제 2 교시

수학 영역

다음은 각 문항의 권리보유자 및 배점, 단원을 나타낸 것입니다.

[장시인 출제 문항]

1번 [2점] 수학I 지수법칙

2번 [2점] 수학II 극한

3번 [3점] 수학I 등비수열

4번 [3점] 수학II 미분계수

5번 [3점] 수학I 삼각함수

6번 [3점] 수학II 극대극소

7번 [3점] 수학I 등차수열

9번 [4점] 수학II 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

10번 원본 ver [4점] 수학I 삼각함수의 도형 활용

14번 원본 ver [4점] 수학II 극한 & 미분과 방정식

15번 원본 ver [4점] 수학I 낯선 수열

16번 [3점] 수학I 로그

17번 [3점] 수학II 미분가능성

18번 [3점] 수학I 수열의 합과 일반항의 관계

19번 [3점] 수학II 위치와 속도

[소우주수학 (박재윤) 출제 문항]

세상에서 글씨를 제일 이쁘게 쓰는 남자로서 편집 및 손해설 일체를 맡았습니다.

8번 [3점] 수학II 미분과 부등식

10번 이차적저작물 ver [4점] 수학I 삼각함수의 도형 활용

11번 [4점] 수학I 거듭제곱근

12번 [4점] 수학II 접선의 방정식

13번 [4점] 수학I 삼각함수의 그래프

14번 이차적저작물 ver [4점] 수학II 극한 & 미분과 방정식

15번 이차적저작물 ver [4점] 수학I 낯선 수열

20번 [4점] 수학II 연속

21번 [4점] 수학I 지수함수의 그래프

22번 [4점] 수학II 정적분으로 정의된 함수

출제자의 편지

일단 저희가 만든 시험지를 풀어주셔서 감사드립니다.

수능 당일의 10시 30분을 미리 경험하실 수 있는, 실전보다 더 실전스러운 연습의 경험을 여러분께 선사해 드리기 위해, 본 시험지를 제작하게 되었습니다.

먼저 공통 시험지 전반의 구성에 대하여 말씀드리자면, 2024학년도 6월 평가원 모의고사의 경향을 반영하여 10번, 11번, 12번부터 잔잔하게 난도를 높여가면서, 13번, 15번, 20번의 준킬러 문항들은 아주 어렵지는 않지만, 분명 당황하실 수 있는 소재를 선보이고자 했습니다. 14번, 21번, 22번이 아무래도 이 시험지에서 주요하게 변별력을 확보한 문항이라고 생각하며, 이 문항들은 6평보다 확실히 어렵게 구성하려 했습니다. 출제자가 난이도에 대하여 객관적으로 판단하기는 쉽지 않지만, 2023학년도 대학수학능력시험과 2024학년도 6월 평가원 모의고사보다 살짝 어려운 난이도로 수능 기준 1등급컷 80점 정도가 나오기를 기대하며 공통 시험지를 구성했습니다.

다음으로 미적분 시험지의 구성은 3점 대역은 심히 무난히 가져가면서, 28번과 30번에 아주 독특한 소재를 차용하면서 6평처럼 난이도를 역으로 배치하여 보았습니다. 미적분 시험지의 4점 문항은 아마도 28, 29, 30 순으로 어렵지 않았나 싶습니다.

공통과 미적분 모두 난도가 꽤나 있었던 시험지라고 생각하지만, 각 문제마다 교과 내용 부합성과 합리적인 상황 구성, 배워갈 포인트의 삽입에 다분히 신경을 썼기 때문에, 충분히 시간을 두고 4점 전 문항을 자세한 해설과 함께 살펴보시기를 권해드립니다.

이 시험지에서 만족스럽지 못한 점수를 받으셨다면,
스스로의 약점을 찾을 수 있는 기회로 생각해 주시고,
낙담하지 않으셨으면 좋겠습니다.

이 시험지에서 좋은 점수를 받으셨다면,
꾸꾸이 노력하며 걸어온 스스로를 칭찬해 주시고,
그렇다고 자만하시지는 마시고 하시던대로 계속 열중하시는 멋있는 학생이 되시면 좋겠습니다.

여러분의 수험생활을 진심으로 응원하며, 그 길에 저희가 만든 이 시험지가 작은 도움이나마 되었기를 바랍니다. 감사합니다.

소우주수학, 장시인 올림

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{2+\sqrt{3}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2+\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$= 2^4 = \boxed{16}$

2. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 2x}}{x - 4}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\fallingdotseq \frac{x - |2x|}{x}$

$\frac{3x}{x}$

$\boxed{3}$

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 3a_1, \quad a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 80$$

일 때, a_4의 값은? [3점]

① 2 ② 6 ③ 12 ④ 18 ⑤ 54

$r^2 = 3$

$a_2 \underbrace{\boxed{(1+3+9+27)}}_{=40} = 80, \quad a_2 = 2, \quad a_4 = \boxed{6}$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+3h) - f(1-h)}{h} = 4$$

일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

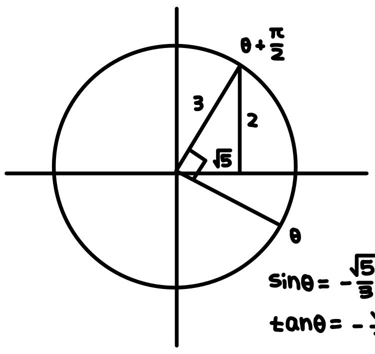
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$4f'(1) = 4$

$\boxed{1}$

5. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{2}{3}$ 이고 $\tan\theta<0$ 일 때, $\sin\theta-\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{5}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$



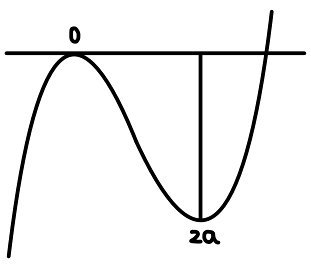
$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{\frac{\sqrt{5}}{6}}$

6. 상수 a 에 대하여 함수 $f(x)=x^3-6ax^2+9a$ 의 극댓값과 극솟값의 차가 32일 때, $f(a)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$4\cdot a^3=32$

$a=2,\ f(2)=\boxed{4}$

7. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여

$$S_{n+5}-S_n=10n$$

일 때, a_5 의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$S_{n+5}-S_n=5a_{n+3}$

$\therefore 5a_5=20$

$\therefore a_5=4$

8. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\{x \mid f(x) > x^2 - 2x + f(0)\} = \{x \mid x > 3\}$$

일 때, $f'(4)$의 값은? [3점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

$f(x) = x^2(x-3) + x^2 - 2x + C$

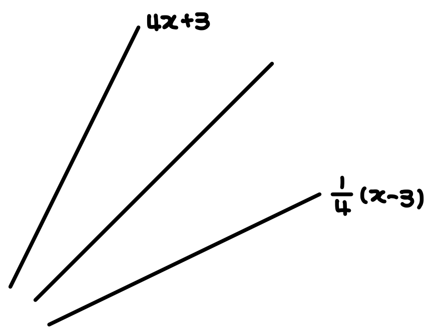
$f'(4) = \boxed{30}$

9. 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = \frac{1}{4}(x-3)$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ 9 ⑤ $\frac{27}{2}$

1st

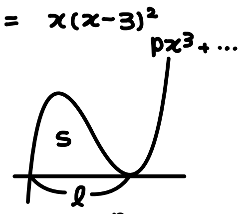
국민 정서상 곡선 y = f(x)를 직선 y=x에 대칭시켜주기보다는 직선을 대칭시켜 원함수와의 관계를 살펴보는 게 더 편할 것 같아요!



2nd

차의 함수와 삼차함수의 넓이 공식을 적용하여 마무리 해 주세요.

$f(x) - (4x+3) = x(x-3)^2$



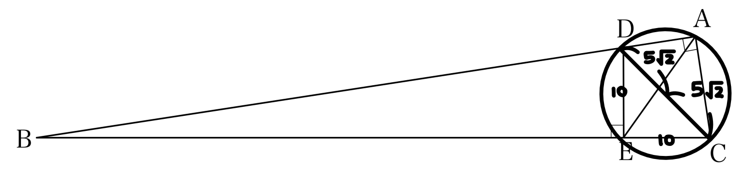
$s = \frac{p}{12}\ell^4$

$= \boxed{\frac{27}{4}}$

10. 그림과 같이 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC와 선분 AB 위의 점 D, 선분 BC 위의 점 E가 있다. 삼각형 ACE의 외접원의 넓이가 50π이고

$$\overline{CE} = \overline{DE},\ \angle DEC = \frac{\pi}{2},\ \overline{AE} = 14$$

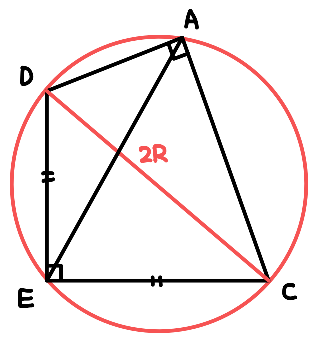
일 때, 삼각형 BCD의 넓이는? [4점]



① 360 ② 370 ③ 380 ④ 390 ⑤ 400

1st.

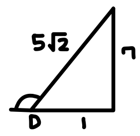
직각 두 개가 마주보고 있는 사각형 ACED에서 삼각형 ACE와 삼각형 ADE는 같은 원에 외접함을 발견해 주세요.

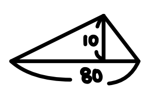


2nd.

45도의 특수각과 사인법칙으로 각 D를 알아내어 마무리해주시면 아주 훌륭하십니다.

$\sin(\angle ADE) = \frac{14}{10\sqrt{2}}$





$\frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 10 = \boxed{400}$

11. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $\{f(x)\}^{n+1}=n^6$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때,

$$\sum_{n=1}^{6} a_n = 17$$

이다. 방정식 $f(x)=4$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? [4점]

① $2\sqrt{3}$　② 6　③ $2\sqrt{5}$　④ $5\sqrt{2}$　⑤ 8

1st

거듭제곱근의 개수 문항입니다. 홀수와 짝수일 때부터 구분해 주시는 것이 신상에 이롭다고 생각합니다.　$a_{2m}=2$

$$f(x)=\begin{cases} +n^{\frac{6}{n+1}},\ -n^{\frac{6}{n+1}} & (n이\ ㅎ) \\ n^{\frac{6}{n+1}} & (n이\ ㅉ) \end{cases}$$

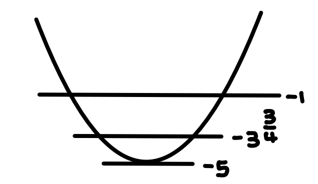
$b_n = n^{\frac{6}{n+1}}$

$b_1 = 1$, $b_2 = 2^2$, $b_3 = 3^{\frac{3}{4}}$

$b_4 = 4^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{12}{5}}$　$b_5 = 5$　$b_6 = 6^{\frac{6}{7}}$

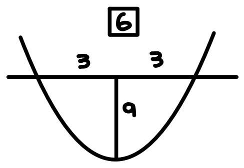
2nd

주어진 시그마값이 홀수가 되기 위해서는 가장 작은 $-b^n$의 값이 이차함수 f(x)의 최솟값이 되어야 한다고 생각할 수 있고, 그 값이 -5임을 알 수 있네요.



6 + 6 + 5
17

$\boxed{6}$

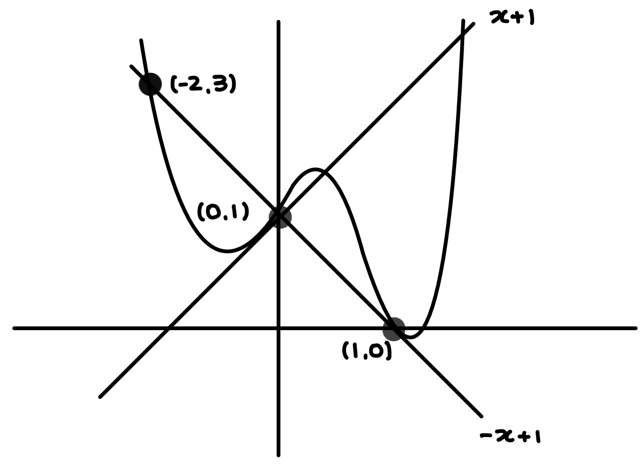


12. $f(-2)=3$인 사차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선이 y축에 대하여 대칭일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 58　② 60　③ 62　④ 64　⑤ 66

1st

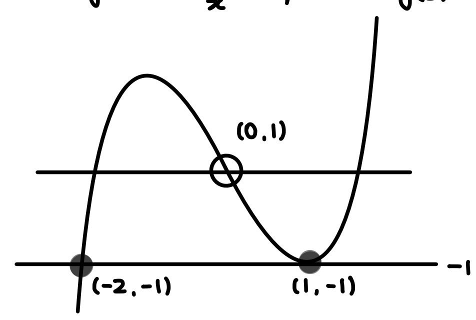
두 직선이 y축에 대하여 대칭이므로, 두 직선은 y축 위에서 만납니다. 그런데, 한 직선의 y절편이 1임이 드러나 있으므로 주어진 정보만으로 두 직선을 모두 결정할 수 있어요.



2nd

사차함수와 두 직선이 y축 위의 한 점에서 만납니다. 두 점 (0,1), (x,f(x))를 지나는 직선의 기울기를 함수 g(x)로 생각해보면, g는 삼차함수이고, 두 직선의 기울기는 각각 1, -1이므로, 삼차함수의 그래프와 두 직선 사이의 관계로 해석할 수 있고, 비율관계까지 활용할 수 있습니다. 그냥 사차함수를 미분하여 답을 내셔도 좋지만, 이러한 방법으로 계산을 줄이면 인생이 더 행복해 질 수도 있어요.

$g(x) = \frac{f(x)-1}{x}$　, $f(3) = 3g(3)+1$



$g(x) = (x-1)^2(x+2)-1$

$g(3) = 2^2 \cdot 5 - 1$

$= 19$

$19 \cdot 3 + 1$

$= \boxed{58}$

221110

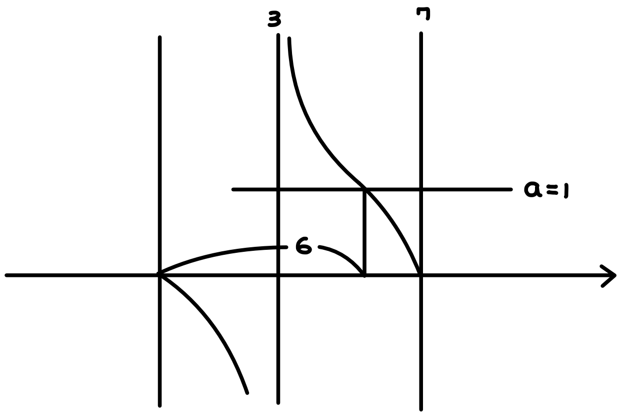
13. 두 실수 a, $b\,(b \neq 0)$에 대하여 구간 $(3,7]$에서 정의된 함수

$$f(x) = a + \sqrt{3}\tan\frac{\pi x}{b}$$

의 치역이 $\{y \mid y \geq 0\}$일 때, $a-b$의 값은? [4점]

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

1st.
정의역이 제한되어 있지만 치역이 음이 아닌 실수 전체의 집합이라는 점에서 탄젠트함수의 점근선을 생각할 수 있습니다.
또한 구간 오른쪽 끝에 등호가 들어가 있으니, 주어진 함수는 7에서 최솟값 0을 갖고 점근선 x=3을 가지며, 주기가 4보다 큼을 알 수 있습니다. 따라서 b는 음수임을 알 수 있습니다.



2nd.
주기를 6 구간으로 쪼갠 것 중 4개가 구간에 딱 포함되니 특수각을 고려하여 계산을 마무리해주세요.

b=-6, a=1 $\boxed{7}$

14. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=0$인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{|f(x-t)| - f(x+t)}{t + f(x)}$$

라 하자. 부등식 $f(x) < g(x)$를 만족시키는 실수 x의 값이 2뿐일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 실수 a에 대하여 $g(a) > 0$이면 $f'(a) < 0$이다.

ㄴ. 방정식 $f(x) = g(x)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(5) = 0$이면 $g(2) \leq 1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st
g(x)를 해석해봅시다.

g는

f의 부호가 +일 때,
f의 부호가 -일 때,
f(x)의 왼쪽 근처의 부호가 +이고 f가 0일 때,
f의 왼쪽 근처의 부호가 -이고 f가 0일 때

각각 다르게 정의됩니다.

$g(x)$:
- $f(x) > 0 \to 0$
- $f(x) = 0$:
  - $f(x-) > 0 \to \lim_{t \to 0+} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} - \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = -2f'(x)$
  - $f(x-) < 0 \to \lim_{t \to 0+} \frac{f(x) - f(x-t)}{t} - \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = 0$
- $f(x) < 0 \to -2$

이때 g가 0보다 클 필요충분조건은

$f(x)=0$, $f(x-)>0$, $f'(x)<0$

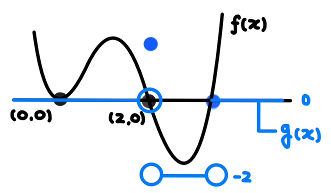
이므로 ㄱ.은 옳아요!

2nd
부등식 f(x)<g(x)의 해가 x=2 뿐이도록 하는 필요충분조건은

"모든 실수 x에 대하여 $f(x) > -2$" AND $\{x \mid f'(x) < 0,\ f(x)=0\} = \{2\}$

입니다.

f(0)=0이므로 그래프가 이렇게 그려지네요.



f(x)=g(x)는 적어도 서로 다른 두 실근을 가지므로
ㄴ.은 옳지 않아요!

3rd
ㄷ.

$f(x) = px^2(x-2)(x-5)$

$f'(4) = 0$

$f(4) = p \cdot -32 \geq -2$

$\therefore p \leq \frac{1}{16}$

$g(2) = -2f'(2) = 24p \leq \boxed{\frac{3}{2}}$

OUT!

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{7} na_n$의 값은? [4점]

(가) $\{a_n | n은 자연수\} = \{0, 1, 2\}$

(나) $\sum_{n=1}^{7} (a_n \times 3^{n-1}) = 777$

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

1st.

22학년도 대학수학능력시험에는 등비수열의 합과 엮인 이진법이 소개되었습니다. 숫자에 대한 감각을 적절히 활용하여 최적화하여 올바른 경우를 찾아주세요.

$777 = a_7 \cdot 729 + a_6 \cdot 243 + a_5 \cdot 81 + a_4 \cdot 27 + a_3 \cdot 9 + a_2 \cdot 3 + a_1 \cdot 1$

$3^{n-1} = f(n)$

$\sum_{n=1}^{m} 2f(n) = \frac{2(3^m - 1)}{3-1} < f(m+1)$

$= 729 + 0 + 0 + 27 + 18 + 3 + 0$

$\therefore a_7 = 1,\ a_6 = 0,\ a_5 = 0,\ a_4 = 1,\ a_3 = 2,\ a_2 = 1,\ a_1 = 0$

단답형

16. $(\log_2 9 + \boxed{4\log_9 3}) \times \log_6 64$의 값을 구하시오. [3점]

$4\log_9 3 = 2$

$\log_2 9 + 4\log_9 3 = 2\log_2 6$

$\log_6 64 = 6\log_6 2$

$2\log_2 6 \times 6\log_6 2 = \boxed{12}$

17. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & (x \le a) \\ 2x + a & (x > a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a \times b$의 값을 구하시오. [3점]

$2a^2 = 2$

$a^3 + b = 3a$

$b = -a^3 + 3a$

$a = 1$ or -1, $b = 2$ or -2

$a \times b = \boxed{2}$

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 2^n + 6$$

을 만족시킬 때, $\frac{a_1}{a_7}$의 값을 구하시오. [3점]

$\frac{1}{a_1} = 8$, $\frac{1}{a_7} = 128 - 64$
$= 64$

$\frac{a_1}{a_7} = \boxed{8}$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + kt$$

이다. 점 P가 시각 $t = 0$일 때 원점을 출발한 후 처음으로 다시 원점을 지나는 순간 점 P가 정지하도록 하는 실수 k의 값을 구하시오. [3점]

$t\,(t^2 - 6t + k)$

$k = \boxed{9}$

20. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{f(1)x}{\sqrt{f(x)}} & (x < 0) \\ \sqrt{f(1)x - f(x)} + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

1st
주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 잘 정의되고 연속이 될 조건을 다음과 같이 해석해 주세요.

$x < 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$

$x \geq 0$ 일 때, $f(1)x - f(x) \geq 0$

$\lim_{x \to 0-} \frac{-f(1)x}{\sqrt{f(x)}} = \lim_{x \to 0+} \left\{ \sqrt{f(1)x - f(x)} + 1 \right\}$

→ 필요충분합니다.

2nd
f(0)은 0 이상이어야 합니다. 근데 0보다 크면! g(x)가 0의 오른쪽 근처에서 정의가 안되고! x 인수가 한 개이면, g(x)의 0에서의 좌극한이 0, 우극한이 1이라서 안되네요..

$f(0) \geq 0$

$f(0) > 0$ 이면 $\lim_{x \to 0+} \{f(1)x - f(x)\} < 0$

$f(0) = 0$ 이면 $\lim_{x \to 0+} \left\{ \sqrt{f(1)x - f(x)} + 1 \right\} = 1$

$= \lim_{x \to 0-} \frac{-f(1)x}{\sqrt{f(x)}}$

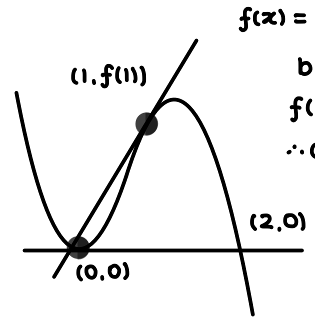
$\therefore f(x) = x^2(ax+b)$

$= \lim_{x \to 0-} \frac{-f(1)x}{|x|\sqrt{ax+b}}$

$= \frac{f(1)}{\sqrt{b}} = 1$

3rd
1에서 접한다는 사실이 너무 즐거워요!

$f(x) = -ax^2(x-2)$



$b = 2a$
$f(1) = a$
$\therefore a = 2$

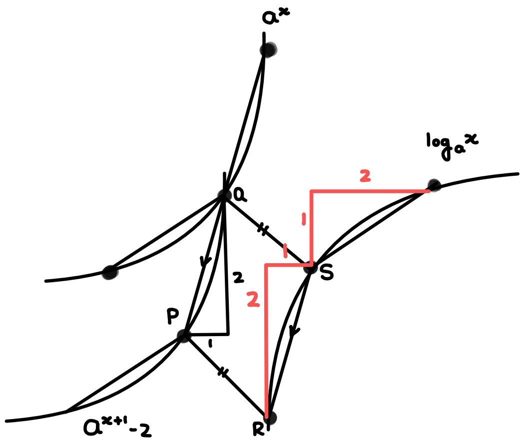
$f(-1) = \boxed{6}$

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}-2$ 위의 두 점 P, Q와 곡선 $y=\log_a x$ 위의 두 점 R, S가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QS}}$
>
> (나) 점 Q와 점 S은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
>
> (다) 두 직선 PR, RS의 기울기는 각각 -1, 2이다.

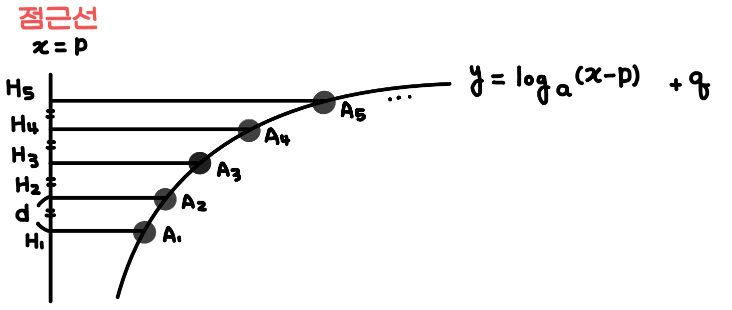
점 R의 x좌표를 r이라 할 때, $30\times(a+r)^2$의 값을 구하시오. (단, 점 R의 x좌표는 점 S의 x좌표보다 작다.) [4점]

1st
그림을 열심히 그려봅시다!



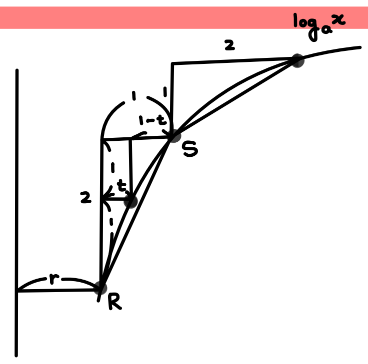
2nd

점근선
$x=p$



$\{\overline{A_nH_n}\}$ 은 공비가 a^d 인 등비수열을 이룹니다.

$\rightarrow \{\overline{A_{n+1}H_{n+1}}-\overline{A_nH_n}\}$ 도 공비가 a^d 인 등비수열을 이룹니다.



$t,\ 1-t,\ 2$ 등비수열 $\quad a=\frac{2}{1-t},\quad ar=t+r$

$(1-t)^2=2t$

$t^2-4t+1=0$

$t=2-\boxed{\sqrt{2^2-1}}$ ($=\sqrt{3}$) $\quad \therefore a=\sqrt{3}+1$

$(0<t<1)$

$r=\frac{t}{a-1}$

$=\frac{t}{\sqrt{3}}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$

$a+r=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{250}$

22. 양수 a에 대하여 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_3^x g(t)\,dt=\begin{cases} ax & (f(x)>ax) \\ |f(x)| & (f(x)\le ax)\end{cases}$$

를 만족시킨다. 방정식 $g(x)=-x+3$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, $f(-a)$의 값을 구하시오. [4점]

1st
우선, 함수 g(x)가 실수 전체의 집합에서 연속이므로, 주어진 함수

$G(x)=\int_3^x g(t)dt$

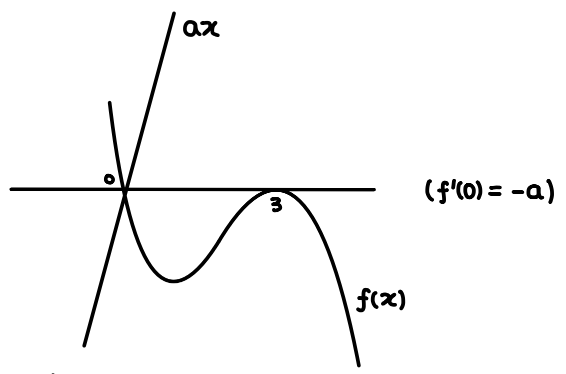
는 실수 전체의 집합에서 미분가능해요. 또한

$G(3)=0$, $3a>0$

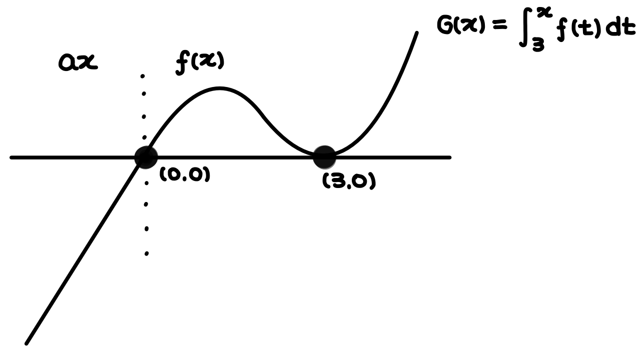
이므로, $|f(3)|=0$, $f'(3)=0$ 이에요.

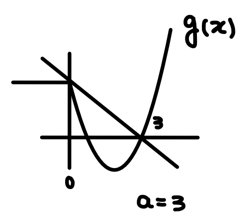
2nd
구간 $(0,\infty)$ 에서 ax와 $f(x)$의 대소가 바뀌면,
$G(x)$ 가 미분가능하지 않은 점이 생기게 되어 모순입니다.

3rd
또한 구간 $(-\infty,0)$ 에서 두 함수의 대소가 바뀐다면, $f(t)=at<0$, $|f(t)|>0$ 으로 함수 $G(x)$ 가 $x=t$ 에서 불연속인 실수 t가 생기므로 모순입니다.
따라서 두 함수의 그래프의 위치 관계는 다음과 같습니다.



상황을 훌륭하게 결정하셨다면, 간단한 계산으로 마무리해 주세요!





$f(x)=-\frac{1}{3}x(x-3)^2$

$f(-3)=\boxed{36}$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{2}n^2+8n+6}{n^2-4n+7}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

24. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{2-n}$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

$3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\boxed{\frac{9}{2}}$

25. 곡선 $2x^2+3xy-4=y^2$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 y절편은? [3점]

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

$4x+3y+3x\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$

$10\cdot(-1)+2$

$=\boxed{-8}$

26. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=t^3-9t,\ y=t^2-8$$

일 때, 시각 $t=2$에서의 점 P의 속력은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$3t^2-9$ $2t$

3 4

$\boxed{5}$

27. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 두 곡선

$$y=a^{x},\ \ y=\log_{a}x$$

이 만나는 점의 개수가 1일 때, 이 두 곡선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① e^2-e ② e^4-e ③ e^2-2e
④ e^4-2e ⑤ e^4-4e

28. 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=\sin x\,(0\le x\le\pi)$와 직선 $y=t$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(t)$라 할 때, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

매개변수 $t\,(0<t<1)$로 나타내어진 곡선 $x=f'(t),\ y=f(t)$ 는 함수 $g(x)$의 그래프의 일부이다.

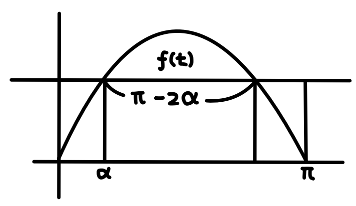
곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=-\dfrac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

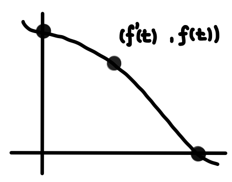
① $8-\dfrac{\sqrt{2}(\pi+8)}{2}$ ② $8-\dfrac{\sqrt{2}(\pi+4)}{2}$ ③ $8-\dfrac{\pi+8}{2}$
④ $8-\dfrac{\pi+4}{2}$ ⑤ $8-\dfrac{\pi+2}{2}$

$x=2\alpha-\pi$, $g(x)=2\cos\alpha-(\pi-2\alpha)\sin\alpha$

$\boxed{\int_0^{-\frac{\pi}{2}}} g(x)\boxed{dx} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos\alpha-(\pi-2\alpha)\sin\alpha)\times 2\,d\alpha$

$\int_{\alpha=\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\dfrac{dx}{d\alpha}}\times d\alpha$, $\dfrac{dx}{d\alpha}=2$





$f(t)=2\cos\alpha-(\pi-2\alpha)t$

$\sin\alpha=t$

$f'(t)=-2\sin\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}+2\dfrac{d\alpha}{dt}t+2\alpha-\pi$

$=2\alpha-\pi$

$=x$

$\alpha=\dfrac{x+\pi}{2}$ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore -\pi<x<0$

$g(x)=2\cos\dfrac{x+\pi}{2}+x\sin\dfrac{x+\pi}{2}$

$=4\cos\dfrac{x+\pi}{2}+\boxed{\left(-2\cos\dfrac{x+\pi}{2}+x\sin\dfrac{x+\pi}{2}\right)}=\left\{-2x\cos\dfrac{x+\pi}{2}\right\}'$

$\int g(x)=8\sin\dfrac{x+\pi}{2}-2x\cos\dfrac{x+\pi}{2}+C$

$x=0$: $8+C$

$x=-\dfrac{\pi}{2}$: $8\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\pi\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=4\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi-4\sqrt{2}+8$

$\boxed{8-\dfrac{\pi+8}{2}\sqrt{2}}$

단답형

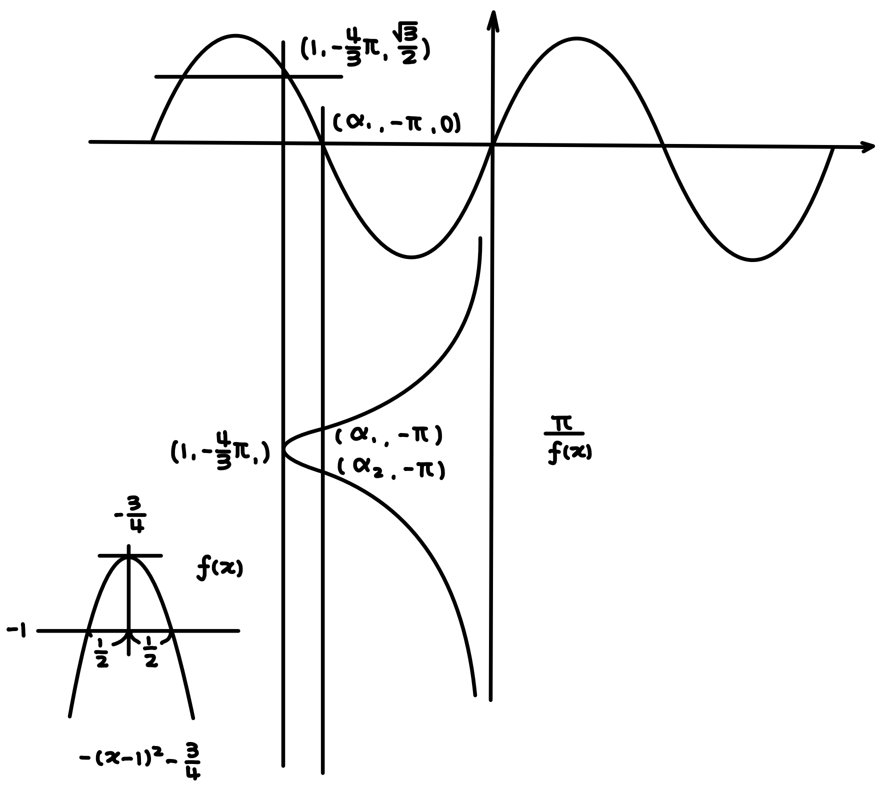
29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = 2\sin\frac{\pi}{f(x)}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $\sqrt{3}$을 갖는다.
>
> (나) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근은 α_1, α_2이고 $|\alpha_1 - \alpha_2| = 1$이다.

$f(2)\times f(3) = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$-(x-1)^2 - \frac{3}{4}$

$f(2) = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$

$f(3) = -4 - \frac{3}{4} = -\frac{19}{4}$

$\frac{133}{16}$

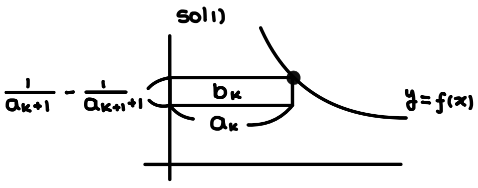
$\boxed{149}$

30. 자연수 n에 대하여 1과 2 사이에 n개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$1 = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1} = 2$$

이 있다. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(a_k - a_{k-1})}{(a_k+1)(a_{k-1}+1)} = p + \ln q$일 때, $30\times(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

sol1)



$b_k = a_k \times \left(\frac{1}{a_k+1} - \frac{1}{a_{k+1}+1}\right)$

$A_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_{a_{n+1}}^{a_1} f^{-1}(x)dx$

sol2)

$\sum_{k=1}^{n} a_k \times \left(\frac{1}{a_k+1} - \frac{1}{a_{k+1}+1}\right)$

$f(x) = \frac{1}{x+1}$

$A_n = \sum_{k=1}^{n}\{a_k f(a_k) \boxed{- a_k f(a_{k+1})}\}$

$= -a_{k+1} f(a_{k+1}) + \frac{1}{n} f(a_{k+1})$

$= \sum_{k=1}^{n}\{a_k f(a_k) - a_{k+1} f(a_{k+1})\} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} f(a_{k+1})$

$= a_1 f(a_1) - a_{n+1} f(a_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} f(a_{k+1})$

$= 1\times\frac{1}{2} - 2\times\frac{1}{3}$

$= -\frac{1}{6}$

$\lim_{n\to\infty} A_n = -\frac{1}{6} + \boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} f(a_{k+1})}$

$= \int_1^2 f(x)dx$

$= \ln(x+1)\Big|_1^2$

$= \ln\frac{3}{2}$

$p = -\frac{1}{6}$, $q = \frac{9}{6}$

$30(p+q) = 30\times\frac{8}{6} = \boxed{40}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.