제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$2^2 \times 2^{-2} = 1$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 9$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

$f'(x) = 3x^2$

$f'(2) = 12$

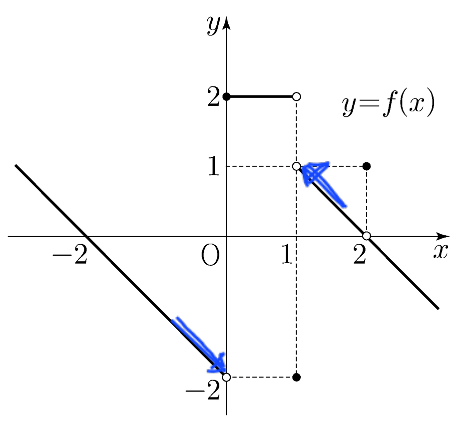
3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$ 일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{2}{9}$　④ $-\frac{1}{9}$　⑤ 0

$\left.\begin{matrix} \sin\theta > 0 \\ \cos\theta < 0 \\ \tan\theta < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{2}{3}, \ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{5}{9}$

$\therefore \frac{5}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

$-2 + 1 = -1$

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$a = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow r = 2$

$\therefore a_6 + a_7 = 8 + 16 = 24$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$x = -1$ 에서 $1 = -1 + a$ OR $1 - a$

$a = 2$ OR $\cancel{0}$

$x = 3$ 에서 $3 = 3b - 2$ OR $-3b + 2$

$b = \frac{5}{3}$ OR $\cancel{-\frac{1}{3}}$

$\therefore a + b = \frac{11}{3}$

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

$a = \frac{3}{4}\pi \quad (\frac{3}{4}\pi, 1)$

$b = \frac{1}{4}\pi \quad (\frac{1}{4}\pi, -1)$

기울기 $\frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi} = \frac{4}{\pi}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
>
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$1<x<5$ 에서 $f'(x)=5$라 하면 ...

$f(5) = 3+20 = 23$

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6, \quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x \ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \ge g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^3-x+6 \ge x^2+a$

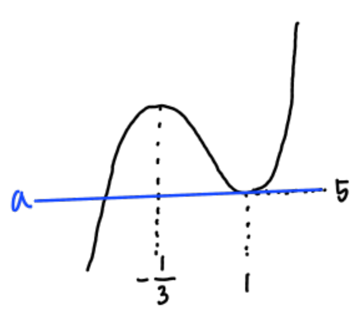
$\Leftrightarrow x^3-x^2-x+6 \ge a$

$3x^2-2x-1$

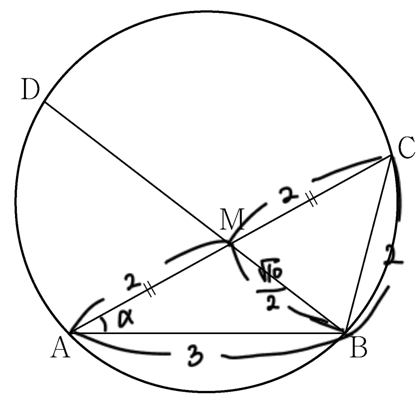
3   1

1   -1

$(3x+1)(x-1)$



10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

$\angle BAC = \alpha$라 하면,

By Cosine Law $\quad 4 = \overline{AC}^2 + 9 - 2\cdot(3)\cdot(\overline{AC})\cdot\left(\frac{7}{8}\right)$

$\Rightarrow \overline{AC} = 4, \ \overline{AM} = \overline{MC} = 2$

$\overline{MB}^2 = 4+9-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{7}{8}$

$\Rightarrow \overline{MB} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\overline{DM}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2} = 2\cdot2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{DM} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

$x_1(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow x_1(4) = 0$

$x_2(t) = \frac{3}{2}t^2 \Rightarrow x_2(t) = 24$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

> (가) $a_5 \times a_7 < 0$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$　② 11　③ $\frac{23}{2}$　④ 12　⑤ $\frac{25}{2}$

(가) $a_5<0,\ a_7>0$

(나) $a_7 + \cancel{a_8} + a_9 + \cancel{a_{10}} + a_{11} + \cancel{a_{12}} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6| + \cancel{a_8} + \cancel{a_{10}} + \cancel{a_{12}}$

i) $a_6<0$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 - a_6$

$6a + 33d = 6 \Rightarrow 6a = -93$

$\therefore a = -\frac{31}{2} \rightsquigarrow a_6 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_{10} = \frac{23}{2}$

ii) $a_6 \geq 0$

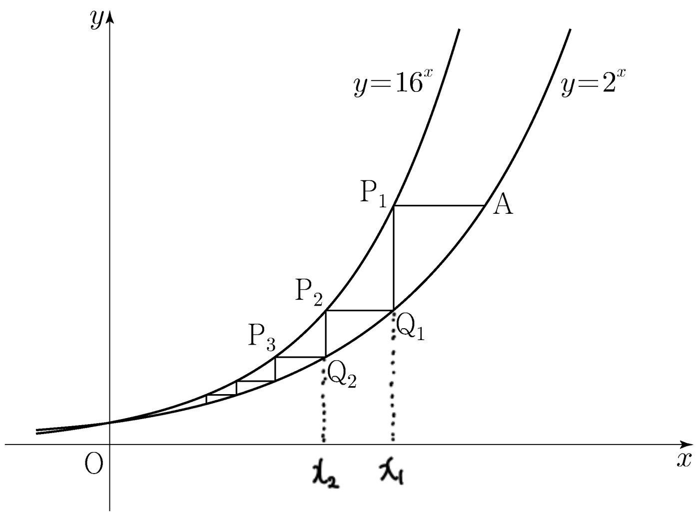
$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + a_6$

$4a + 23d = 6 \Rightarrow 4a = -63$

$\therefore a = -\frac{63}{4} \rightsquigarrow a_6 = -\frac{3}{4}$ (모순)

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다.
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



$\mathrm{A}(64, 2^{64})$

$\mathrm{P}_1(16, 2^{64})$ $\mathrm{Q}_1(16, 2^{16})$

$\mathrm{P}_2(4, 2^{16})$ $\mathrm{Q}_2(4, 2^{4})$

⋮

$\mathrm{P}_5(\frac{1}{16}, 2^{\frac{1}{4}})$ $\mathrm{Q}_5(\frac{1}{16}, 2^{\frac{1}{16}}) \Rightarrow x_5 = \frac{1}{16}$

$\mathrm{P}_6(\frac{1}{64}, 2^{\frac{1}{16}})$ $\mathrm{Q}_6(\frac{1}{64}, 2^{\frac{1}{64}}) \Rightarrow x_6 = \frac{1}{64}$

$\therefore 16 \le k < 64 \Rightarrow$ 48개

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x\ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

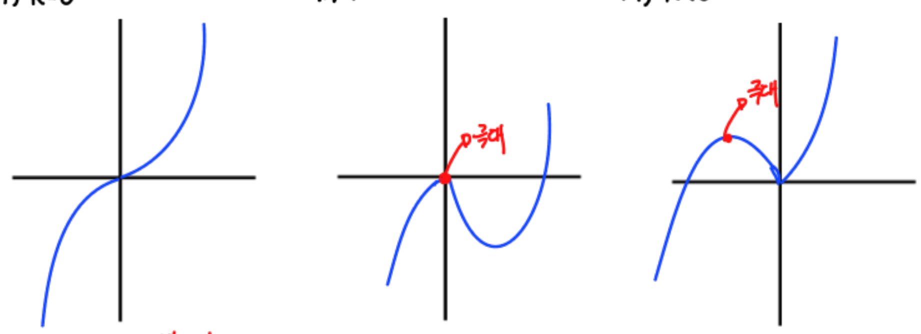
ㄱ $g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x\ge 0) \end{cases} \Rightarrow -f(0)=f(0) \rightsquigarrow f(0)=0$

• $g(x)$ 삼차 ⇒ 미분가능!! ⇝ $g(x)=x^2(x-k)$

~~ㄴ.~~ $f(x)=\begin{cases} -g'(x) & (x<0) & = -3x^2+2kx \\ g'(x) & (x\ge 0) & = 3x^2-2kx \end{cases}$

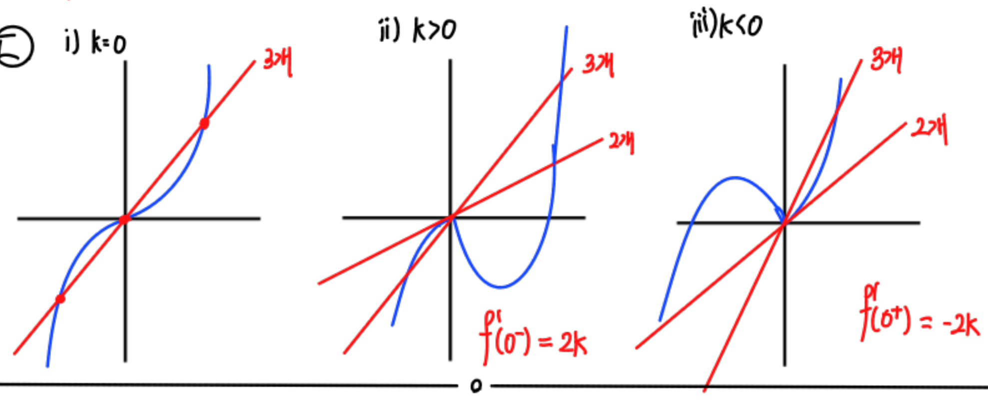
이차함수

i) $k=0$ ii) $k>0$ iii) $k<0$



극대X 반례

ㄷ i) $k=0$ ii) $k>0$ iii) $k<0$



$2<f(1)=g'(1)=3-2k<4$ ⇒ $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix} f'(0^-)=2k<1 \\ f'(0^+)=-2k<1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$a_1 = 0$

$a_2 = \frac{1}{k+1}$

$a_3 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$

$a_4 = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k}$

$a_5 = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$

$\vdots$

$a_{22} = \frac{11}{k+1} - \frac{10}{k} = 0$

i) $a_4 = 0 \rightsquigarrow k=1$

주기 : 3 $\rightsquigarrow a_{22} = 0$

ii) $a_6 = 0 \rightsquigarrow k=2$

주기 : 5 $\rightsquigarrow a_{22} \ne 0$

iii) $a_8 = 0 \rightsquigarrow k=3$

주기 : 6 $\rightsquigarrow a_{22} = 0$

$\vdots$

$a_{22} = 0 \rightsquigarrow k = 10$

$\therefore 1+3+10 = 14$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 6

$x^2 - 4 = 32$

$\therefore x = 6$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 + 6x^2$이고 $f(0) = -1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점] 15

$f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 1$

$f(-2) = 32 - 16 - 1 = 15$

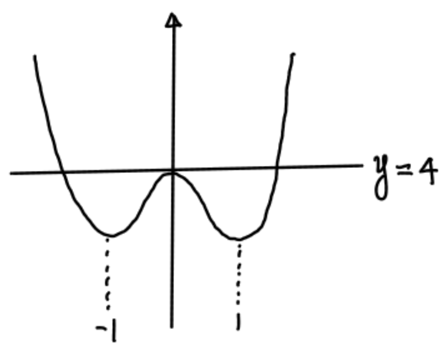
18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점] 3

$2\cdot(10)\cdot(11)+10a=250$

$10a=30$

$\therefore a=3$

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다.
함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 상수이다.) [3점] 2



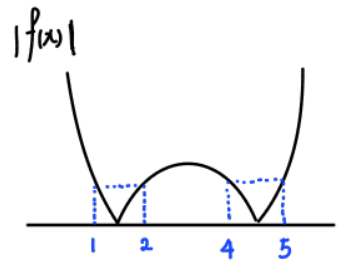
$f(0)=b=4$

$f'(x)=4x^3+2ax$

$f'(1)=4+2a=0$

$\Rightarrow a+b=-2+4=2$

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다.
$f(0)$의 값을 구하시오. [4점] 13



★ $g'(1)=g'(4)=0$

$f(x)=2x^2+ax+b$

$\Rightarrow f(1)=-f(2)$, $-f(4)=f(5)$

① $2+a+b=-8-2a-b$

② $-32-4a-b=50+5a+b$

$\Rightarrow a=-12,\ b=13$

$f(x)=2x^2-12x+13 \Rightarrow \therefore f(0)=13$

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점] 426

$\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)$

$\Rightarrow \frac{3}{4n+16} = 2^{-3}, 2^{-6} \ldots$

n	$\frac{3}{4n+16}$
2	2^{-3}
44	2^{-6}
380	2^{-9}

$\therefore 2+44+380 = 426$

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

19

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$= (4+a)f(4-b) = ?$

> $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

연속 $\Rightarrow 3f(0) = af(-b)$

$\lim_{x\to -3}\frac{|x+3||f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$

$f(-3)\neq 0$ 이면, t의 값에 관계 없이 발산 $\therefore f(-3)=0$

$f(x) = (x+3)(x-k)$ 대입

$\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{|x+3|}|x+3||x-k|}{\cancel{(x+3)^2}\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)} = \lim_{x\to -3}\frac{|x-k|}{2|g(t)|}$

$\Downarrow$

$t=-3, 6$에서 값 존재 X

$g(-3)=g(6)=0$

$g(6) = (6+a)f(6-b) = 0 \Rightarrow f(6-b)=0 \Rightarrow 9-b=0$ OR $6-b-k=0$

i) $b=9 \rightarrow g(x)=\begin{cases}(x+3)^2(x-k) & (x<0) \Rightarrow \text{근이 } -3\text{만}\\ (x+a)(x-6)(x-9-k) & (x\geq 0) \Rightarrow \text{근이 } 6\text{만}\end{cases} \Rightarrow k=-3$

$3f(0) = af(-9)$ 이므로 대입 $\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

$\therefore g(4) = \frac{19}{4}\cdot f(-5) = 19$

ii) $b=6-k \Rightarrow g(x)=\begin{cases}(x+3)^2(x-k) & (x<0) \Rightarrow \text{근이 } -3\text{만}\\ (x+a)(x-3+k)(x-6) & (x\geq 0) \Rightarrow \text{근이 } 6\text{만}\end{cases} \Rightarrow b=9,\ k=3,\ a=\frac{3}{4}$ i)과 같음

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

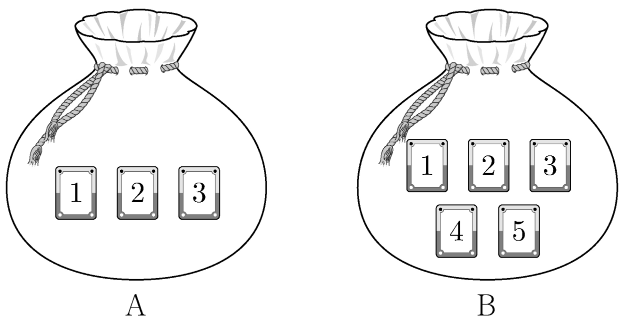
23. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

24. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



$$(A,B) = \left.\begin{matrix}(1,2) \\ (2,1),\ (2,3) \\ (3,2),\ (3,4)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{5}{3\times5} = \frac{1}{3}$$

25. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고, 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

여사건

i) 이동 1번

$\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{8}{81}$

ii) 이동 0번

$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{4!}{4!} = \frac{1}{81}$

$\therefore 1 - \frac{9}{81} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}$

26. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$ 의 전개식에서 x^5 의 계수가 12일 때, x^6 의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

x^5의 계수 $\Rightarrow {}_4C_1 \cdot {}_nC_1 = 12$ $\therefore n=3$

x^6의 계수 $\Rightarrow {}_4C_3 \cdot {}_3C_0 + {}_4C_0 \cdot {}_3C_2 = 7$

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

(가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
(나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

_ _ _ _ _ _
X a, ?, ?, ? X
Y Y

$\Rightarrow 2\cdot 2\cdot {}_4C_1\cdot {}_3\Pi_3 = 432$

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

i) 천의 자리 3

3 5 _ _ $\Rightarrow 3\cdot 2=6$

ii) 천의 자리 4

4 _ _ _ $\Rightarrow 4\cdot 3\cdot 2=24$

iii) 천의 자리 5

5 _ _ _ $\Rightarrow 4\cdot 3\cdot 2=24$

iv) 3500 이하 5의 배수

_ _ _ 5
1
2
3
$\Rightarrow 3\cdot 3\cdot 2=18$

$\therefore \frac{6+24+24+18}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\frac{3}{5}$

단답형

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점] 115

(가) $f(f(1))=4$

(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

i) $f(1)=1$ $f(f(1))=1$ ×

ii) $f(1)=2$, $f(2)=4$

$\Rightarrow f(4)=1,2,3,4,5$

$f(3), f(5)$ ${}_4H_2$ $\Rightarrow 5 \times {}_4H_2 = 50$

iii) $f(1)=3$, $f(3)=4$

$f(2), f(4)=1,2,3,4,5$

$f(5)=4,5$ $\Rightarrow 5\cdot5\cdot2=50$

iv) $f(1)=4$, $f(4)=4$

$f(2)=1,2,3,4,5$

$f(3), f(5)$ ${}_2H_2$ $\Rightarrow 5\cdot3=15$

v) $f(1)=5$, $f(5)=4$ → (나) 위배

$\therefore 115$

30. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $\underbrace{b-a \ge 5}_{A}$일 때, $\underbrace{c-a \ge 10}_{B}$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 9

전체 경우의 수 ${}_{12}C_3$

i) $a=1$

A 경우 : $b=6\sim12$ $c \Rightarrow 6+5+\cdots+1=21$

$A\cap B$ 경우 : $c=11$ 인경우 $b=6\sim10 \Rightarrow 5$

$c=12$ 인 경우 $b=6\sim11 \Rightarrow 6$

ii) $a=2$

A 경우 : $b=7\sim12$ $c \Rightarrow 5+4+3+2+1=15$

$A\cap B$ 경우 : $c=12$인 경우 $b=7\sim11 \Rightarrow 5$

iii) $a=3$

A 경우 : $b=8\sim12$ $c \Rightarrow 4+3+2+1=10$

iv) $a=4$

A 경우 : $b=9\sim12$ $c \Rightarrow 3+2+1=6$

v) $a=5$

A 경우 : $b=10\sim12$ $c \Rightarrow 2+1=3$

vi) $a=6$

A 경우 : $b=11\sim12$ $c \Rightarrow 1$

$\therefore \frac{5+6+5}{21+15+10+6+3+1} = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$ 9

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{n^2+3n-n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}$

$= 1$

24. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

$2x - \frac{y}{x} - \ln x\frac{dy}{dx} + 1 = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x}\left(2x-\frac{y}{x}+1\right)$

(e,e^2) 대입 → $\frac{dy}{dx} = (2e-e+1) = e+1$

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

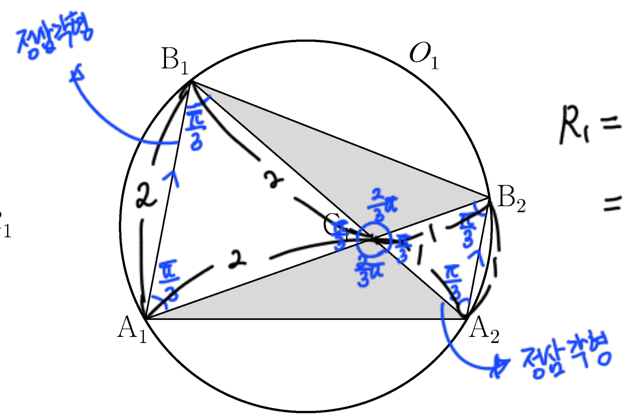
① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

$f(0)=3 \Rightarrow g(3)=0$. $g'(3)=\frac{1}{f'(0)}$

$f'(0)=2 \Rightarrow g'(3)=\frac{1}{2}$

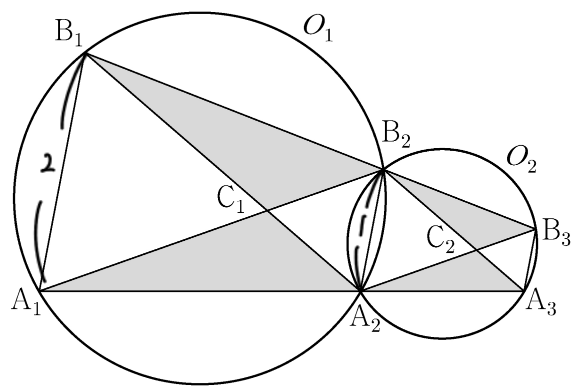
26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⧖ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



$R_1 = 2\cdot1\cdot\sin\frac{2}{3}\pi$
$=\sqrt{3}$

R_2



닮음비 2:1
넓이비 4:1

⋮　　⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$　② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$a_n = 4+(n-1)d = nd+4-d$ $= 3n+1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{nd+4-d}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$

$= d-3 = 0$

$\therefore d=3$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}-3-\frac{1}{n+2}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$= 1-\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cdots$

$= \frac{3}{2}$

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

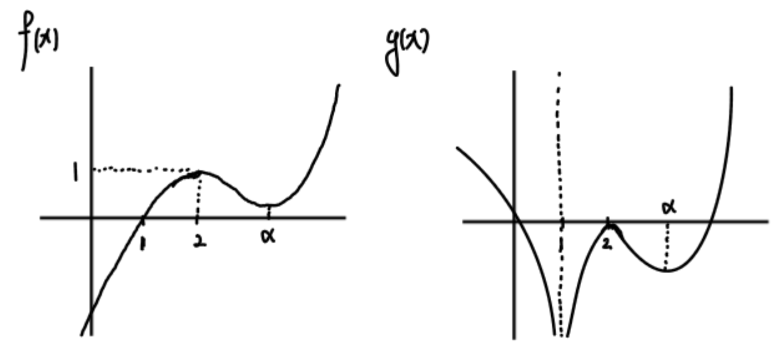
이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

> (가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
> 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
>
> (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

(가) $f(1)=0$

(나) $g(2)\leq 0$



$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+ax+b)$

$f(2)=\frac{1}{2}(4+2a+b)=1$ $\therefore a=-6,\ b=10$

$f'(2)=\frac{1}{2}(4+2a+b)+\frac{1}{2}(4+a)=0$

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2-6x+10)$

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-6x+10)+\frac{1}{2}(x-1)(2x-6)$ $\therefore \alpha=\frac{8}{3}$

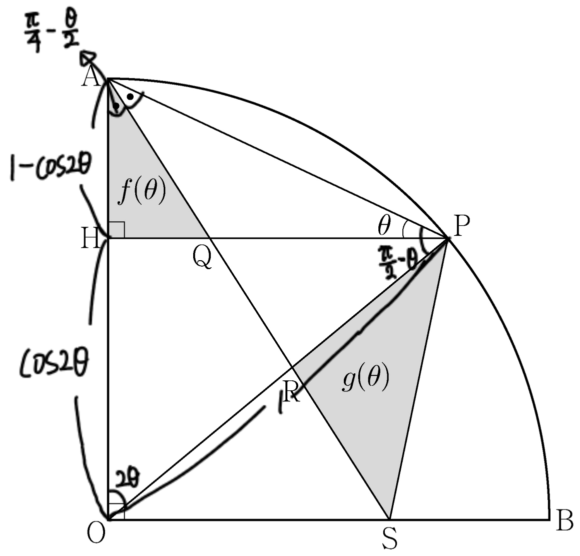
$=\frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$

$\therefore g(\alpha)=\ln f(\tfrac{8}{3})=\ln\frac{25}{27}$

단답형

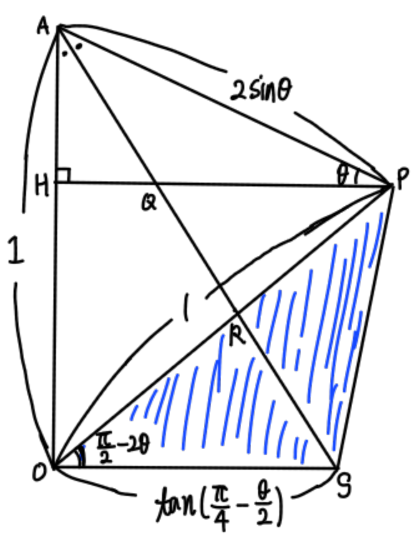
29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

50



$\overline{AH} = 1-\cos 2\theta \Rightarrow \overline{HQ} = (1-\cos 2\theta)\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2\theta)^2\cdot\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)$



$\overline{AH} = 1-\cos 2\theta \Rightarrow \overline{AP} = 2\sin\theta$

$\overline{OS} = \tan\theta$, $\angle POS = \frac{\pi}{2}-2\theta$

• $g(\theta) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\cdot \frac{\overline{RP}}{\overline{OP}}$

★ 각의 이등분선

△OAP 에서 $\overline{OA} : \overline{AP} = \overline{OR} : \overline{RP}$

$1 : 2\sin\theta = \overline{OR} : \overline{RP}$

$\Rightarrow \overline{RP} = \frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$

$\therefore g(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos 2\theta\cdot\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$

$\lim_{\theta\to 0+} \frac{2\theta^4}{(1-\cos 2\theta)^2\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)}\cdot\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\theta}\cdot\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$

$= \frac{1}{2}$

$\therefore 100k = 50$

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \frac{x^2-ax}{e^x}$$

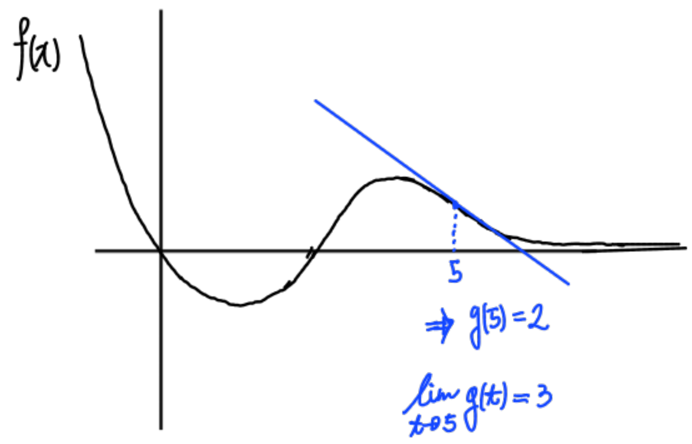
이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x) = f'(t)(x-t)+f(t)$$

16

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to 5} g(t) = 5$일 때, $\lim_{t\to k-} g(t) \neq \lim_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

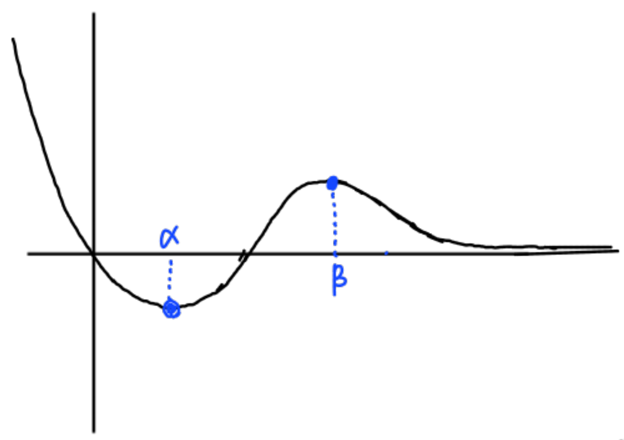


$\Rightarrow g(5)=2$

$\lim_{t\to 5} g(t) = 3$

$f'(x) = \frac{-x^2+(a+2)x-a}{e^x}$

$f''(x) = \frac{x^2-(a+4)x+2a+2}{e^x}$ $\quad f''(5)=0 \Rightarrow a=\frac{7}{3}$



$k=\alpha,\beta$ 에서 $\lim_{t\to k-} g(t) \neq \lim_{t\to k+} g(t) \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+\left(\frac{13}{3}\right)x-\frac{7}{3}}{e^x}$

근과 계수의 관계 ⇝ $\frac{13}{3}$ $\quad \therefore p+q=16$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.