $9-k=6$ $\cdots\cdots$ ㉥
㉤, ㉥에서
$k=3$
따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 ㉡에서
$3\times 3^2=af(-9)$, $27=36a$

$$a=\frac{3}{4}$$

따라서

$$g(4)=(4+a)f(4-b)=\left(4+\frac{3}{4}\right)f(-5)=\frac{19}{4}\times(-2)^2$$

$=19$
(ii) $k-b=-6$인 경우
$x<0$에서
$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$
이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로
$-k\geq 0$ 또는 $k=3$
$x\geq 0$에서

$$\begin{aligned}g(x)&=(x+a)f(x-b)\\&=(x+a)(x-b+3)(x-b+k)\\&=(x+a)(x-b+3)(x-6)\end{aligned}$$

이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이고, $b>3$이므로
$b-3=6$에서 $b=9$
$k-b=-6$에서 $k=3$
따라서 (i)과 같은 결과이므로
$g(4)=19$이다.