글의 목차를 먼저 알려드리겠습니다.

제가 생각하는 해석력을 통해 기출문제를 예시로 풀어보며 문제 푸는 태도를 알려드리고자 합니다. 필요하다 느끼는 문제들만 많은 고민을 하여 선별했습니다. 쉽다고 넘기시지 말고 다 읽어보시면 좋겠습니다. (형식상 넣은 페이지도 존재하기 때문에 쭉 읽으시면 생각보다 얼마 안됩니다.)

이 글에선 실전개념을 중요하게 다루는 것은 아니기 때문에 해설에 필요한 최소한의 실전개념만 작성하였습니다. (실전개념 파트는 알고 계신다면 넘기셔도 무관합니다.)

글 본문에는 형식상 평어체를 쓴 점 이해 부탁드립니다.

0) 고득점을 위한 조건

글쓴이가 생각하기에 수능 수학에서 상위권의 성적을 받으려면 필요한 몇 가지 조건이 있다. 그 중 대표적인 세 가지를 뽑아 이유와 같이 설명하겠다.

1. 문제 해석력
2. 문제풀이량
3. 교과서개념과 실전개념(스킬)

문제 해석력
여기선 문제 해석력이 뭔지 간단하게 정의하겠다. 글쓴이가 생각하는 문제 해석력이란 '어떤 개체(대상)를 보고 뭐라고 생각하는지 해석하는 능력'이다. 예시를 들어보겠다.
$f(x)=x^2-2x+1$ 을 보면 어떤 생각이 드는가? 여기서 문제 해석력이란 $f(x)$를 보고 1. 0보다 작지 않은 함수 2. 아래로볼록한 함수 3. 다항함수 4. 미분 가능한 함수 등등 $f(x)$라는 개체를 보고 의도적으로 해석하는 능력을 말한다. 보통 대부분 애매한 점수를 받는 학생들은 이런 생각을 하지 않고 이때까지 아무 의심 없이 풀었던 대로, 해왔던 대로 행동할 것이다. 물론 기출은 반복되기 때문에 나쁜 방법은 아니다. 하지만 새로운 발상을 필요로 하는 문제가 나올 때 아무 생각 없이 풀면 좋은 결과를 얻지 못할 것이다. 자세한 설명은 문제 해석력이란? 파트에서 서술하겠다.

문제풀이량
아무리 개념을 통달했다 해도 문제풀이량이 적다면 아무 소용이 없다. 개념이 어떻게 쓰이는지 문제를 일정량 풀어보아야 깨달을 수 있다. (하지만 문제 해석력을 키우지 않고 양으로만 공부하는 법은 한계가 있다. 풀어본 문제의 유형이 아니라면 뭘 해야 할지 모르는 학생들이 이에 속한다.)

교과서개념과 실전개념(스킬)
교과서개념이 중요한 이유는 누구든지 알 것이다. 예를 들어 영어를 해야 하는데 알파벳도 모르고 영어공부를 할 수 있겠는가? 교과서개념을 모르면 의사소통 자체가 안된다.
실전개념이 중요한 이유는 크게 두 가지라고 생각한다. 첫째 시간 단축이다. 어떤 상황이든 고정된 시험시간에서 시간을 단축하는 건 좋을 수밖에 없다. 둘째 사고과정의 단축이다. 예를 들어 문제를 풀 때 a-b-c-d 단계를 거쳐야 한다고 하자. 이때 실전개념을 알고 있다면 a-d 단계로 줄어들 것이다. 이는 시간을 단축해줄 뿐만 아니라 머리의 피로도 또한 줄어들고, 사고의 과정 또한 줄어들 것이다.

(사실 실전개념(스킬)은 우리가 자주 사용하는 해석법을 일반화하여 정리한 것일 뿐이다. 결국 근본적인 해석력이 중요하단 증거이다.)

1) 문제 해석력이란?

이 글의 핵심인 문제 해석력에 대해 자세히 설명하겠다.
글쓴이가 생각하는 문제 해석력은 어떤 개체(대상)를 어떤 의미로 생각하는 능력이다
예를 들어 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 일 때 $g(x)$를 해석해보자. 즉 '$g(x)$의 의미가 뭘까?'라고 생각해보자.
$g(x)$를 해석해보면 1. 원점을 지나는 사차함수 2. 도함수가 $f(x)$인 함수 3. $f(x)$의 넓이함수 등 다양하게 해석이 가능하다. 이 모든 해석이 논리상 오류만 없다면 맞는 해석이다. 하지만 우리는 시험을 보는 입장이기 때문에 효율적인 풀이가 필요하다. 효율적인 풀이가 도출되기 위해 그에 맞는 좋은 성질이 필요하고, 좋은 성질을 위해 좋은 해석이 필요하다.

좋은 해석 → 좋은 성질 → 효율적인 풀이

나쁜 해석 → 나쁜 성질 → 비효율적인 풀이

독자들은 답은 맞았지만 해설보다 풀이가 훨씬 길었던 경험이 있을 것이다. 이것은 틀린 것은 아니지만 나쁜 해석을 하여 비효율적으로 풀이를 했기 때문이다. 아래 예시 문제를 보며 나쁜 해석 좋은 해석을 더 명시적이게 이해해보자.

comment
해석이란 말이 잘 와닿지 않는다면 이름짓기라고 생각해도 된다. 위 문제를 생각하면 $g(x)$ 는 1. 원점을 지나는 사차함수 2. 도함수가 $f(x)$인 함수 3. $f(x)$의 넓이함수 로 이름을 붙일 수 있다. 또한 굳이 수학적인 용어를 안 써도 된다. 넓이함수처럼 의미만 전달되면 그것으로 충분하다.

방정식 $(x+1)^4-2(x+1)^2+1=0$ 의 근을 구하시오.

좋은 해석) 1. 좌변을 이차함수로 해석하기 위해 $(x+1)^2=t$ 라고 치환하자.
준 식은 $t^2-2t+1=0$ 이 되고 $(t-1)^2=0$ 이 된다.
따라서 $t=1$이므로 $x=0, x=-2$ 이다.

2. 좌변을 다항식의 곱으로 해석하자.
$((x+1)^2-1)^2=((x+1)^2+1)((x+1)^2-1)=0$ 이고
$(x+1)^2+1>0$ 이므로 $(x+1)^2-1=0$ 과 동치이다.
따라서 $x=0, x=-2$ 이다.

나쁜 해석) 3. 좌변을 사차함수라 해석하자.
좌변$=(x^2+2x+1)^2-2(x^2+2x+1)+1=x^4+4x^3+4x^2$
(전개하는 과정만 생각해봐도 비효율적이다)
따라서 $x^4+4x^3+4x^2=x^2(x+2)^2=0$ 이고
$x=0, x=-2$ 이다.

나쁜 해석을 한 3 과정을 생각해 보면 1,2 와 상대적으로 풀이가 길어지고 쓸데없는 계산이 많은 걸 느낄 수 있다. (전개하고 다시 식정리를 하고 있다.) 이제 좋은 해석, 나쁜 해석이 뭔지 감이 올 것이다.
그럼 한 가지 궁금하게 생길 것이다. “해석이 좋고 나쁜 건 결국 다 해봐야 아는 거 아닌가?” 결론부터 말하면 대부분 암산 수준으로 약간만 해보면 된다. 위에서 말했듯이 좋은 해석 -> 좋은 성질 -> 효율적인 풀이이므로 우리의 목표는 문제를 효율적으로 푸는 것이다. 따라서 풀이의 효율을 보고 해석, 성질의 좋고 나쁨을 판단할 수 있다. 효율적인 풀이인지 아닌지를 판단하는 가장 근본적인 기준은 다음의 간단한 두 가지이다.
1) 풀이의 계산량 2) 평범한 고등학생의 지능으로 판단할 수 있는 상태 (너무 당연해 보인다.) 이 두 가지 조건 중 하나라도 만족하지 못한다면 비효율적인 풀이이고, 따라서 나쁜 해석이므로 해석을 바꿔야 한다.
위의 풀이에서 3번이 나쁜 해석인 이유는 1) 계산량 때문이다. 전개하는 순간 계산량이 많다고 느끼고, 다른 해석을 찾아야 한다. 1번 풀이에서 $t^2-2t+1=0$에서 $(t-1)^2=0$으로 식을 변형(해석)한 이유는 뭘까? $t^2-2t+1=0$의 상황은 2) 판단할 수 없는 상태이기 때문이다. t^2와 t는 서로 다르게 변화하기 때문에 저 상태로는 방정식의 해를 판단할 수 없다. 그에 반해 $(t-1)^2$는 t만 변화하는 성질을 갖고 있으므로 충분히 판단할 수 있다. (근의 공식 자체도 유도 과정이 위와 같은 논리이다. 다만 자주 사용하니 일반화한 것일 뿐이다.)
수능수학에 존재하는 모든 풀이들은 저 두 가지 기준으로 효율을 따질 수 있고, 따라서 해석과 성질의 좋고 나쁨을 판단할 수 있다. 앞으로 기출문제 풀이 파트에서 나쁜 해석의 이유를 언급할 텐데, 원초적인 원인은 위의 두 가지 중 하나다.
개념은 아는 데 문제가 안 풀린다는 학생들을 보면 대부분이 이상하게 해석해서 나쁜 성질로 인한 하지도 못할 풀이를 써간다. 문제를 풀 때 손목운동을 하면 안 된다. 머리를 써서 좋은

해석을 하여 효율적인 풀이를 해내고 계속해서 고민해야 한다.

사소한 부분이지만 이런 이유들을 생각해 본 적이 있는가? 위 예시는 쉬운 문제라 별거 아니라고 생각할 수 있지만 이러한 생각들은 습관이 되고, 나중엔 문제를 접근하냐 못하냐를 결정한다. 최상위권 학생들을 보면 문제 푸는 속도가 굉장히 빠른 걸 알 수 있다. 왜냐면 그들은 이런 생각들이 쌓이고 쌓여 문제를 보고 좋은 성질이 나오려면 어떻게 해석해야 하는지, 공부했던 데이터들로 인해 순식간에 판단하기 때문이다.

이제 좋은 성질을 위해 좋은 해석을 해야 함을 깨달았길 바란다. 위 모든 내용을 정리하면 "좋은 성질 나오게 개체해석" 이라 할 수 있고, 이 한마디를 납득시키기 위해 위에서 떠들어댄 것이다. (좋은 성질이 효율적인 풀이를 도출하기 때문) 글쓴이는 모의고사, N제, 수능 등 문제를 풀 때 저 문장 하나만 머리에 새겨두고 문제를 푼다. 저 한 문장이 이 글의 모든 것이고, 수능수학 고수가 되기 위한 길이다. 정말 정말 중요하므로 앞으로도 계속 강조할 것이다. 위 내용들을 이해하고, 문제를 풀 때"좋은 성질 나오게 개체해석" 이 말을 계속해서 생각하도록 하자. 이 글로 공부하면서 '이제 알겠으니 그만 언급하면 좋겠다'라는 생각이 들기 기대한다. 앞으로 개체를 보면 반사적으로 '좋은 성질 나오게 해석'을 떠올리자. 해봤는데 풀이가 좋으면 진행하는 것이다. 안 좋으면 다시 해석하면 그만이다. 또한 좋은 성질이 풀이를 정해주는 것이다. 고정적인 풀이 방향을 지향해선 안되고, 성질을 보며 해석력을 통해 유동적으로 문제를 해결해 나가야 한다. 문제를 풀고 틀린 후 해설을 봐도 '저렇게 풀 수 밖에 없구나.'라고 느낄 수 있어야 한다.

지수함수와 로그함수

실전개념 - 1

그래프의 확대 축소

$y=f(x)$ 와 임의의 양수 a에 대하여

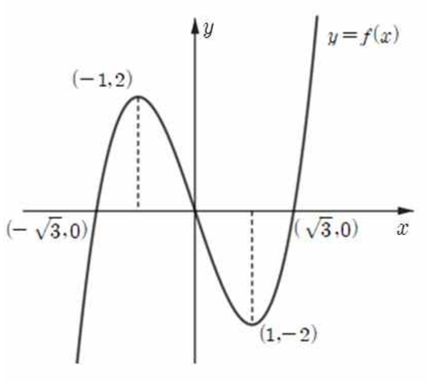
$\frac{y}{a}=f(x)$: $y=f(x)$ 그래프를 y축 기준 a배 한 그래프

$y=f(\frac{x}{a})$: $y=f(x)$ 그래프를 x축 기준 a배 한 그래프

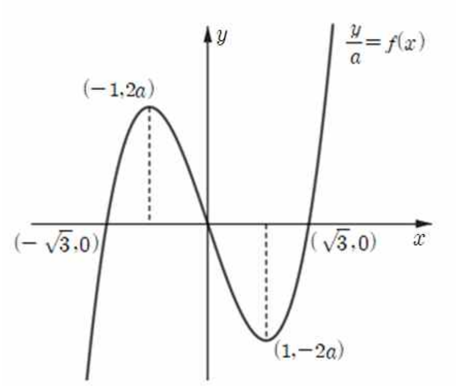
위 개념은 그래프를 이용하여 직관적인 이해만 하고 넘어가도 충분하다. (수식의 의미를 잘 생각 해 봐도 확대, 축소 의미를 느낄 수 있다.) 아래 예제들을 보며 그래프의 확대 축소를 이해보자.

1) $\frac{y}{a}=f(x)$ 인 경우

$f(x)=(x^2-3)x$ 라 하자. $y=f(x)$의 그래프는 아래와 같이 그려진다.



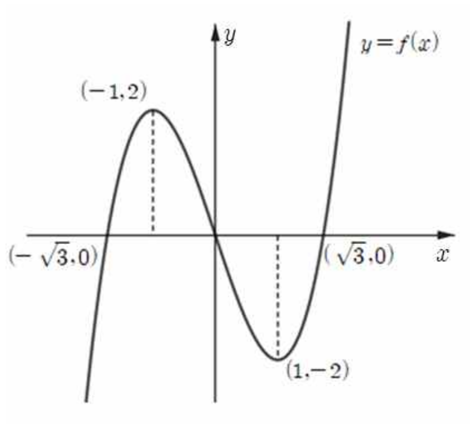
이제 $\frac{y}{a}=f(x)$ 그래프를 그리며 a의 역할에 주목해보자. (반드시 스스로 생각해보길 바란다.)



위 두 그래프를 비교해 보면 실전개념에서 언급했듯이 y축을 기준으로 a배 한 관계인 것을 이해할 수 있을 것이다. ($(0<a<1)$일 때를 생각해보면 축소됐다 라고 이해할 수 있다.)

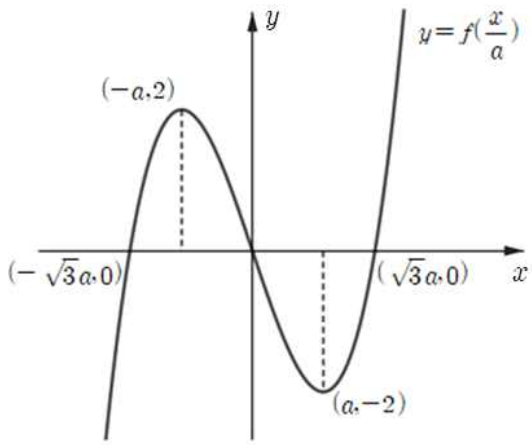
2) $y=f(\frac{x}{a})$ 인 경우

위와 같이 $f(x)=(x^2-3)x$ 라 하자.



이제 위와 동일하게 $y=f(\frac{x}{a})$ 의 그래프를 그리며 a의 역할에 주목하자

(이 또한 스스로 생각해보길 바란다.)



두 그래프를 비교해 보면 x축을 기준으로 a배 한 관계임을 알 수 있다.
(또한$(0<a<1)$일 때를 생각해보면 축소됐다 라고 이해할 수 있다.)

이제 다시 한 번 실전 개념을 읽어보자.

$y=f(x)$ 와 임의의 양수 a에 대하여

$\dfrac{y}{a}=f(x)$: $y=f(x)$ 그래프를 y축 기준 a배 한 그래프

$y=f(\dfrac{x}{a})$: $y=f(x)$ 그래프를 x축 기준 a배 한 그래프

그래프를 보고 직관적인 이해가 됐다면, 텍스트만 보고도 그래프를 a배 했다는 게 머릿속에서 떠올라야 한다.

(절대적인 해석법은 없다. 위 개념에서 식을 보고 확대 축소로 이해할 수도 있지만 그냥 상수배로 해석해야 하는 경우가 있을 수도 있다. 해석에는 절대적인 방법은 없다는 것에 명심하자)

실전개념 - 2

지수함수, 로그함수와 다항함수가 있는 방정식의 실근

일반적으로 지수함수, 로그함수, 다항함수가 섞여있는 방정식에서의 실근은 식을 이용하여 구할 수 없다.

초월함수(삼각함수, 지수함수, 로그함수)와 다항함수의 방정식은 근을 구하는 방법이 매우 한정적이다. 다음 문제들을 예시로 생각하여 위 문장을 이해해보자.

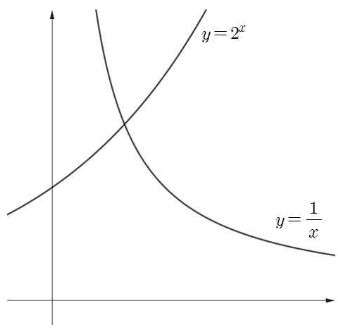
다음 방정식의 실근을 구하시오

1) $2^x = \dfrac{1}{x}$ 2) $2^x = \dfrac{7}{3}x + 1$ 3) $\log_2 x = 2^{x-3}$ 4) $\log_2 x = 2x - 3$

주어진 문제를 스스로 생각해보자.

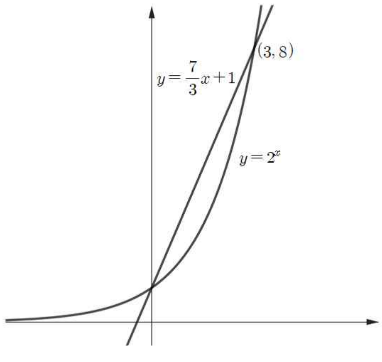
1) $2^x = \dfrac{1}{x}$를 식으로 해석하면 어떻게 변형해도 해를 찾을 수 없다.

단순히 그래프로 해석하여 1사분면 위에 $y = 2^x$와 $y = \dfrac{1}{x}$의 교점이 하나 존재하므로 양의 실근 하나가 존재한다는 사실 정도만 알 수 있다.

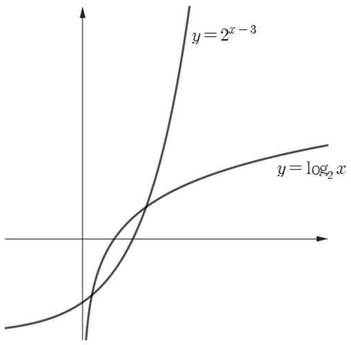


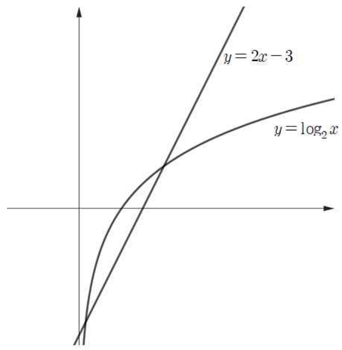
2) $2^x = \dfrac{7}{3}x + 1$ 1)과 같이 식으로 해석하면 아무 소용이 없다는 것을 알 수 있다.

이 또한 그래프를 그려본 후 (0,1) 과 다른 양의 실근 하나가 존재하고, 느낌적으로 3을 대입함으로써 (3,8)이 다른 양의 실근 중 하나임을 알 수 있다.



3), 4)또한 식으로 해석하면 아무것도 알 수 없고, 그래프로 해석해야만 그나마 실근의 여부와 개수정도 알 수 있다.





지수함수, 로그함수와 다항함수의 방정식은 계산기를 사용하지 않는 한 식으로 해석하는 게 매우 불리하고, 따라서 그래프 해석이 유리함을 알고 있자. 식으로의 해석은 평범한 고등학생이 판단할 수 없는 수준이다. (물론 식으로의 해석이 틀린 해석이라 단정 지을 수는 없다. 하지만 우선적인 해석은 아니라는 말이다.)

실전개념-2의 결론

지수함수, 로그함수, 다항함수가 섞인 방정식 문제는 식으로 계산할 수 없으므로 해를 구할 수 있는 다른 조건을 반드시 줘야 한다. 그 조건 중 하나는 기하적인 성질을 주는 것이다. 따라서 반드시 그래프를 그려 기하적인 요소를 찾고, 방정식의 해인 교점의 좌표를 찾기 위해 노력해야 한다.

실전개념-2 는 풀이에 명시적으로 나타나지는 않지만 지수함수, 로그함수 그래프 문제에서 해석 방향을 제시해주는 중요한 척도이다. 잘 기억하자

*실전개념은 자주 사용하는 해석법을 일반화하여 정리한 것일 뿐이다. 절대적인 해석법이 아님을 명심하자.

기출문제 풀이

문제에 들어가기 전 해설에서 자주 쓰이는 기호를 약속하겠다.

1. A : B (대상 : 해석한 의미)
예를 들어보면 $f(x)$: 미분가능한 함수, 사차함수 , 곡선
이 말은 $f(x)$를 미분가능한 함수, 사차함수 곡선으로 해석한다는 문장이다.
$g(x) = x^2 + 2x + 1$일 때 $g(x) : (x+1)^2$
함수 $g(x)$를 $(x+1)^2$으로 해석했단 의미이다. 등호와는 약간 뉘앙스가 다르다.
이현우 : 수학고수
이 말은 이현우를 수학고수로 해석했단 뜻이다.
(참고로 상황, 성질도 해석이 가능하다. 하지만 반드시 개체의 해석이 선행돼야 하므로 개체해석이 가장 중요하다.)

2. 때문에 따라서 $\because \therefore$
이 기호는 실제 수학적인 기호로 때문에 = $\because$, 따라서 = $\therefore$ 라고 쓰인다.
ex) 현우는 수학을 잘한다. ($\because$ 현우는 천재다)
나는 돈이 많다. $\therefore$ 매일 치킨을 먹을 수 있다.
보통 $\because$는 굳이 근거를 언급하기 위해 사용하므로 괄호처리를 한다.

3. 화살표→
이 기호는 원인과 결과의 방향성을 나타내는 의미로 사용하겠다. ~이므로 라는 의미로 생각하면 된다.
(충분조건(⇒)과 비슷하게 느낌으로 쓸 것이다.)
ex) $f(x)$: 미분가능한 함수 → 연속함수
삼각형ABC : 직각삼각형 → 피타고라스 정리

4. *
글에는 글쓴이가 추가적으로 하고 싶은 말을 곳곳에 comment로 써놓는다. 때로는 문장들 사이에서도 그런 말을 하고 싶기에 *를 사용하여 comment를 쓸 것이다.

기출문제 풀이

문제풀이 공부 방법 (굳이 기출문제가 아니어도 된다.)

1. 문제에 등장하는 개체들의 특이점이 있나 관찰한 후, 의식적으로 매 순간 좋은 성질이 나오게 해석하려고 고민하자. 또한 풀이가 난해하면 다르게 해석하자. 이상한 풀이를 써가며 이게 뭐지? 이러고 있으면 안 된다.
  (개체를 보면 의식적으로 "좋은 성질 나오게 개체 해석"!!)

2. 본인의 해석이 왜 좋은 해석, 나쁜 해석인지 고민하자. 틀린 해석은 없다. 하지만 우린 좋은 해석을 해야 하므로, 어느 정도의 풀이가 효율적이고 비효율적인지 느낄 수 있고, 좋은 해석 나쁜 해석을 판단할 수 있어야 한다.

이 두 가지를 계속해서 공부하면 처음엔 많이 느리지만, 점점 데이터들이 쌓여 나중엔 대부분 문제들의 해석 방향을 암산 수준으로 판단할 것이다.

Q. 해설은 언제 봐야 하나요?
A. 가장 좋은 방법은 어떻게 해석해야 할지 떠오를 때까지 해설을 안 보는 것이다. 시간이 날 때마다 '그 문제는 어떻게 해석해야 하지?' 생각하며 고민하자.
그게 어렵다면 '이젠 어떠한 해석도 떠오르지 않는다.' 정도까지는 고민하고, 해설을 보도록 하자.

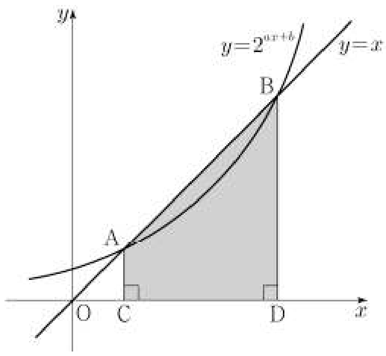
1등급을 가르는 문제에는 ★표시를 하겠다. 겁먹으라고 표시하는 게 아니고, 고민을 좀 해야 할 수도 있다는 의도로 하는 것이다. 절대로 겁먹지 말자. 해석만 잘하면 교과서 문제와 다를 게 없다.

시험장에는 아무도 도와주지 않는다. 스스로 관찰하고 생각할 줄 알아야 한다.

2021학년도 9월
(가)13번(나)15번

13. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



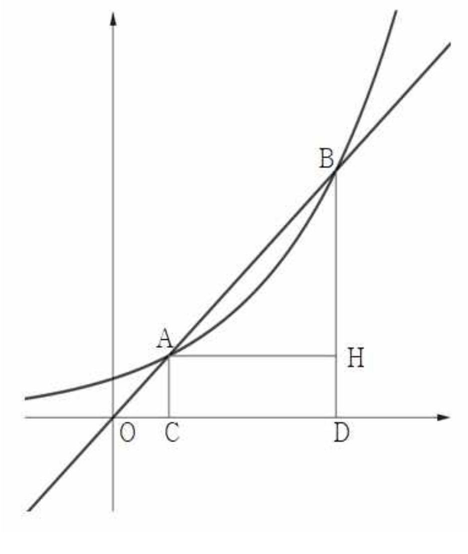
첫 문제는 더욱 풀어서 해설을 쓰겠다.
우리의 목표는 하나 효율적인 풀이를 위해 "좋은 성질 나오게 개체해석"임을 생각하며 풀이에 임하자.

$y=2^{ax+b}$: $y=2^{ax}$를 평행이동한 함수, 곡선, 지수함수
$y=x$: 일차함수, 다항함수, 기울기가1인 직선 정도로 해석할 수 있다.
다항함수와 지수함수가 엮여있고, 사각형 ACBD의 넓이를 구하려면 결국 교점의 좌표를 알아야 하므로 기하적인 해석이 좋은 해석이다.(∵실전개념 - 2)

따라서 $y=2^{ax+b}$: 아래로 볼록한 곡선, $y=x$: x축과 이루는 각이 $\frac{\pi}{4}$인 직선

이제 점들을 해석해 보자.
점A, B : $\mathrm{A}(p, 2^{(ap+b)})$, $\mathrm{B}(q, 2^{(aq+b)})$라고 해석하면 미지수가 4개가 되므로 좋은 성질이 나왔다고 보기 어렵다.(*) 따라서 이 해석이 우선적인 해석은 아니라 생각할 수 있다. 조건에서 개체 $\overline{\mathrm{AB}}$에 대한 성질을 줬음을 생각하자.
$\overline{\mathrm{AB}}$: 상수, 선분의 길이라고 해석하면 점과 점사이 거리공식이 도출되고, 계산량을 보면 나쁜 해석임을 알 수 있다. 다시 해석하자.

우리는 기하적인 해석을 해야 하기 때문에 $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$, 각$\frac{\pi}{4}$ 을 보고 $\overline{\mathrm{AB}}$: 직각이등변삼각형의 빗변으로 해석할 수 있다. 따라서 우리는 점H를 생각할 수 있고, 삼각형 ABH : 직각이등변삼각형 (∵닮음), 점A, B, H : 직각이등변삼각형의 꼭짓점으로 해석할 수 있다. (점H의 등장은 발상적인 게 아니다.)



따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=6$이다.(∵삼각비) (* 점A, B의 좌표에 관한 성질이므로 좋은 성질이고, 좋은 해석을 했음을 알 수 있다.)

이제 넓이 조건을 해석하기 위해 $\overline{\mathrm{AC}}=\mathrm{c}$ 라고 할 수 있고,
사각형 ABDC넓이 : 사각형 ACDH넓이 + 삼각형 ABH넓이 → $30=6c+18$

$\therefore c=2 \ \rightarrow \ \mathrm{A}(2,2)$, $\mathrm{B}(8,8)$이다. ($\because$ 삼각형AOC, BOD의 삼각비)

점A, B : $y=2^{ax+b}$위의 점 $\rightarrow \ 2=2^{2a+b}, 8=2^{8a+b}$

$\therefore 2a+b=1, 8a+b=3 \ \rightarrow \ a+b=\dfrac{2}{3}$ 정답 4번

*미지수가 4개이면 관계식 4개를 연립해야 하는데, 이 풀이는 계산량이 과해서 나쁜 해석이다.

.

comment1

개체를 해석하는 것을 보면 생각보다 엄청난 능력을 원하는 게 아님을 알 수 있다.
어려워하지 말고 저질러보자. 도출되는 성질과 풀이의 효율이 판단해 줄 것이다.

comment2

방정식의 해인 좌표를 찾을 때 단 한 번도 지수함수의 성질을 쓰지 않았다. 이 문제를 통해 실전개념 2를 잘 이해했길 바란다.

comment3

좋은 해석, 나쁜 해석은 상대적인 것이다. 점들을 $\mathrm{A}(p, 2^{(ap+b)})$, $\mathrm{B}(q, 2^{(aq+b)})$로 해석했을 때 다른 해석보다 좋은 성질을 갖고 있으면 좋은 해석인 것이다.

comment4

글쓴이는 많은 학생들을 대상으로 해설을 작성하다 보니 상위권들이 할 수 있는 보편적인 해석을 하고 있다. 하지만 해석법은 많기 때문에 풀이도 다양하다.
따라서 자신의 풀이가 해설과 달라도 좋은 해석을 하여 효율적인 풀이를 작성했다면 그것으로 충분하다.

comment5

$\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$, 각 $\dfrac{\pi}{4}$를 보고 삼각비를 떠올려 $\overline{\mathrm{AB}}$: 직각이등변삼각형의 빗변으로 해석할 수도 있다. (값을 보고 해석 방향을 정할 수도 있다는 말이다.) 이런 발상을 이질적으로 생각할 수도 있지만, 계산량이 해석의 근거가 될 수 있음을 문제 해석력 파트에서 알아봤기에 숫자를 보고 해석 방향을 예상하는 것 또한 나쁘지 않은 접근이다. (* 절대적인 것은 아니다)

comment6
첫 문제이고 아직 추상적이라 느낄 독자를 위해 해설 일부를 더 풀어 써주겠다.
우리는 좋은 성질이 나오게 하기 위해 개체를 $y=2^{ax+b}$: 아래로 볼록한 곡선 $y=x$: x축과 이루는 각이 $\frac{\pi}{4}$인 직선 으로 해석했고, 이런 해석으로 인해 $\frac{\pi}{4}$, 삼각형 OBD, OAC의 닮음 관계, 직각이등변삼각형 과 같은 좋은 성질을 얻었다. 따라서 좋은 해석임을 느끼고, 같은 과정으로 좋은 성질이 나오게 하기 위해 $\overline{\mathrm{AB}}$: 직각이등변삼각형의 빗변으로 해석하였다.
$\overline{\mathrm{AC}}=\mathrm{c}$ 라고 한 것도 $30=6c+18$라는 효율적인 풀이가 나오기 때문에 좋은 해석이라 판단 가능하다.

comment7
문제 해석력 설명 파트에서 풀이의 효율을 판단하는 기준은 "1) 계산량, 2) 판단 가능 수준" 이라고 했었다. 점A, B를 $\mathrm{A}(p, 2^{(ap+b)})$, $\mathrm{B}(q, 2^{(aq+b)})$라고 해석하고, $\overline{\mathrm{AH}}=6$를 선분의 길이라 해석하여 점과 점 사이 거리공식을 생각했으면 도출된 식 $\sqrt{(p-q)^2+(2^{ap+b}-2^{aq+b})^2}$의 상태를 보고 계산량이 너무 많다고 생각 후, 나쁜 해석임을 인지하여 다른 해석을 해야겠다고 느껴야 한다. (* 분명히 거리공식 쓴 독자는 있다. 안 썼다 하더라도 왜 안 쓴지 이유를 모르면 다른 문제에서 거리공식 해석처럼 비효율적인 풀이를 할 것이다.) 만약 도출된 식의 형태가 할만해 보이는 형태였다면 좋은 해석이므로 그냥 진행하면 된다.

해설을 보면 계속해서 좋은 해석을 하려고 한다. 문제풀이능력은 이 노력이 매우 매우 중요하다. '굳이 저렇게까지 해야 하나?'라고 생각할 수 있고, 지금 본 문제는 쉬운 문제라 과하다고 생각할 수 있지만, 고난도 문제를 접할 때 저런 사소한 해석 하나하나에 문제를 풀 수 있고 없고가 결정 난다. 아무리 좋은 스킬을 알고 있어도 해석력이 부족하면 스킬을 쓰는 문제인지조차 모른다. 문제를 풀 때 무작정 들이대지 말고 좋은 성질이 나오게 해석하기를 노력하고 고민하자 그것만이 고득점을 위한 유일한 길이다. "좋은 성질 나오게 개체해석" 반드시 명심하자

2018학년도 수능
(나)16번

16. 1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_{\sqrt{3}} a = \log_9 ab$$

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

밑이 다른 로그함수로 해석하면 주어진 상황을 판단할 수 없으므로 나쁜 해석이다.
로그를 관찰하면 밑이 3과 연관돼있음을 알 수 있으므로

$\log_{\sqrt{3}} a$: 밑이 3인 로그, $\log_9 ab$: 밑이 3인 로그 → $2\log_3 a = \frac{1}{2}\log_3 ab$ → $a^4 = ab$ → $a^3 = b$

$\therefore \log_a b = 3$

정답 3번

comment1

"$\log_{\sqrt{3}} a$: 밑이 3인 로그"를 보고 '밑은 $\sqrt{3}$인데?' 라고 생각하면 안된다. $\log_{\sqrt{3}} a$를 보고 밑이 3인 로그라고 인지하는 것이다.

comment2

앞으로 해석의 판단이 쉬운 부분은 근거를 생략할 것이다. 나쁜 해석을 하여 풀이가 이상했다면 문제 해석력 파트에서 언급한 두 가지 기준 중 어떤 이유 때문에 나쁜 해석인지 스스로 고민해보자.

2019학년도 수능
(나)15번 **15.** 2 이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 34 ② 38 ③ 42 ④ 46 ⑤ 50

주어진 상황은 $5\log_n 2 =$ 자연수인 n의 합으로 해석된다.

$5\log_n 2 =$ 자연수 : n에 관한 관계식

$5\log_n 2 = \log_n 2^5 =$ 자연수 $\rightarrow$ $n^{\text{자연수}} = 2^5$ $\rightarrow$ $n = 2, 32$

따라서 모든 n의 합은 34

정답 1번

comment

$5\log_n 2$에서 본인이 스스로 못하겠다 느낀 후, 능동적으로 개체를 새롭게 해석해야 한다.

만약 $5\log_n 2 =$ 자연수 여기서 바로 할만하다 느끼면 그냥 하면 된다. (과연 할 수 있을까..?)

2023학년도 6월

21번 ★

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)=k$: n에 관한 함수$=k$ (k는 정수)

이 상태론 n의 성질을 알 수 없다. 따라서 할만할 때까지(좋은 성질 나오게) 식을 해석하자.

식을 조작할 때마다 개체를 해석해보며 언제 좋은 성질을 갖는지 본인이 느껴야 한다.

$4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)=k \rightarrow \dfrac{2}{3}\log_{2}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)=k$

$\dfrac{3}{4n+16}$: 치역이 유리수인 함수, k : 정수 $\rightarrow$ $\log_{2}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)=3l$꼴 $\rightarrow \dfrac{3}{4n+16}=2^{3l}$꼴 $\rightarrow$

$\dfrac{4n+16}{3}=\cdots, 2^3, 2^6, \cdots$: $n=\cdots, \dfrac{3\times 2^3-16}{4}, \dfrac{3\times 2^6-16}{4}, \cdots \rightarrow$ $n=2, 44, 380\,(\because n$: 1000 이하의 자연수)

정답 426

comment

개체를 보면 계속해서 좋은 성질이 나오게 해석해야 한다.

2023학년도 수능
13번

13. 자연수 $m(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37　② 42　③ 47　④ 52　⑤ 57

$f(m)$: 방정식 $x = m^{\frac{12}{n}}$의 정수해 x가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수.
방정식을 관찰하면 m이 거듭제곱꼴을 기준으로 n의 개수가 달라짐을 알 수 있다.

1) m이 거듭제곱꼴이 아닐 때 → $m = 2, 3, 5, 6, 7$
　$n = 2, 3, 4, 6, 12$ (약수와 관련 있음을 알 수 있다.)

2) m이 제곱꼴일 때 → $m = 4, 9$
　$n = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

3) m이 세제곱꼴일 때 → $m = 8$
　$n = 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

따라서 $f(2) = f(3) = f(5) = f(6) = f(7) = 5$, $f(4) = f(9) = 7$, $f(8) = 8$ →
$\sum_{m=2}^{9} f(m) = 5 \times 5 + 2 \times 7 + 1 \times 8 = 47$

정답 3번

comment1
만약 제곱꼴이 중요함을 몰랐다면 m을 하나씩 넣어보며 어떤 성질이 키포인트인지 찾아내고, 그 성질에 기반하여 해석해도 충분하다.

comment2
다시 말하지만 이런 사소한 성질들 하나하나를 공부하면 안 된다. 이 문제를 맞힌 사람들 대부분은 성질을 알고 있던 게 아니라 그 자리에서 찾아내어 해석한 것이다. 관찰하고 해석하자!

2019학년도 6월
(가) 14번

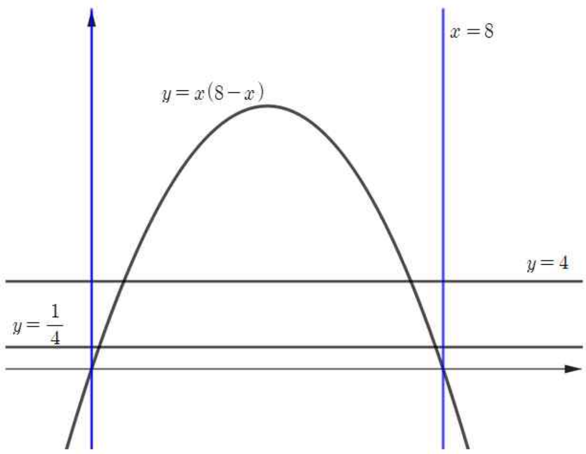
14. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

주어진 상황을 그래프로 그려보면 상황파악은 되지만, 답을 도출하기엔 미술시간이 되어버린다. 계산을 해야 하므로 식으로 해석하자. (밑이 같으므로 충분히 좋아 보인다.)

주어진 상황 : $\left|\log_2 k+\log_2(8-k)\right|=2 \rightarrow \log_2 x(8-x)=\pm 2 \rightarrow x(8-x)=4, \frac{1}{4}$: x에 관한 방정식

($x(8-x)-4=0, x(x-8)-\frac{1}{4}=0$으로 해석해도 되지만, $x(8-x)$은 너무 좋은 성질을 가졌으므로 $x(8-x)=4, \frac{1}{4}$으로 해석하는게 좋다.)
그래프를 그리기 편하므로 그래프로 진수조건을 만족하는지 확인하자.



모든 실근이 진수조건에 만족함을 알 수 있다. → 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.
$k(8-k)=4 \rightarrow k^2-8k+4=0$, $k(8-k)=\frac{1}{4} \rightarrow k^2-8k+\frac{1}{4}=0$
따라서 모든 실근의 곱은 1이다.

정답 2번

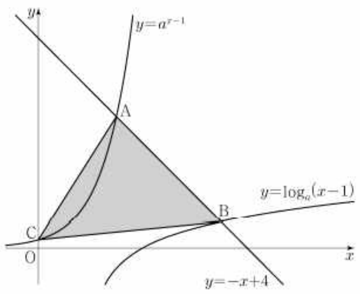
comment
그래프를 그리기 편해서 그래프로 진수조건을 확인한 것이다. 진수조건을 확인하려고 그래프를 그린 게 아님을 반드시 알아야 한다. 좋은 성질을 근거로 해석 방향이 정해지는 것이다.

2022학년도 9월
21번 ★

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1}, \quad y=\log_a(x-1)$$

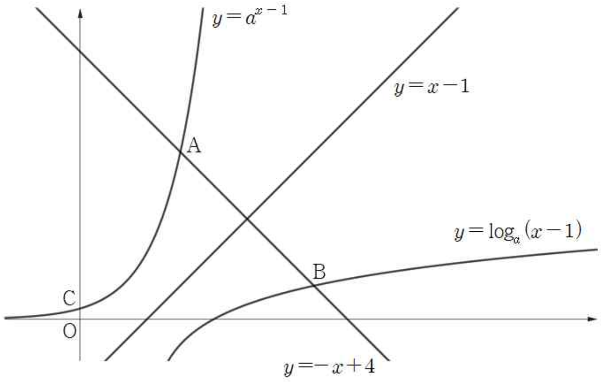
과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



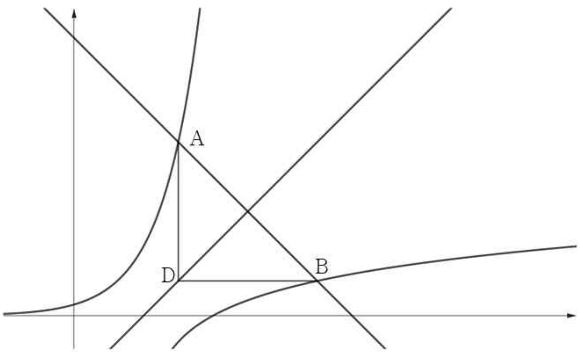
좋은 성질 나오게 개체를 해석하자

지수함수 로그함수 다항함수가 있고, a를 결정하려면 좌표가 필요하기 때문에 기하적인 성질이 나오게 해석해야 한다. (실전개념 - 2)
때문에 a^{x-1} : a^x를 x축 방향 +1 평행이동, $\log_a(x-1)$: $\log_a x$를 x축 방향 +1 평행이동.

또한 a^x, $\log_a x$ 는 $y=x$기준 대칭임을 생각하면 a^{x-1}, $\log_a(x-1)$ 는 $y=x-1$ 대칭인 개체임을 알 수 있다. (* 점A와 점B 또한 대칭임을 생각하면 평행이동은 좋은 해석이라고 판단할 수 있다.)



$y=-x+4$: x축과의 이루는 각이 $\frac{\pi}{4}$인 직선,
선분AB : 직각 이등변 삼각형의 빗변이므로 다음과 같은 상황이 된다.



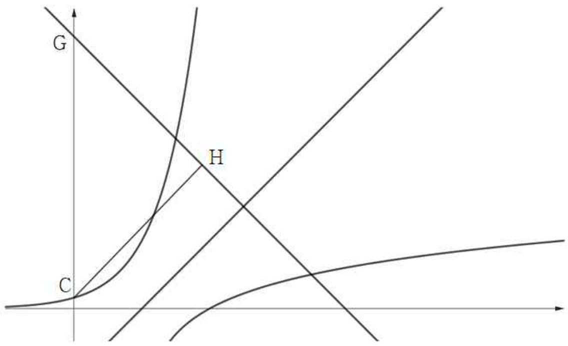
삼각형ABD : 직각이등변삼각형, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$ $\rightarrow$ $\overline{BD}=\overline{AD}=2$ ($\because$ 삼각비)

점D는 $y=x-1$ 위의 점이기 때문에 점D를 이용하여 A와B를 해석하는 게 좋아 보인다.
따라서 $D(c+1, c)$이라 설정하면 $A(c+1, c+2)$, $B(c+3, c)$ 이다.

점A,B : $y=-x+4$ 위의 점 $\rightarrow$ $c=\frac{1}{2}$(* 이 상태에서 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$ 위의 점이라고 해석하면 나쁜 성질이 나오기 때문에 좋은 해석이라 볼 수 없으므로 다른 해석을 할 생각을 해야 한다.)

$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

점A, B : $y = a^{x-1}$, $y = \log_a(x-1)$ 위의 점 $\rightarrow$ $a = \frac{25}{4}$
이제 삼각형 ABC의 넓이를 구하자. 삼각형 ABC : 밑변이 선분AB인 삼각형
(밑변을 다르게 해석하면 높이를 구하는 과정이 불쾌하다.)
(H : 점 C에서 $y = -x+4$에 내린 수선의 발)



$\mathrm{C}(0, \frac{4}{25})$, $\mathrm{G}(0, 4) \rightarrow \overline{\mathrm{CG}} = \frac{96}{25}$, 삼각형 CGH : 직각 이등변 삼각형 $\rightarrow$ 삼각비에 의해
$\overline{\mathrm{CH}} = \frac{48\sqrt{2}}{25}$ 따라서 넓이$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{48\sqrt{2}}{25} = \frac{96}{25}$이고 $50\mathrm{S} = 192$이다.

정답 192

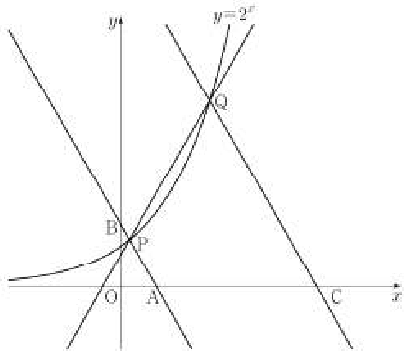
comment
풀이가 길어 보이지만 해설의 대부분은 사고과정일 뿐이다. 즉 대부분은 머리에서 생각되는 것이고 실제로 풀이를 써보면 매우 간결함을 알 수 있다. 좋은 성질 나오게 개체를 해석하려고 계속해서 고민하자.

2023학년도 9월
21번 ★

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

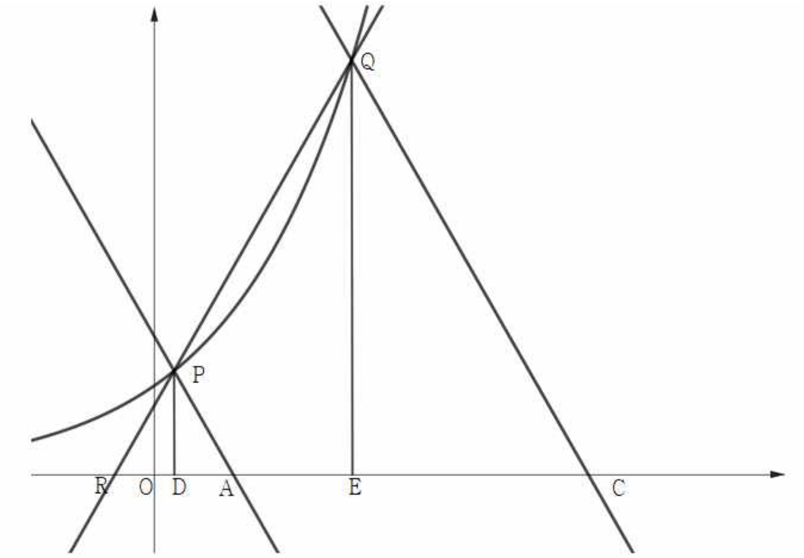
$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]

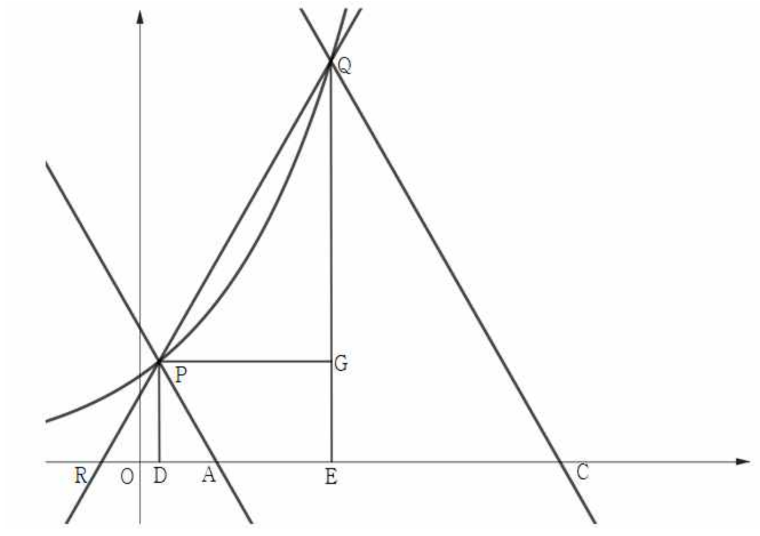


이제는 기하적 해석을 해야 한다고 당연하게 생각이 들기 바란다.
$\overline{AB} = 4\overline{PB}$, $\overline{CQ} = 3\overline{AB}$ $\rightarrow$ $\overline{BP} : \overline{AP} : \overline{CQ} = 1 : 3 : 12$ 이다.

기울기가 $m, -m$ $\rightarrow$ 세 직선이 x축과 이루는 각이 같다. $\rightarrow$ 닮음 관계인 이등변 삼각형 AOP, COQ이 보인다. 닮음을 쓰기 위해 점 R,D,E 을 생각할 수 있다.
(점R은 점 P,Q를 지나는 직선의 x절편, 점D는 점P에서 x축에 내린 수선의 발, 점E는 점Q에서 x축에 내린 수선의 발)



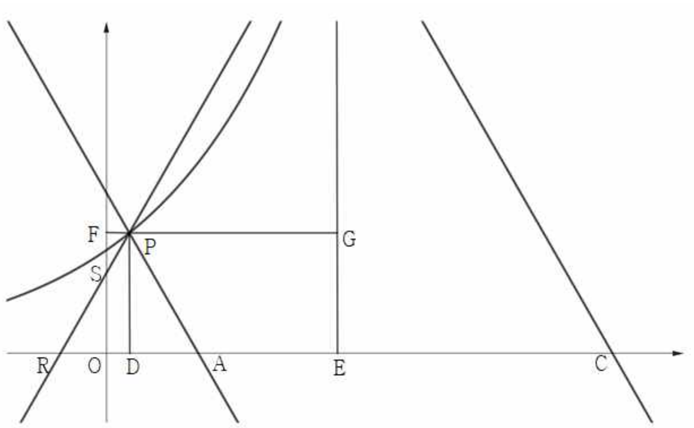
$\overline{AP} : \overline{CQ} = 1 : 4$, 닮음 관계인 이등변 삼각형$ARP, CRQ$ $\rightarrow$
PRD,QRE는 닮음비가 1 : 4 $\rightarrow$ $\overline{PD} : \overline{QE} = 2^a : 2^b = 1 : 4$ 이다.
따라서 $2^{a+2} = 2^b$이고 $b = a + 2$이다. 이렇게 두지말고 이 또한 기하적으로 해석해보면 점P와 Q의 x좌표 차이는 2라고 할 수 있다. (* 닮음비를 사용 중이기 때문에 길이로 해석은 좋은 해석이다.)
x좌표 차이 2를 사용하기 위해 점G를 생각할 수 있고, 아래처럼 그림을 나타낼 수 있다. (G는 점P에서 선분EQ에 내린 수선의 발)



$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{CQ}} = 1 : 4$, 닮음 관계인 삼각형PQG, PRD $\rightarrow$

삼각형 PQG, PRD 의 닮음비가 3 : 1 $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{PG}} : \overline{\mathrm{RD}} = 3 : 1$ 이다. 따라서 $\overline{\mathrm{RD}} = \frac{2}{3}$이다.

이제 $\frac{2}{3}$을 사용하기 위해 점F, S를 생각할 수 있고, (F는 점P에서 y축에 내린 수선의 발, S는 점P,Q를 지나는 직선의 y절편)



$\overline{\mathrm{PS}} : \overline{\mathrm{RS}} = 1 : 2$, 닮음 관계인 삼각형 PSF, SRO $\rightarrow$ 삼각형 PSF, SRO 의 닮음비가 1 : 2 $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{OD}} : \overline{\mathrm{OR}} = 1 : 2$ 이다.

$\therefore$ $\overline{\mathrm{OD}} = \frac{2}{9}$, 또한 삼각형 PSF는 이등변 삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AD}} = \frac{2}{3}$이다. 따라서 $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{2}{9} + 2$ 임을 알 수 있다 $\therefore$ $90(a+b) = 220$

comment1

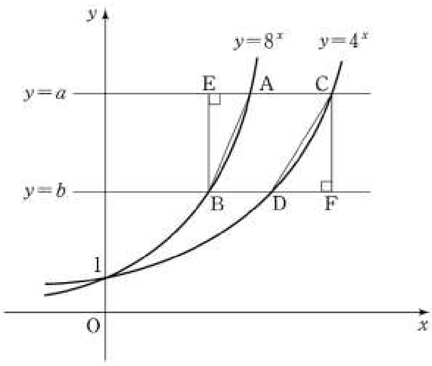
사실 지수, 로그함수 그래프에서 다항함수와 실근을 묻는 문제는 날로 먹는 문제이다. 많은 부분이 제한되기 때문에 해석 방향이 고정적이다. 이때까지 푼 문제들을 보면 다 똑같은 짓을 반복하고 있다는 게 느껴지지 않는가?

comment2

이제 지수함수 로그함수 그래프에서 좌표를 구하는 문제는 다 똑같음을 이해했길 바란다.
기하적 해석 -> 좌표설정 -> 대입 이게 끝이다. 또한 기하적인 성질이 필요함을 깨달았으면 문제에서 주어진 직선의 기울기, 대칭이동, 평행이동 등의 값을 절대 그냥 막 준 게 아님을 알 수 있다. 그리고 왜 굳이 다항함수 중 일차함수를 주는지 눈치를 채길 바란다.

2008학년도 6월 (나)13번

13. 그림과 같이 함수 $y=8^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=4^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자.
삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는?
(단, $a>b>1$이다.) [3점]



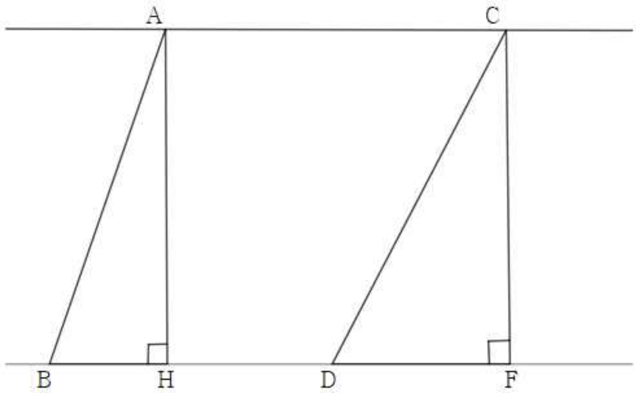
① 26　　② 28　　③ 30　　④ 32　　⑤ 34

sol1) 밑이 같은 지수함수로 해석

$y=8^x$, $y=4^x$: 밑이 2인 지수함수 → $y=8^x=2^{3x}$, $y=4^x=2^{2x}$

그래프의 확대 축소를 생각해보면 $y=2^{2x}$: $y=2^{3x}$를 x축 기준 $\frac{3}{2}$배 확대한 그래프 라고 해석할 수 있다.

확대 비율 성질을 사용하기 위해 점A에서 선분$\overline{BD}$에 수선의 발을 내리고 그 점을 H라 하자. 그럼 점B, H, D, F는 동일한 y선상에 위치하므로 비율 성질을 쓸 수 있다.



같은 y값만큼 증가 했으므로 증가량 또한 확대비율과 동일하다. → $\overline{BH}$: $\overline{DF}$ = 1 : $\frac{3}{2}$ → 넓이 비 1 : $\frac{3}{2}$ 이다.

∴ 삼각형 CDF넓이 = $\frac{3}{2}\times 20=30$

정답 3번

sol2) 밑이 다른 지수함수로 해석

$y=8^x$, $y=4^x$: 지수함수 → $A(\log_8 a, a)$, $B(\log_8 b, b)$, $C(\log_4 a, a)$, $D(\log_4 b, b)$

삼각형 AEB넓이$=20$ → $\frac{1}{2}(\log_8 a-\log_8 b)(a-b)=20$

삼각형 CDF넓이$=\frac{1}{2}(\log_4 a-\log_4 b)(a-b)=\frac{3}{4}(\log_8 a-\log_8 b)(a-b)=30$

정답 3번

comment

실전개념을 위해 넣어 본 문제이다. 안 써도 충분히 풀 수 있고, 실전개념은 그냥 해석법 중 하나를 일반화한 것일 뿐임을 깨닫자.

삼각함수

실전개념 - 1

삼각함수와 다항함수가 있는 방정식의 실근

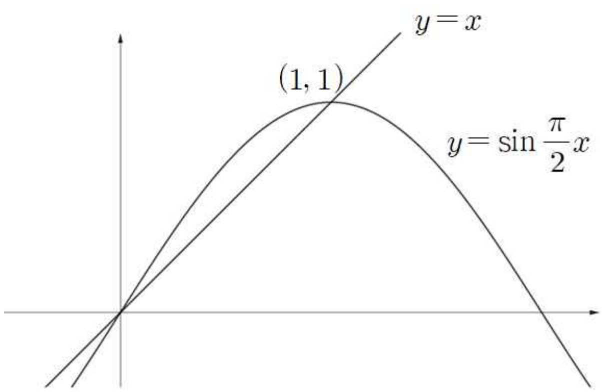
일반적인 경우 삼각함수, 다항함수가 섞여있는 방정식에서의
실근은 식을 이용하여 구할 수 없다.

지수함수 로그함수 파트에서 배운 실전개념과 같은 원리이다. 그나마 삼각함수는 특수각을 알고 있으므로 근을 구할 수 있는 상황이 어느 정도는 다양하다. 예시문제를 보며 이해하자.

다음 방정식의 실근을 구하시오. $(0 \le x \le 2)$

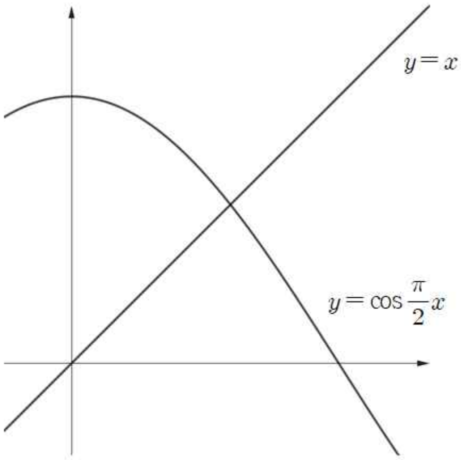
1) $\sin \frac{\pi}{2}x = x$ 2) $\cos \frac{\pi}{2}x = x$

1) 식으로 계산을 생각해보면 할 수 있는 게 없다. 그래프로 해석하자.



그래프를 그려보면 $(0,0), (1,1)$을 해로 갖고 있다고 예상되고, 함수에 대입해보고
$(0,0), (1,1)$을 해로 갖음을 알 수 있다.

2) 위와 같은 과정이다.



근이 존재하는 것은 자명하다. 하지만 교점의 좌표를 예상하여 계산해 보려 해도 근이 뭔지 알 수는 없다. 우리가 알 수 있는 건 열린구간 $(0,1)$에 하나의 실근이 존재하는 게 전부이다.

실전개념 - 4의 결론
지수함수, 로그함수, 다항함수가 섞인 방정식 문제는 식으로 계산할 수 없으므로 해를 구할 수 있는 다른 조건을 반드시 줘야 한다. 대표적으로 기하적인 성질을 주는 것이다. 따라서 반드시 그래프를 그려 기하적인 요소를 찾기 위해 노력해야 한다.

*실전개념은 자주 사용하는 해석법을 일반화하여 정리한 것일 뿐이다. 절대적인 해석법이 아님을 명심하자.

기출문제 풀이
문제에 들어가기 전 해설에서 자주 쓰이는 기호를 약속하겠다.

1. A : B (대상 : 해석한 의미)
   예를 들어보면 $f(x)$: 미분가능한 함수, 사차함수 , 곡선
   이 말은 $f(x)$를 미분가능한 함수, 사차함수 곡선으로 해석한다는 문장이다.
   $g(x)=x^2+2x+1$일 때 $g(x):(x+1)^2$
   함수 $g(x)$를 $(x+1)^2$으로 해석했단 의미이다. 등호와는 약간 뉘앙스가 다르다.
   이현우 : 수학고수
   이 말은 이현우를 수학고수로 해석했단 뜻이다.
   (참고로 상황, 성질도 해석이 가능하다. 하지만 반드시 개체의 해석이 선행돼야 하므로 개체해석이 가장 중요하다.)

2. 때문에 따라서 ∵ ∴
   이 기호는 실제 수학적인 기호로 때문에 = ∵ , 따라서 = ∴ 라고 쓰인다.
   ex) 현우는 수학을 잘한다. (∵ 현우는 천재다)
   나는 돈이 많다. ∴ 매일 치킨을 먹을 수 있다.
   보통 ∵는 굳이 근거를 언급하기 위해 사용하므로 괄호처리를 한다.

3. 화살표→
   이 기호는 원인과 결과의 방향성을 나타내는 의미로 사용하겠다. ~이므로 라는 의미로 생각하면 된다.
   (충분조건(⇒)과 비슷하게 느낌으로 쓸 것이다.)
   ex) $f(x)$: 미분가능한 함수 → 연속함수
   삼각형ABC : 직각삼각형 → 피타고라스 정리

4. *
   글에는 글쓴이가 추가적으로 하고 싶은 말을 곳곳에 comment로 써놓는다. 때로는 문장들 사이에서도 그런 말을 하고 싶기에 *를 사용하여 comment를 쓸 것이다.

기출문제 풀이

문제풀이 공부 방법 (굳이 기출문제가 아니어도 된다.)

1. 문제에 등장하는 개체들의 특이점이 있나 관찰한 후, 의식적으로 매 순간 좋은 성질이 나오게 해석하려고 고민하자. 또한 풀이가 난해하면 다르게 해석하자. 이상한 풀이를 써가며 이게 뭐지? 이러고 있으면 안 된다.
   (개체를 보면 의식적으로 “좋은 성질 나오게 개체 해석”!!)

2. 본인의 해석이 왜 좋은 해석, 나쁜 해석인지 고민하자. 틀린 해석은 없다. 하지만 우린 좋은 해석을 해야 하므로, 어느 정도의 풀이가 효율적이고 비효율적인지 느낄 수 있고, 좋은 해석 나쁜 해석을 판단할 수 있어야 한다.

이 두 가지를 계속해서 공부하면 처음엔 많이 느리지만, 점점 데이터들이 쌓여 나중엔 대부분 문제들의 해석 방향을 암산 수준으로 판단할 것이다.

Q. 해설은 언제 봐야 하나요?
A. 가장 좋은 방법은 어떻게 해석해야 할지 떠오를 때까지 해설을 안 보는 것이다. 시간이 날 때마다 ‘그 문제는 어떻게 해석해야 하지?’ 생각하며 고민하자.
그게 어렵다면 ‘이젠 어떠한 해석도 떠오르지 않는다.’ 정도까지는 고민하고, 해설을 보도록 하자.

1등급을 가르는 문제에는 ★표시를 하겠다. 겁먹으라고 표시하는 게 아니고, 고민을 좀 해야 할 수도 있다는 의도로 하는 것이다. 절대로 겁먹지 말자. 해석만 잘하면 교과서 문제와 다를 게 없다.

시험장에는 아무도 도와주지 않는다. 스스로 관찰하고 생각할 줄 알아야 한다.

2019학년도 9월
(가) 14번

14. 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2　② $\frac{9}{4}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{11}{4}$　⑤ 3

$\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right), \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$: 정의역이 다르므로 함수$f(x)$를 다루기 어렵다. 정의역을 같게 조작하자.

$\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow f(x)=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

이젠 $\sin, \cos$가 같이 있어서 함수의 변화를 관찰하기 어렵다. 같은 계열의 함수로 나타내자.

$\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이고,

따라서 $f(x)=-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k+1$: $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$에 관한 이차함수.

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$라고 해석하면

$y=-t^2-t+k+1\ (-1\leq t\leq 1)$인 이차함수의 최대, 최소문제로 해석할 수 있다.

$y=-t^2-t+k+1$: $t=-\frac{1}{2}$가 대칭축인 위로볼록 이차함수 $\rightarrow$ $t=-\frac{1}{2}$에서 최대, $t=1$에서 최소 $\rightarrow$ $k=\frac{7}{4}, m=\frac{3}{4}$

정답 3번

comment
우리는 서로 다르게 변하는 대상이 2개 이상인 식의 성질을 관찰하기 매우 어렵다.
$\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right), \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$를 보면 $f(x)$가 어떻게 변화하는지 생각조차 하기 힘들다. 따라서 정의역을 조작하는 것이다. 정의역이라도 같으면 그나마 관찰할 수 있으니까... 식 조작을 하는 이유를 알아야 다음번에는 스스로 할 수 있다.

2019학년도 수능

(가) 11번

11. $0 \le \theta < 2\pi$ 일 때, x에 대한 이차방정식

$$6x^2 + (4\cos\theta)x + \sin\theta = 0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha < \theta < \beta$이다. $3\alpha + \beta$의 값은? [3점]

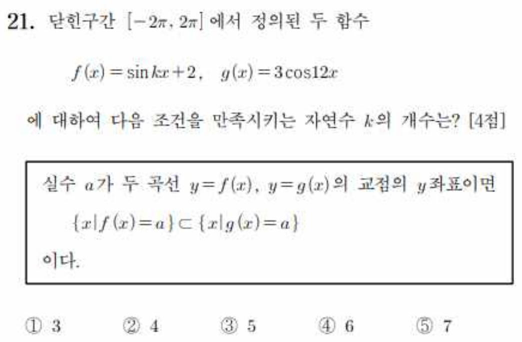
① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

x에 대한 이차방정식이므로 $4\cos\theta, \sin\theta$: 상수
준 식 : 실근을 갖지 않는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 → 최솟값>0, 판별식<0
최솟값 성질로 해석하면 최솟값 구하는 게 힘들어 보여 좋아 보이지 않는다.
판별식으로 해석하면 바로 삼각함수에 관한 부등식이 나오기 때문에 좋은 해석이다.

판별식<0 → $4\cos^2\theta - 6\sin\theta < 0$ → $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0$ →
$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) > 0$ → $\sin\theta > \frac{1}{2}$ → $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$ → $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$

정답 4번

2021학년도 9월
(가) 21번 ★



21. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sin kx + 2, \quad g(x) = 3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

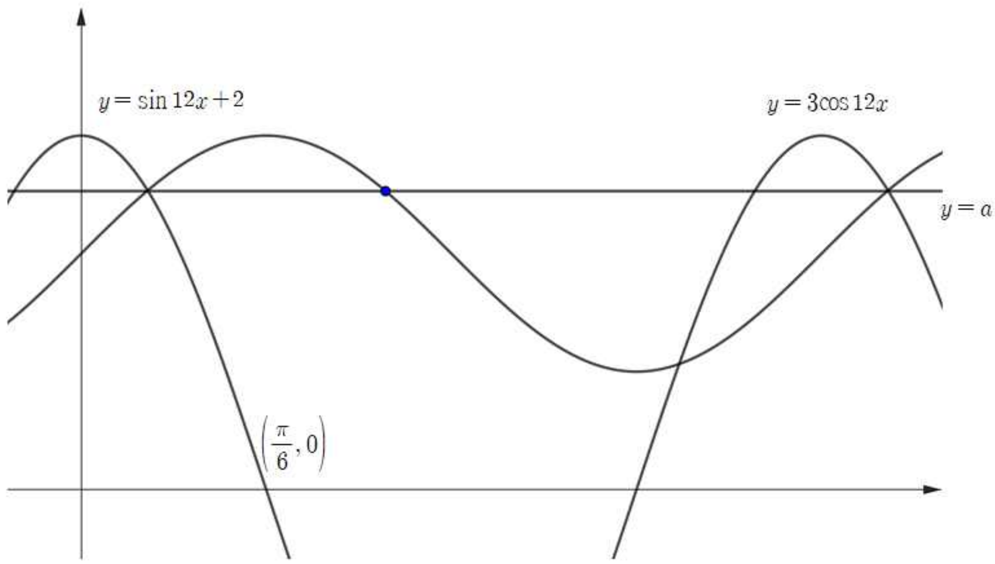
실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면 $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$ 이다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

조건 박스를 보면 $f(x)=g(x)=a$인 x를 관찰해야 한다. $f(x)=g(x)$: 삼각함수 방정식 → 함수를 그래프로 해석을 해야 한다. (식으로 해석하기엔 딱 봐도 복잡해 보인다.)

$f(x), g(x)$: 주기성, 대칭성이 있는 그래프 → 대칭성을 생각하면 닫힌구간 $[0, 2\pi]$만 확인해도 충분하다. 또한 k가 변하므로 그래프의 확대, 축소 개념을 생각하면
$f(x)$: k가 커질수록 주기가 짧아지는 그래프이다.
조건을 만족하려면 k가 어때야 하는지 아직 잘 모르겠다. 하나씩 대입해보며 어떤 성질이 중요한지 알아보자.
주기가 같을 때가 비교하기 가장 편하므로 $k=12$일 때부터 해보자.

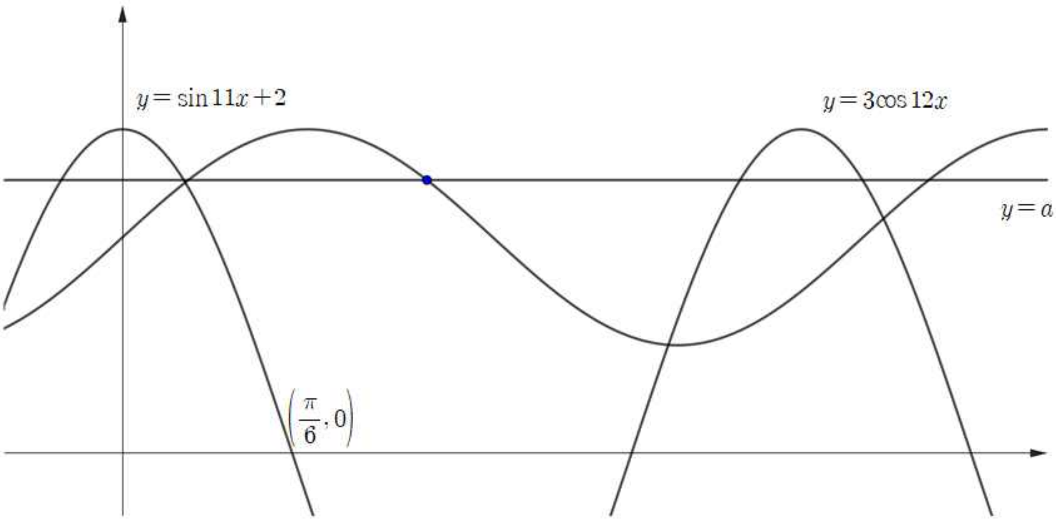
$k=12$



파란색 점이 두 함수의 대칭성 때문에 조건을 만족시킬 수 없음을 보여준다.
$f(x)$의 대칭축이 $g(x)$의 대칭축이어야 조건을 만족함을 알 수 있고, 대칭성이 중요한 성질임을 알 수 있다. (이런 성질이 안 보이면 보일 때까지 k에 대입해야 한다.) 이제 대칭축에 집중하여 상황을 해석하자.

$k>12$일 때는 $f(x)$의 주기가 지금보다 더 짧아지므로 두 함수의 대칭축이 겹치지 않으므로 파란색 점이 없어질 수 없고, 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

$k=11$



이번에도 파란색 점의 존재 때문에 조건을 만족시키지 못하고, 역시나 대칭성 때문임을 다시 한 번 알 수 있다.
선대칭 축이 중요한 성질이므로 함수를 다시 해석해보자.

$g(x)$: $x=\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\cdots$에 대해 선대칭인 함수, $f(x)$: $x=\frac{\pi}{2k}$에 대해 선대칭인 함수

따라서 $x=\frac{\pi}{2k}$는 $x=\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\cdots$중 하나가 돼야 조건을 만족시킨다.

$\therefore k=1, 2, 3, 6$

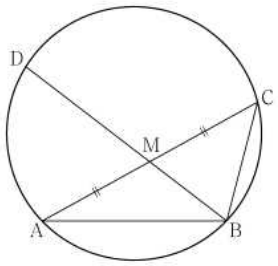
정답 2번

comment
이렇게 대부분 킬러문제들은 그 자리에서 관찰하고, 해석하여 필요한 성질을 찾아내야 한다.

2023학년도 6월

10번

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$　③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$　⑤ $\sqrt{10}$

삼각형 ABC $\rightarrow$ 코사인법칙 $\rightarrow$ $4=9+\overline{AC}^2-\frac{21}{4}\overline{AC}$ $\rightarrow$ $\overline{AC}=4$ ($\because \overline{AC}>3$) $\rightarrow$ $\overline{AM}=\overline{CM}=2$

삼각형 ABM $\rightarrow$ 코사인법칙 $\rightarrow$ $\overline{MB}=\sqrt{9+4-\frac{21}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

도형을 관찰하면 $\angle BMA=\angle CMD$임을 알 수 있고, 이 각을 좋은 성질이 나오게 해석하려면 삼각형을 떠올릴 수 있다.

$\angle CAB=\angle CDB$, $\angle ACD=\angle ABD$ ($\because$ 원주각 성질) $\rightarrow$ 삼각형 ABM : 삼각형 CDM과 닮음 $\rightarrow$ $\overline{MB}:\overline{CM}=\overline{AM}:\overline{MD}$ $\rightarrow$ $\frac{\sqrt{10}}{2}:2=2:\overline{MD}$ $\rightarrow$ $\overline{MD}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

정답 3번

수열

실전개념

수열파트는 실전개념이 의미가 없다. 그때마다 문제를 관찰하여 핵심적인 성질을 찾아 해석해야 한다. 바로 기출문제 풀이에 들어가자.

기출문제 풀이

문제에 들어가기 전 해설에서 자주 쓰이는 기호를 약속하겠다.

2. A : B (대상 : 해석한 의미)
예를 들어보면 $f(x)$: 미분가능한 함수, 사차함수 , 곡선
이 말은 $f(x)$를 미분가능한 함수, 사차함수 곡선으로 해석한다는 문장이다.
$g(x)=x^2+2x+1$일 때 $g(x):(x+1)^2$
함수 $g(x)$를 $(x+1)^2$으로 해석했단 의미이다. 등호와는 약간 뉘앙스가 다르다.
이현우 : 수학고수
이 말은 이현우를 수학고수로 해석했단 뜻이다.
(참고로 상황, 성질도 해석이 가능하다. 하지만 반드시 개체의 해석이 선행돼야 하므로 개체해석이 가장 중요하다.)

2. 때문에 따라서 ∵ ∴
이 기호는 실제 수학적인 기호로 때문에 = ∵ , 따라서 = ∴ 라고 쓰인다.
ex) 현우는 수학을 잘한다. (∵ 현우는 천재다)
나는 돈이 많다. ∴ 매일 치킨을 먹을 수 있다.
보통 ∵는 굳이 근거를 언급하기 위해 사용하므로 괄호처리를 한다.

3. 화살표→
이 기호는 원인과 결과의 방향성을 나타내는 의미로 사용하겠다. ~이므로 라는 의미로 생각하면 된다.
(충분조건(⇒)과 비슷하게 느낌으로 쓸 것이다.)
ex) $f(x)$: 미분가능한 함수 → 연속함수
삼각형ABC : 직각삼각형 → 피타고라스 정리

4. *
글에는 글쓴이가 추가적으로 하고 싶은 말을 곳곳에 comment로 써놓는다. 때로는 문장들 사이에서도 그런 말을 하고 싶기에 *를 사용하여 comment를 쓸 것이다.

기출문제 풀이

문제풀이 공부 방법 (굳이 기출문제가 아니어도 된다.)

3. 문제에 등장하는 개체들의 특이점이 있나 관찰한 후, 의식적으로 매 순간 좋은 성질이 나오게 해석하려고 고민하자. 또한 풀이가 난해하면 다르게 해석하자. 이상한 풀이를 써가며 이게 뭐지? 이러고 있으면 안 된다.
  (개체를 보면 의식적으로 "좋은 성질 나오게 개체 해석"!!)

4. 본인의 해석이 왜 좋은 해석, 나쁜 해석인지 고민하자. 틀린 해석은 없다. 하지만 우린 좋은 해석을 해야 하므로, 어느 정도의 풀이가 효율적이고 비효율적인지 느낄 수 있고, 좋은 해석 나쁜 해석을 판단할 수 있어야 한다.

이 두 가지를 계속해서 공부하면 처음엔 많이 느리지만, 점점 데이터들이 쌓여 나중엔 대부분 문제들의 해석 방향을 암산 수준으로 판단할 것이다.

Q. 해설은 언제 봐야 하나요?
A. 가장 좋은 방법은 어떻게 해석해야 할지 떠오를 때까지 해설을 안 보는 것이다. 시간이 날 때마다 '그 문제는 어떻게 해석해야 하지?' 생각하며 고민하자.
그게 어렵다면 '이젠 어떠한 해석도 떠오르지 않는다.' 정도까지는 고민하고, 해설을 보도록 하자.

1등급을 가르는 문제에는 ★표시를 하겠다. 겁먹으라고 표시하는 게 아니고, 고민을 좀 해야 할 수도 있다는 의도로 하는 것이다. 절대로 겁먹지 말자. 해석만 잘하면 교과서 문제와 다를 게 없다.

시험장에는 아무도 도와주지 않는다. 스스로 관찰하고 생각할 줄 알아야 한다.

2019학년도 수능
(나) 29번 ★

29. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$
>
> (나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$
>
> (다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

조건 (가), (나), (다) : $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 섞여 있는 식.

문제에서 $\{a_n\}$에 대한 정보, $\{b_n\}$에 대한 정보를 줬기 때문에 식을 조작하여 $\{a_n\}$끼리, $\{b_n\}$끼리 식을 해석하는 게 지금 상황보단 나아 보인다. (식 조작 없이 그대로 해석하면 미지수가 너무 많아 안 좋은 해석이다.)

(나)-(가) : $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$, (다)-(나) : $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|-a_n)=14$

$\{b_n\}$: 짝수 번째 항은 음수, 홀수 번째 항은 양수인 수열 (절대값 때문에 부호에 집중하는 것이다.)

따라서 $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40 \rightarrow b_2+b_4=-20$

$\{b_n\}$의 첫 항과 공비에 대한 정보를 알고 있으니 그에 대응되게 해석하자

$b_2+b_4=-20$: $b_1(r+r^3)=-20 \rightarrow b_1=2, r=-2$또는 $b_1=10, r=-1$

$\{b_n\}$성질을 사용했기 때문에 $\{a_n\}$성질을 사용하여 모순을 찾아야 한다.

따라서 (가)를 이용하자.

$b_1=10, r=-1$이면 $\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{10(1-(-1)^5)}{1+1}=10$이므로 $\sum_{n=1}^{5}a_n=17$이다.

$\sum_{n=1}^{5}a_n=17 \rightarrow a_3=\frac{17}{5}$ ($\because$ 등차중항)

$\{a_n\}$: 모든 항이 정수인 수열

따라서 모순이고, $b_1=10, r=-1$는 아님을 알 수 있다.

$b_1=2, r=-2$이므로 $\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{2(1-(-2)^5)}{1+2}=22$이므로 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5$, $a_3=1$이다. ($\because$ 등차중항)

$\{b_n\}$은 결정났고, $\{a_n\}$을 알아야 하기 때문에 $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|-a_n)=14$를 사용하자.

$\{a_n\}$: $a_3=1$, 첫째항은 자연수, 공차는 음의 정수인 수열

따라서 $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|-a_n)=2(-a_4-a_5)=14 \rightarrow$ 공차$=-3$

$a_n=-3n+10$, $b_n=2(-2)^{n-1} \rightarrow a_7+b_7=117$

정답 117

2020학년도 수능
(나) 15번

15. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

주어진 정보를 이용하여 $S_n = 2n(26-n)$임을 알 수 있다.

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k : \sum_{k=1}^{m+4} S_k - \sum_{k=1}^{m-1} S_k$ 이렇게 해석했다면 계산이 너무 많다고 느끼고 다른 해석을 찾아야 한다.

a_n : 첫째항이 50, 공차가 -4인 등차수열 : $a_n = -4n + 54 \rightarrow S_n = 2n(26-n)$

$S_n = 2n(26-n)$: 정의역이 자연수, $n = 13$에서 최댓값을 갖는 이차함수

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k : S_m + S_{m+1} + S_{m+2} + S_{m+3} + S_{m+4}$ 즉 연속된 5개의 항의 합

따라서 $m+2=13$일 때 구하는 값이 최대가 된다.

답 4번

comment

해석만 잘 하면 풀이의 대부분이 끝난다.

2018학년도 6월 (나) 29번 ★

29. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\{a_n\}$: 공차가 0이 아닌 등차수열

$\{b_n\}$: $\{a_n\}$과 관련 있는 수열 (식만 보면 해석하기 난해하다. 이 정도로만 해석하고 넘어가자.)

우리는 그나마 $\{a_n\}$을 $\{b_n\}$보다 더 알고 있으니, $\{b_n\}$을 $\{a_n\}$으로 해석해야 한다.

$\{b_n\}$을 해석하기 위해 대입해보며 $\{a_n\}$에 관해 표현하자.

$b_2 = b_1 + a_2 = a_1 + a_2$

$b_3 = b_2 - a_3 = a_1 + a_2 - a_3$

$b_4 = b_3 + a_4 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4$

$b_5 = b_4 + a_5 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5$

$b_6 = b_5 - a_6 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6$

$b_7 = b_6 + a_7 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7$

$b_8 = b_7 + a_8 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8$

$b_9 = b_8 - a_9 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 - a_9$

$b_{10} = b_9 + a_{10} = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 - a_9 + a_{10}$

$b_{10} = a_{10}$이므로 $a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} = a_{10}$ $\rightarrow$ $4a_1 + 15d = a_1 + 9d$

따라서 $a_1 = -2d$이고, $a_n = nd - 3d$이다.

$b_8 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 = 6d$

$b_{10} = a_{10} = 7d$

따라서 $\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{6d}{7d} = \dfrac{6}{7}$

정답 13

comment

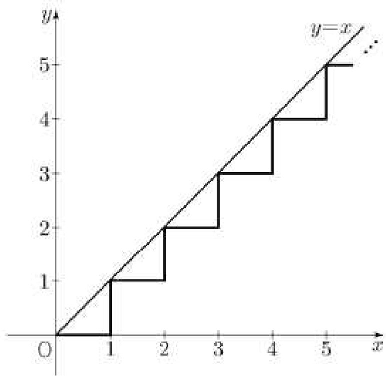
아무 생각 없이 나열하면 안 된다. 나열하는 이유를 반드시 알아야지 쓸데없는 나열을 하지 않고, 필요할 때만 나열을 할 수 있다.

2019학년도 9월
(나) 29번 ★

29. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (ⅰ) A_0은 원점이다.
>
> (ⅱ) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\dfrac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{4}{25},\ 0\right)$, $\left(1,\ \dfrac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오. [4점]



(ⅱ) : 점 A_{n-1}기준 점 A_n의 상대적 위치

우리는 정답을 도출하기 위해 A_n의 위치를 알아야 한다. (ⅱ)를 보면 점 A_{n-1}, A_n이 둘 다 움직이므로 A_n의 위치를 알아내려면 A_{n-1}의 위치를 알아야 하고, 같은 과정을 반복하여 원점까지 계산해야 한다. (나쁜 성질임을 스스로 인지해야 한다.) 여기서 핵심은 두 점이 동점이기 때문에 계산이 많은 것이다. 따라서 A_0기준으로 A_n의 위치를 알아내자. 하나는 고정됐으니 그나마 나은 상황이다. (좋은 성질을 위한 자연스러운 사고과정이다.)

원점으로부터 A_n의 이동 거리는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=\frac{n^2}{25}$이다. (식의 상태만 봐도 좋은 성질이다.)

점 A_n이 $y=x$위에 존재할 때가 궁금하므로 그때의 상황을 좋은 성질인

이동 거리 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=\frac{n^2}{25}$으로 해석해야 한다.

$(1,1), (2,2), (3,3)\cdots$일 때의 대응되는 이동 거리는 $\dfrac{50}{25}, \dfrac{100}{25}, \dfrac{150}{25}, \cdots \dfrac{400}{25}\cdots$이고,

분자가 자연수의 제곱 꼴일 때만 만족하므로 두 번째인 상황은 이동 거리가 $\dfrac{400}{25}$일 때이다.

이때의 x좌표 a의 값은 $\dfrac{200}{25}=8$이다.

정답 8

comment
이처럼 킬러문제는 스스로 관찰하여 핵심 성질을 찾고, 그 성질을 사용하기 위한 해석력이 필요하다.
저런 사소한 성질을 외우려고 하는 것 보다, 스스로 관찰하여 찾는 능력을 연습해서 키워야 한다. 이게 피지컬이다.

2020학년도 수능
(나) 21번 ★

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$
(나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

(가), (나) : $\{a_n\}$의 성질, 첫째항을 알면 모든 항을 알 수 있다.

$\sum_{n=1}^{63} a_n$: 첫째항부터 63번째 항까지의 합 → 다 구하긴 계산이 너무 많다. 다르게 해석하자.

수열 $\{a_n\}$은 (가), (나)의 성질을 갖고 있음을 알고 있으므로 저 성질을 이용하여 해석하자.

$\sum_{n=1}^{63} a_n$: $a_1 + \sum_{n=1}^{31} (a_{2n} + a_{2n+1}) = a_1 + 3\sum_{n=1}^{31} a_n$: 첫째항부터 31번째 항의 합.

위와 같은 사고로 $\sum_{n=1}^{31} a_n : a_1 + \sum_{n=1}^{15} (a_{2n} + a_{2n+1}) = a_1 + 3\sum_{n=1}^{15} a_n$으로 해석할 수 있다.

이 과정을 반복하면

$\sum_{n=1}^{63} a_n$: $a_1 + 3(a_1 + 3(a_1 + 3(a_1 + 3(a_1 + 3a_1))))$ 이므로 첫째항 구하는 문제로 해석됐다.

$a_{20} = 1 \ \rightarrow\ a_{10} = 2 \ \rightarrow\ a_5 = 3 \ \rightarrow\ a_2 = 1 \ \rightarrow\ a_1 = 2$

따라서 $\sum_{n=1}^{63} a_n = 728$

정답 4번

2021학년도 수능
(가) 21번 ★

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

(가), (나) : 연속된 두 항 a_{2n}, a_{2n+1}의 합은 -1 라고 할 수 있다. 하지만 구하는 값, 조건을 보면 연속된 두 항을 쓸 일이 없어 보인다. (절대 잘못한 게 아니다. 해석했지만 안 쓰면 그만인 것이다.)

(가), (나) : 수열 $\{a_n\}$과 관련된 식. 이 정도로 해석하고 넘어가자.

$a_8 - a_{15} = 63$을 이용하기 위해 $a_8 - a_{15}$를 의미 있게 해석하자.

$a_8 = a_2a_4 + 1$, $a_{15} = a_2a_7 - 2$ $\rightarrow$ $(a_2a_4+1)-(a_2a_7-2)=63$: $a_2(a_4 - a_7) = 60$

$a_4 = a_2a_2 + 1$, $a_7 = a_2a_3 - 2$ $\rightarrow$ $a_2(a_2(a_2 - a_3)+3) = 60$

$a_3 = a_2a_1 - 2$ $\rightarrow$ $a_2(a_2(a_2 - a_2a_1 + 2)+3) = 60$ 여기서 a_1에 대해 정리하기엔 계산이 많다. 따라서 a_2에 대해 해석하자. 부등식 조건 또한 a_2에 대해 해석하는 게 나쁘지 않아 보인다.

$a_2 = a_2a_1 + 1$이므로 $a_2 - a_2a_1 + 2 = 3$ $\rightarrow$ $a_2(a_2(a_2 - a_2a_1 + 2)+3) = 60$: $a_2(a_2+1) - 20 = 0$

$\rightarrow$ $a_2 = 4, -5$이고, 부등식 조건에 의해 $a_2 = 4$

$a_2 = 4$ $\rightarrow$ $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $a_4 = 17$

$a_4 = 17$ $\rightarrow$ $a_8 = 69$

따라서 $\dfrac{a_8}{a_1} = \dfrac{69}{\frac{3}{4}} = 92$

정답 2번

comment

부등식 조건이 a_2에 대해 정리하기 어려웠다면, 준 식을 a_1에 대해 정리했을 수도 있다.

다시 말하지만, 개체의 성질에 따라 풀이가 정해지는 것이다.

2022학년도 9월 15번 ★

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

주어진 수열 식은 어떤 k번째 항과 $k+1$번째 항의 관계임을 알 수 있다. 따라서 하나의 항을 알면 그 앞, 뒤의 항을 알 수 있다.

$|a_1| \leq 1 \ \rightarrow \ -1 \leq a_1 \leq 1 \ \rightarrow \begin{cases} -1 < a_2 \leq 0 \\ -1 \leq a_2 \leq 1 \\ \ \ 0 \leq a_2 < 1 \end{cases}$ 이다.

이 과정으로 a_5, a_6까지 구하기엔 너무 복잡해 보인다. 따라서 해석 방향을 바꾸자.

조건에서 $a_6 = -a_5$임을 알고 있으므로 $\begin{cases} -1 \leq a_5 < \frac{1}{2} \ \rightarrow \ a_6 = 2 \ \rightarrow \ a_5 = -2 \\ -\frac{1}{2} \leq a_5 \leq \frac{1}{2} \ \rightarrow \ a_6 = 0 \ \rightarrow \ a_5 = 0 \\ \frac{1}{2} < a_5 \leq 1 \ \rightarrow \ a_6 = -2 \ \rightarrow \ a_5 = 2 \end{cases}$

$a_5 = 2, -2$ 일 땐 범위에 모순이므로 $a_5 = a_6 = 0$이다. 이제 $a_5 = 0$을 이용하여 a_4를 알 수 있고 반복하면 a_1까지 알 수 있음을 안다. a_4부터 순차적으로 구하며 수열 $\{a_n\}$의 성질을 찾자.

위와 같은 방법으로 $a_5 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_4 = -1 \\ a_4 = 0 \\ a_4 = 1 \end{cases}$ 임을 알 수 있고, $a_4 = a_5 = 0$이므로 구조가 반복됨을 알 수 있다.

따라서 $a_5 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_4 = -1 \\ a_4 = 0 \\ a_4 = 1 \end{cases} a_4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_3 = -1 \\ a_3 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases} a_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ a_2 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases} a_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_1 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ 임은 계산없이 알 수 있다.

또한 $a_4 = -1, 1$를 통해 a_3을 구하면 이 또한 반복될 것을 알 수 있다.
($\because \ a_3, a_2 = -1, 1$이 존재)
그리고 $a_4 = -1$ 이후로는 계속해서 음수가 나올 것이므로 $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = -1$일 때는 상관 쓸 필요가 없다.($\because -1 \leq a_{n+1} < \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} -1 < a_n < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq a_n \leq 0 \end{cases}$ ....반복)

이제 $a_4 = 1$에서 a_1까지 계산을 통해 구하기만 하면 된다.

$a_4 = 1 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{8} \\ a_1 = \frac{7}{8} \end{cases} \\ a_2 = \frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{8} \\ a_1 = \frac{5}{8} \end{cases} \end{cases}$

수열의 반복성을 잘 생각해보면 $a_3 = 1$, $a_2 = 1$ 일 때도 왼쪽 관계도에 다 나타나 있음을 알 수 있다.

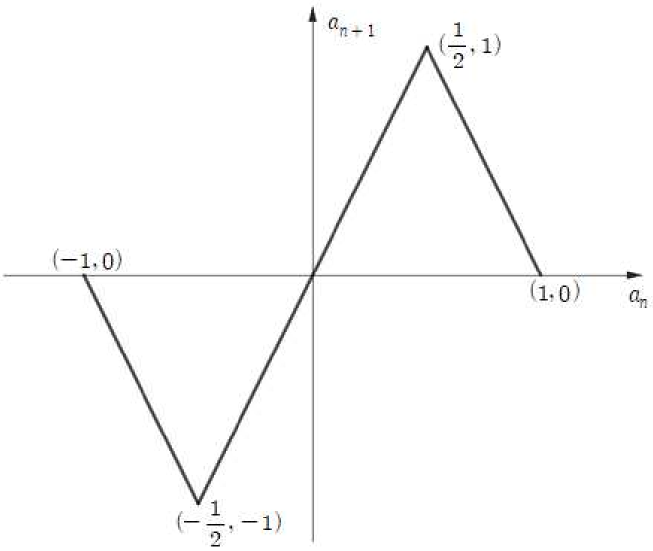
따라서 양수a_1의 합은 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{2}$

정답 1번

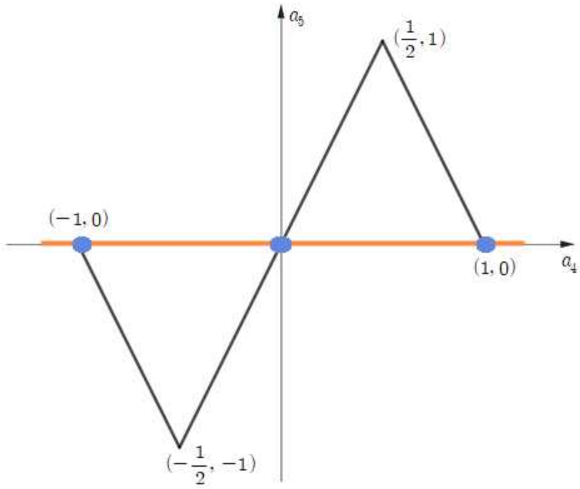
comment
그냥 계산만 벅벅 하면 안된다. 계산을 하면서도 어떤 성질이 있을지 의심해야 한다. 매 순간 관찰하고 해석해야 한다.

sol2) 그래프로 해석

위에서와 같이 주어진 수열의 관계식은 어떤 k번째 항과 $k+1$번째 항의 관계이다. 이때 k번째 항을 넣으면 $k+1$번째 항이 나오는 것을 생각하면 함수처럼 해석할 수 있고, 따라서 그래프로 해석할 수 있다. (이해를 돕기 위해 선으로 표시했다.)

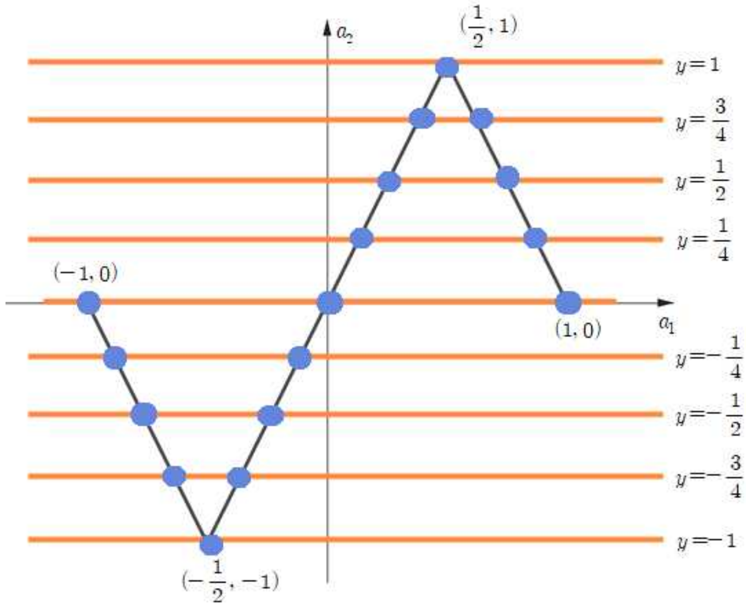


$\{a_n\}$: $(a_n > 0)$ $a_n = \frac{1}{2}$선대칭, $(a_n < 0)$ $a_n = -\frac{1}{2}$선대칭인 그래프
$a_5 = 0$를 이용하여 a_4를 구해보자.



$\therefore a_4 = -1, 0, 1$

같은 과정으로 a_1까지 구해보자



$(a_n > 0)$ $a_n = \dfrac{1}{2}$선대칭이므로 양수a_1의 합은 1+1+1+1+$\dfrac{1}{2}$=$\dfrac{9}{2}$임을 알 수 있다.

comment

그래프 해석 풀이에서 마지막에서 그냥 a_1을 다 구해도 상관없다. 몇 개 안 되기 때문에 일일이 다 구하는 계산이 귀찮다고 느껴지지 않는다면 그냥 다 구하면 된다. 만약 문제에서 조건 $a_5 + a_6 = 0$, $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$ 대신 $a_{20} + a_{21} = 0$, $\sum_{k=1}^{20} a_k > 0$이라 생각해 보자. 이 경우에는 구해야 하는 a_1을 일일이 구하긴 싫다고 느낀 후 다른 해석을 하여 대칭성을 찾는 사고과정이 있어야 한다.

2023학년도 수능
15번 ★

15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7=40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3 의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3 의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

조건을 보면 어떤 항이 3의 배수냐 아니냐에 따라 전, 후항이 어느정도 결정날 것 같다. 나열하며 성질을 더 찾자.

$$\begin{tikzcd}
a_9=a_8+a_7 & & & a_6=120 \\
& \begin{array}{l} a_8=a_7+a_6 \\ \quad =40+a_6 \end{array} \arrow[ul] \arrow[dl] & a_7=40 \arrow[l] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
a_9=\dfrac{a_8}{3} & & & a_6+a_5=40
\end{tikzcd}$$

a_6에 따라 a_8이 변하고 a_9도 변한다. a_6에 따라 케이스를 나누자.

(1) $a_6=120$

$a_6=120 \to a_8=160 \to a_9=200 \to a_{10}=360 \to a_{11}=120=a_6 \to \cdots$

a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 : $a_6=120$이 되는 적당한 3의 배수

따라서 모든 항이 자연수이므로 $a_6=120$인 경우는 가능하다.

(2) $a_6+a_5=40$

a_6의 성질을 파악하자. a_6은 3의 배수면 안 된다. ($\because$ 3의 배수면 $a_6=120$) 또 다른 성질을 알기 위해선 a_5가 3의 배수인지 아닌지 경우를 나눠야 한다. 같은 과정으로 a_4, a_3, a_2, a_3이 3의 배수인지 아닌지 경우를 나눠야 하고, 다뤄야 하는 경우가 너무 많으므로 다르게 해석하자.

위 과정을 보면 "a_6은 3의 배수면 안 된다."라는 안 좋은 성질을 사용했기 때문에 풀이가 막혔다. 따라서 다른 성질을 이용해야 한다고 생각 후, $a_6 : 3p+1, 3q+2$꼴이라고 해석할 수 있다. (시행착오 없이 바로 나머지를 기준으로 경우를 나눠도 좋다.) (배수와 관련된 성질을 생각해보면 충분히 떠올릴 수 있다.)

(2)-1 $a_6=3p+1$꼴 (p는 음이 아닌 정수)

항의 값들이 3의 배수인지 아닌지 해석하며 써보자.

$a_6=3p+1, a_7=40 \to a_5=39-3p : 3$의 배수 $\to a_6=13-p$ 따라서 $3p+1=13-p \to$ $p=3$이므로 계산하면 $a_9=90$

(2)-1 $a_6 = 3q+2$꼴 (q는 음이 아닌 정수)

$a_6 = 3q+2, a_7 = 40 \rightarrow a_5 = 38-3q : 3$의 배수 $\times \rightarrow a_4 = 6q-36 : 3$의 배수 $\rightarrow$
$a_5 = 2q-12$ 따라서 $38-3q = 2q-12 \rightarrow q = 10$이므로 계산하면 $a_9 = 24$

모든 조건을 만족시키는 a_9는 200, 90, 24이다.
따라서 $M+m = 224$

정답 5번

comment
케이스 나누는 기준과 이유 또한 이후에 좋은 성질이 나오냐 마냐에 따라 정해진다. 케이스를 나누는 기준과 이유를 몰랐다면 마지막 과정에서 당황했을 것이다.

comment
글쓴이는 특별한 일이 없는 한 매년 수능을 응시한다. 23수능 현장에서 저 문제를 봤을 때 실제로 저런 시행착오가 있었다. 하지만 이때까지 본 해설들은 시행착오에 대한 설명 없이 단번에 나머지를 기준으로 경우를 나누길래 많이 아쉬웠다.

해석력이 뭔지 깨닫고, 어떤 근거로 해석하는지 알았다면, 수험생들이 느끼는 발상적인 부분이 거의 대부분 해결될 것입니다. 케이스를 어떻게 나누는지, 함수를 어떻게 잡을지, 도형을 왜 연장하고, 왜 분해하는지, 식조작을 왜 하는지 등등 본인이 스스로 하게 될 것입니다.

다 읽어주셔서 감사합니다.

게시글에 있는 투표 한 번씩 부탁드립니다.