Joy Comment

· 비주얼 자체로 학생들 사이 떨어지는 문항! 빽빽한 스킬의 시험에 대비하기 좋은 문항!

· 생각보다 풀이과정 분량이 길지만, 이 모의고사 문항 내에서 출제자의 배려가 가장 두드러졌다고 생각.

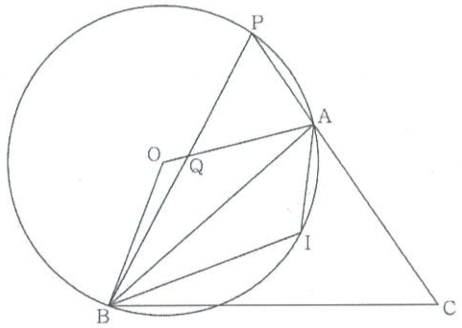
AC 길이를 처음부터 2k로 설정해주고, $\angle BPC = \angle CBP$인 이유와 점 O, I, C가 일직선 존재한다는 사실은 학습차원에서 스스로 생각해보기!

· 삼각함수 도형 문항은 표시할 수 있는 각, 길이 모두 표기하기!

· 원 위의 점은 중심과 연결하여 반지름 표시하기!

· 원 안의 사각형 → 마주보는 두 각 합 = π!

13. 그림과 같이 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$, $\cos(\angle ACB)=\frac{9}{16}$인 삼각형 ABC의 내심을 I라 하자. 삼각형 ABI의 외접원과 직선 AC가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 하고, 이 외접원의 중심을 O라 하자. 선분 BP와 선분 AO가 만나는 점을 Q라 하자.



$\overline{AC}=2k$라 할 때, 다음은 선분 OQ의 길이를 구하는 과정이다.

> $\angle ACB=2\theta$라 하면 내심의 성질에 의하여
> $\angle AIB=\frac{\pi}{2}+\theta$이므로 $\angle BPC=\angle CBP=\frac{\pi}{2}-\theta$이고,
> 삼각형 BCP는 $\overline{BC}=\overline{CP}$인 이등변삼각형이다.
> $\angle AOB=\pi-2\theta$이므로 코사인법칙에 의하여
> $\overline{OA}=$ (가) 이다.
> 현 BP의 수직이등분선은 점 O을 지나고 각 ACB를 이등분하므로 세 점 O, C, I는 한 직선 l 위에 있다.
> 두 점 Q, A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′라 하자.
> $\overline{BP}=\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$이므로 $\cos\theta=$ (나) 이다.
> 두 삼각형 PHC, AH′C의 닮음과
> 두 삼각형 OHQ, OH′A의 닮음에 의하여
> $\overline{AH'}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{OH'}=\frac{3}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{HH'}=\frac{5}{4\sqrt{2}}k$이다.
> $\overline{OH}=\overline{OH'}-\overline{HH'}=\frac{1}{4\sqrt{2}}k$이고
> $\overline{QH}=$ (다) 이므로
> 삼각형 OHQ에서 OQ의 길이는 $\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{QH}^2}$로 구할 수 있다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)+\left\{g\left(\frac{15}{p}\right)\right\}^2$의 값은? [4점]

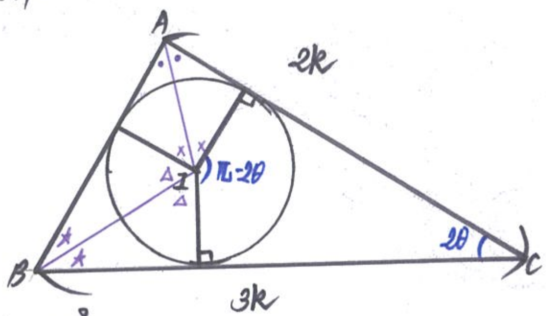
① $\frac{29}{4}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ 8 ⑤ $\frac{33}{4}$

14. 최고차항의 계수가 2인 사차함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $\{f(x)\}^2=t^2$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

> (가) $f'(0)=f'(5)=0$, $f(0)=125$
> (나) 함수 $g(t)$는 $t=f(0)$, $t=f(5)$에서 각각 연속이다.

① 129 ② 131 ③ 133 ④ 135 ⑤ 137

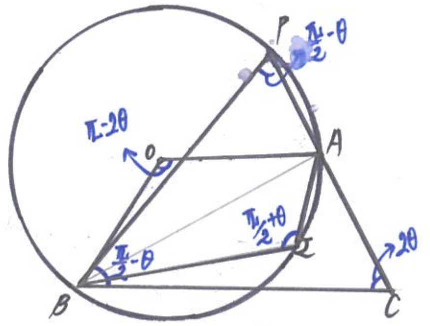
13. part 2.



$\cos 2\theta=\frac{9}{16}$

$\Rightarrow \overline{AB}^2=4k^2+9k^2-2\times 2k\times 3k\times\frac{9}{16}=\frac{25}{4}k^2 \Rightarrow \overline{AB}=\frac{5}{2}k$!

내심성질에 의하여 $\angle AIB=\frac{2\pi-(\pi-2\theta)}{2}=\frac{\pi}{2}+\theta$!



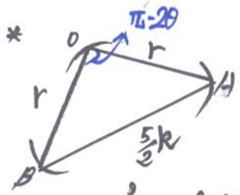
*원 안의 사각형 ⇒ 마주보는 두 각 합 = π! ⇒ 사각형 PBIA에서 $\angle APB=\frac{\pi}{2}-\theta$!

*삼각형 PBC 세 각 합 = π! ⇒ $\angle PBC=\frac{\pi}{2}-\theta$!

그렇기에 △PBC 이등변! ⇒ $\overline{AP}=k$!

애초에 문제에서 출제자가 이 점을 제시 ⇒ 배려라고 생각

*



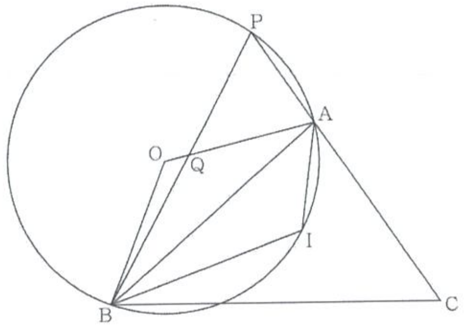
$\cos 2\theta=\frac{9}{16} \Rightarrow \cos(\pi-2\theta)=-\frac{9}{16}$!

cos법칙 ⇒ $\frac{25}{4}k^2=2r^2+2r^2\times\frac{9}{16}$

$\Rightarrow r^2=2k^2 \Rightarrow r=\overline{OA}=\sqrt{2}k$!

↳ 가 : $\sqrt{2}k$!

13. 그림과 같이 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$, $\cos(\angle ACB)=\frac{9}{16}$인 삼각형 ABC의 내심을 I라 하자. 삼각형 ABI의 외접원과 직선 AC가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 하고, 이 외접원의 중심을 O라 하자. 선분 BP와 선분 AO가 만나는 점을 Q라 하자.



$\overline{AC}=2k$라 할 때, 다음은 선분 OQ의 길이를 구하는 과정이다.

> $\angle ACB=2\theta$라 하면 내심의 성질에 의하여
> $\angle AIB=\frac{\pi}{2}+\theta$이므로 $\angle BPC=\angle CBP=\frac{\pi}{2}-\theta$이고,
> 삼각형 BCP는 $\overline{BC}=\overline{CP}$인 이등변삼각형이다.
> $\angle AOB=\pi-2\theta$이므로 코사인법칙에 의하여
> $\overline{OA}=$ (가) 이다.
> 현 BP의 수직이등분선은 점 O을 지나고 각 ACB를 이등분하므로 세 점 O, C, I는 한 직선 l 위에 있다.
> 두 점 Q, A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′라 하자.
> $\overline{BP}=\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$이므로 $\cos\theta=$ (나) 이다.
> 두 삼각형 PHC, AH′C의 닮음과
> 두 삼각형 OHQ, OH′A의 닮음에 의하여
> $\overline{AH'}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{OH'}=\frac{3}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{HH'}=\frac{5}{4\sqrt{2}}k$이다.
> $\overline{OH}=\overline{OH'}-\overline{HH'}=\frac{1}{4\sqrt{2}}k$이고
> $\overline{QH}=$ (다) 이므로
> 삼각형 OHQ에서 OQ의 길이는 $\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{QH}^2}$로 구할 수 있다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)+\left\{g\left(\frac{15}{p}\right)\right\}^2$의 값은? [4점]

① $\frac{29}{4}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ 8 ⑤ $\frac{33}{4}$

$f(k)=\sqrt{2}k$. $g(k)=\frac{\sqrt{7}k}{12\sqrt{2}}$. $p=\frac{5}{4\sqrt{2}}$

$\therefore f(p)+\left\{g\left(\frac{15}{p}\right)\right\}^2=\frac{5}{4}+7=\frac{33}{4}$

$\therefore \frac{33}{4}$!

14. 최고차항의 계수가 2인 사차함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $\{f(x)\}^2=t^2$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

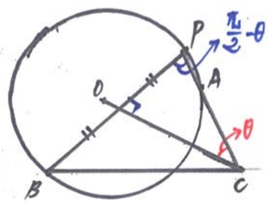
> (가) $f'(0)=f'(5)=0$, $f(0)=125$
> (나) 함수 $g(t)$는 $t=f(0)$, $t=f(5)$에서 각각 연속이다.

② 131 ③ 133 ④ 135 ⑤ 137

13. Part 2.

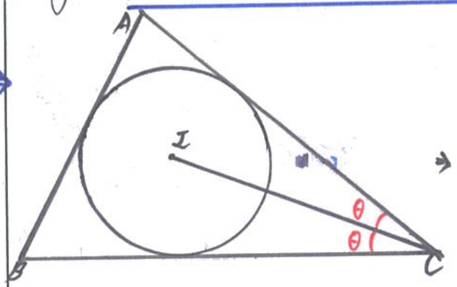
*현 BP의 수직이등분선 : 각 ACB 이등분!

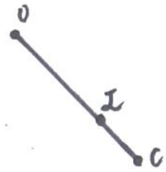
why? 삼각형 세 각 합 $=\pi$! $\Rightarrow \angle PCO=\theta$!

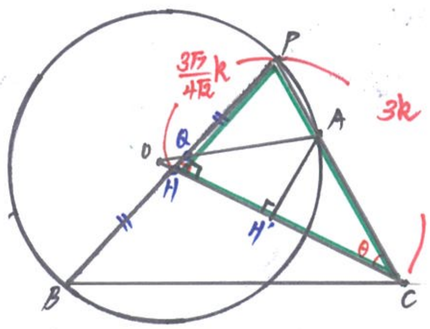


*세 점 O. C. I는 한 직선의 존재!

why? ⇒ 점 I가 삼각형 ABC의 내심이기 때문!



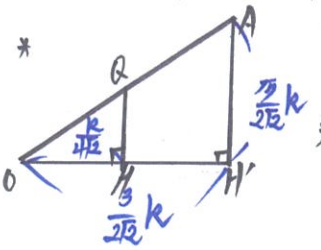




$\overline{CH}^2=9k^2-\frac{63}{32}k^2=\frac{225}{32}k^2 \Rightarrow \overline{CH}=\frac{15}{4\sqrt{2}}k$!

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{15k}{4\sqrt{2}}/3k=\frac{5}{4\sqrt{2}}$! 나 $=\frac{5}{4\sqrt{2}}$!

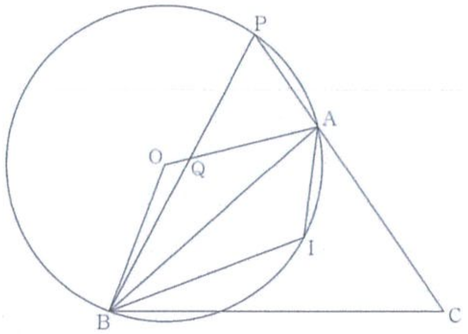
*



$\Rightarrow \overline{QH}=\frac{k}{4\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{7}k}{12\sqrt{2}}=$ 다

14번 Comment
·개인적으로 객관식 中 가장 어려웠던 문항!
·t값 위치변화에 따른, -t값 위치 변화 파악하기!
·애초에 문제에서 특이 지점인 극값 지점 조건 제시!
⇒ 어떻게 하면 극값 지점에서 g(t) 값을 연속으로 만들지만 생각하면 되는 문항!

13. 그림과 같이 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$, $\cos(\angle ACB)=\dfrac{9}{16}$ 인 삼각형 ABC의 내심을 I라 하자. 삼각형 ABI의 외접원과 직선 AC가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 하고, 이 외접원의 중심을 O라 하자. 선분 BP와 선분 AO가 만나는 점을 Q라 하자.



$\overline{AC}=2k$라 할 때, 다음은 선분 OQ의 길이를 구하는 과정이다.

> $\angle ACB=2\theta$라 하면 내심의 성질에 의하여
> $\angle AIB=\dfrac{\pi}{2}+\theta$이므로 $\angle BPC=\angle CBP=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이고,
> 삼각형 BCP는 $\overline{BC}=\overline{CP}$인 이등변삼각형이다.
> $\angle AOB=\pi-2\theta$이므로 코사인법칙에 의하여
> $\overline{OA}=$ $\boxed{\quad(가)\quad}$ 이다.
> 현 BP의 수직이등분선은 점 O를 지나고 각 ACB를 이등분하므로 세 점 O, C, I는 한 직선 l 위에 있다.
> 두 점 Q, A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′라 하자.
> $\overline{BP}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$이므로 $\cos\theta=$ $\boxed{\quad(나)\quad}$ 이다.
> 두 삼각형 PHC, AH′C의 닮음과
> 두 삼각형 OHQ, OH′A의 닮음에 의하여
> $\overline{AH'}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{OH'}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{HH'}=\dfrac{5}{4\sqrt{2}}k$이다.
> $\overline{OH}=\overline{OH'}-\overline{HH'}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}k$이고
> $\overline{QH}=$ $\boxed{\quad(다)\quad}$ 이므로
> 삼각형 OHQ에서 OQ의 길이는 $\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{QH}^2}$로 구할 수 있다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)+\left\{g\left(\dfrac{15}{p}\right)\right\}^2$의 값은? [4점]

① $\dfrac{29}{4}$　② $\dfrac{15}{2}$　③ $\dfrac{31}{4}$　④ 8　⑤ $\dfrac{33}{4}$

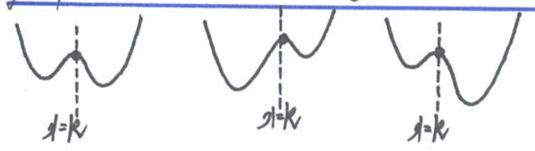
14. 최고차항의 계수가 2인 사차함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $\{f(x)\}^2=t^2$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

> (가) $f'(0)=f'(5)=0$, $f(0)=125$
> (나) 함수 $g(t)$는 $t=f(0)$, $t=f(5)$에서 각각 연속이다.

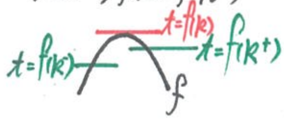
① 129　② 131　③ 133　④ 135　⑤ 137

쌤's Part 1.
최고차항의 계수 2인 사차 $f(x)$
$f(x)=t$ or $f(x)=-t$ 실근 개수 $=g(t)$!
가) $f'(0)=0$. $f'(5)=0$. $f(0)=5^3$
나) $g(t)$: $t=f(0)$. $t=f(5)$에서 각각 연속!

사차함수 특성상 $f(x)$는 $x=0$ or $x=5$에서 적어도 하나의 극값을 가짐!
⇒ 일반적으로 극값 지점에서 $g(t)$: 불연속! : 상식적 생각!!
⇒ but $g(t)$가 $t=f(0)$. $t=f(5)$에서 각각 연속이려면,
t값이 $f(x)$의 극값인 상황에서 $f(x)=-t$ 서로다른 실근 개수가 t^-. t^+ 일 때보다 않아야 함!
⇓
다시 해석해 본다면,
1 $f(x)$가 $x=k$에서 극댓값을 가지며 $g(t)$가 $t=f(k)$에서 연속인 상황은,



$y=t$ 그래프 위치변화는 증가후 감소! $f(k)>f(k^-)$, $f(k)>f(k^+)$
$y=-t$ 그래프 위치변화는 감소후 증가!



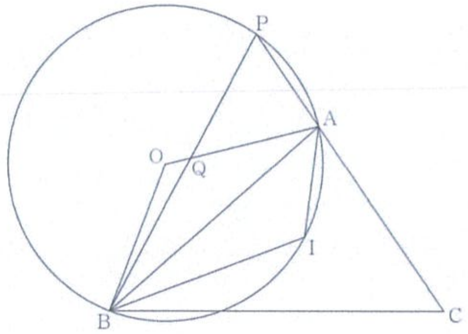
t값	$f(k^-)$	$f(k)$	$f(k^+)$
$f(x)=t$ 서로다른 실근수	4 →	3 →	4
$f(x)=-t$ 서로다른 실근수	α →	α+1 →	α

여야 $g(t)$ 연속!

⇐ $y=-t$ 그래프가 내려갔다 올라오면서 실근 1개가 추가되는 상황 불가능!
⇒ 즉 $-t=f(k)=t$인 상황은 배제해야 안된다는거 파악!
결론 ⇒ $f(x)$의 극대지점 : $x\neq0$. $x\neq5$!

$g(t)$는 t값이 $f(x)$의 극댓값일 때는 불연속!

13. 그림과 같이 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$, $\cos(\angle ACB)=\frac{9}{16}$인 삼각형 ABC의 내심을 I라 하자. 삼각형 ABI의 외접원과 직선 AC가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 하고, 이 외접원의 중심을 O라 하자. 선분 BP와 선분 AO가 만나는 점을 Q라 하자.



$\overline{AC}=2k$라 할 때, 다음은 선분 OQ의 길이를 구하는 과정이다.

> $\angle ACB=2\theta$라 하면 내심의 성질에 의하여
> $\angle AIB=\frac{\pi}{2}+\theta$이므로 $\angle BPC=\angle CBP=\frac{\pi}{2}-\theta$이고,
> 삼각형 BCP는 $\overline{BC}=\overline{CP}$인 이등변삼각형이다.
> $\angle AOB=\pi-2\theta$이므로 코사인법칙에 의하여
> $\overline{OA}=$ (가) 이다.
> 현 BP의 수직이등분선은 점 O을 지나고 각 ACB를 이등분하므로 세 점 O, C, I는 한 직선 l 위에 있다.
> 두 점 Q, A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′라 하자.
> $\overline{BP}=\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$이므로 $\cos\theta=$ (나) 이다.
> 두 삼각형 PHC, AH′C의 닮음과
> 두 삼각형 OHQ, OH′A의 닮음에 의하여
> $\overline{AH'}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{OH'}=\frac{3}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{HH'}=\frac{5}{4\sqrt{2}}k$이다.
> $\overline{OH}=\overline{OH'}-\overline{HH'}=\frac{1}{4\sqrt{2}}k$이고
> $\overline{QH}=$ (다) 이므로
> 삼각형 OHQ에서 OQ의 길이는 $\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{QH}^2}$로 구할 수 있다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)+\left\{g\left(\frac{15}{p}\right)\right\}^2$의 값은? [4점]

① $\frac{29}{4}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ 8 ⑤ $\frac{33}{4}$

$f'(0)=f'(5)=0$. $f(0)=125$. $f(5)=-125$

$f(x)=2x^4-16x^3+20x^2+125$

$\therefore f(1)$값 $=131$!

②

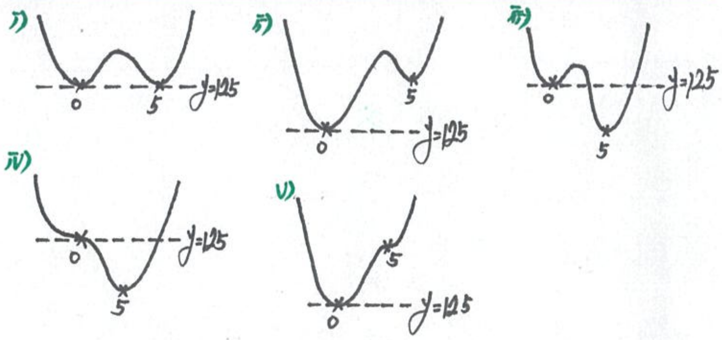
14. 최고차항의 계수가 2인 사차함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $\{f(x)\}^2=t^2$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

> (가) $f'(0)=f'(5)=0$, $f(0)=125$
> (나) 함수 $g(t)$는 $t=f(0)$, $t=f(5)$에서 각각 연속이다.

① 129 ② 131 ③ 133 ④ 135 ⑤ 137

14. part 2.

② $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 가지며 $g(t)$가 $t=f(k)$에서 연속인 경우



$y=t$ 그래프 위치변화 : 감소 후 증가. $f(k^-)>f(k)$. $f(k^+)>f(k)$

$y=-t$ 그래프 위치변화 : 증가 후 감소.

일단, i) iii) v) Case out!

why? : $y=-t$ 즉, $y=-125$는 $f(x)$와 교점 불가능!

iv)의 경우 ⇒ $g(x)$: $t=f(5)$에서 불연속!

why? : $y=-t$ 그래프가 올라갔다 내려오면서 $f(x)$와의 서로 다른 실근 개수가 $\alpha\to\alpha+1\to\alpha$가 되어야 하는데, 그 경우는 $t=f(5)=-t$인 경우!

⇒ $t=0$일때 확인해보면 $g(x)$: 불연속!

ii)의 경우 $g(t)$가 $t=125$. $t=f(0)$에서 연속이려면 $t=f(0)$일때 $-t$값이 $f(5)$면 가능!

같은 논리!

그러면 $f(5)$값이 -125인경우 $g(x)$는 $t=f(5)$에서 연속?

t값 : $f(5^-)$ $f(5)$ $f(5^+)$

⇐ $f=t$ 서로다른 실근수 : $2\to1\to2$

$f=-t$ 서로다른 실근수 : $2\to3\to2$

: 연속!

15번 Comment

·생각보다 잘 안했던 15번! 오히려 13번, 14번이 더 어려운듯..

·수열 합이 상수항 zero인 이차식 ⇒ 등차수열 생각!

·수열: 나열 ⇒ 복잡하면 하나씩 써보면서 풀어봐!

·수열의 합을 한번에 구하기 힘들다면, 묶어서 관찰하기!

·마지막까지 구하는 값이 확정되지 않았을 경우에는 숨은조건이 있는지 확인하기! ex) 수열 a_n은 모든 항이 서로 다르다는 조건!

15. 모든 항이 서로 다른 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{i=1}^{n} a_{2i} = n(16-n)$

(나) $a_n + a_{n+2} = k - 2a_{n+1}$

$\sum_{i=1}^{2n}(a_i - i) \geq 0$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 8일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 34 ② 35 ③ 36 ④ 37 ⑤ 38

풀)

모든항이 서로다른 정수 a_n.

가) $\sum_{i=1}^{n} a_{2i} = -n(n-16)$: 수열 합이 상수항 '영' 이차

⇒ a_{2n} : 등차! : 공차: -2, 첫항: 15

⇒ $a_{2n} = -2n+17$ $(n \geq 1)$

나) $a_n + a_{n+2} = k - 2a_{n+1}$

: 수열이 복잡하면 써보면서 풀어보기!

a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	…
15	13	11	9	7	

a_1	a_3	a_5	a_7	a_9	a_{11}	…
$\frac{k}{2}-16$	$\frac{k}{2}-14$	$\frac{k}{2}-12$	$\frac{k}{2}-10$	$\frac{k}{2}-8$	$\frac{k}{2}-6$	

a_n : 정수! ⇒ k : 짝수!

* $\sum_{i=1}^{2n}(a_i - i)$: 수열 $\{a_n\}$도 그렇고, 수열 $\{a_n - n\}$은 홀수th 항과 짝수th 항들을 한번에 같이 관찰하기 불편! ⇒ 홀수th 항들과 짝수th 항들을 나눠서 관찰하기!

⇒ $\sum_{i=1}^{2n}(a_i - i) = \sum_{i=1}^{n}(a_{2i-1} - (2i-1)) + \sum_{i=1}^{n}(a_{2i} - 2i)$

i = 1. 2. 3. 4. … n

$a_{2i-1} - (2i-1) = \frac{k}{2}-17$, $\frac{k}{2}-17$, $\frac{k}{2}-17$ … $\frac{k}{2}-17$

⇒ $\sum_{i=1}^{n}(a_{2i-1} - (2i-1)) = n\left(\frac{k}{2}-17\right)$.

i = 1. 2. 3. 4 … n

$a_{2i} - 2i$ ⇒ 13 9 5 1 …

첫항: 13. 공차: -4 ⇒ $a_{2i} - 2i = -4i + 17$

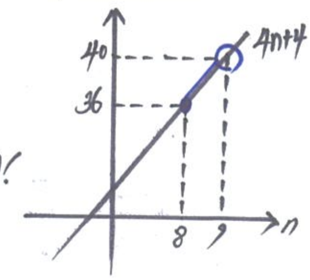
⇒ $\sum_{i=1}^{n}(a_{2i} - 2i) = -2n^2 + 15n$.

* $\sum_{i=1}^{2n}(a_i - i) = -2n^2 - 2n + \frac{k}{2}n \geq 0$

만족 n : 8개

↓

$k \geq 4n+4$: 만족하는 n : 8개!



$k = 36$ or 37 or 38 or 39

i) k는 짝수이기 때문에 37, 39 아님!

ii) k가 38이라면 a_1 a_3 a_5 … (3) (5) (7)

모든항이 서로 다르다는 조건에 위배! : out

iii) $k=36$: 가능! (모든 조건 충족!) ∴ $k=36$

단답형

16. $\log_3\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) - \log_3\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 12x + 9$이고 $f(1) = 5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

21번 Comment

·전형적인 21번급 난이도!

·자연수 조건제시 → 여러 Case 들 中 하나의 값으로 확정짓는 경우多

·적절한 Case 분류 { (ex) n=홀수인경우, n=짝수인 경우 / (ex) $a_n=2^n$ 인경우, $a_n=2^{\frac{n}{b_n}}$ 인경우

·log를 지수로 / 지수를 log로 적절한 식조작!

· 수열은 나열해 써보면서 규칙파악!

21. 모든 항이 자연수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_n - 2^n)\left(\log_2 a_n - \frac{n}{b_n}\right) = 0$$

이고 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> $\sqrt{a_n}$은 자연수가 아니고, $\log_2 b_n$은 자연수이다.

$a_m + a_{m+16} = 40$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. ~~이차함수 $f(x)$와 상수 $k(k>0)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수~~

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x |f'(t)|dt & (x < k) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq k) \end{cases}$$

~~가 양의 상수 α에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.~~

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이다.
> (나) $0 \leq x \leq \alpha$인 모든 실수 x에 대하여
> $(2x-\alpha)\{\alpha g(x) - xg(\alpha)\} \leq 0$이다.

~~$f(0)=0$일 때, $\left|12\alpha \times \frac{g(5)}{f(1)}\right|$의 값을 구하시오. [4점]~~

21.

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$

$a_n = 2^n$ or $\log_2 a_n = \frac{n}{b_n}$!

→ $a_n = 2^n$ or $2^{\frac{n}{b_n}}$!

* a_n : 자연수 → $a_n = 2^{\frac{n}{b_n}}$ 인 경우에 $\frac{n}{b_n}$은 자연수여야!
(n=자연수, b_n=자연수)

* $\sqrt{a_n} \neq$ 자연수 → n이 짝수인 경우에 $a_n = 2^n$ 성립×!

→ 즉, n이 짝수이면, $a_n = 2^{\frac{n}{b_n}}$!

⊕ $\sqrt{a_n}$이 자연수가 아니니, $\frac{n}{b_n}$은 홀수여야!

정리하면, n이 짝수일 때 → $a_n = 2^{\frac{n}{b_n}}$ ($\frac{n}{b_n}$=홀수인 자연수)

* $\log_2 b_n$: 자연수 → b_n : 2^1 or 2^2 or 2^3 or 2^4 …
2의 거듭제곱 형태!

→ n이 홀수인 경우에 $a_n = 2^{\frac{n}{b_n}}$ 성립×

a_n : 자연수 → $2^{\frac{n}{b_n}} = 2^{\frac{홀수}{짝수}} \neq$ 자연수!

n이 홀수일 때, $a_n = 2^n$!

Case i) n이 홀수인 경우

a_1	a_3	a_5	a_7	…
2^1	2^3 (8)	2^5 (32)	2^7	…

∴ $a_m + a_{m+16} = 40$ 불가능! : out!

Case ii) n이 짝수인경우. $a_n = 2^{\frac{n}{b_n}}$ ($\frac{n}{b_n}$=홀수, $b_n = 2^1$ or 2^2 or 2^3 or …)

i) $b_n = 2^1$ → n : 2^1, $2^1\times3$, $2^1\times5$, $2^1\times7$ …
→ a_n : 2^1, 2^3 (8), 2^5 (32), 2^7 …

×2 ×2

ii) $b_n = 2^2$ n : 2^2, $2^2\times3$, $2^2\times5$ …
a_n = 2^1, 2^3 (8), 2^5 (32) …

×2 ×2

iii) $b_n = 2^3$ → n : 2^3, $2^3\times3$, $2^3\times5$ …
→ a_n : 2^1, 2^3 (8), 2^5 (32) …

* $a_n = 8$인 n값: 6, 12, 24, 48, 96 …
  $a_n = 32$인 n값: 10, 20, 40, 80, 160 …
  4차이, 8, 16, 32, 64

* $a_n = 8$인 n값: 6, 12, 24, 48, 96 …
  $a_n = 32$인 n값: 10, 20, 40, 80, 160 …
  2차이, 4, 8, 16, 32

* 확인 사항
  - 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
  - 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

∴ m값 : 24, 80

∴ =104!

·처음에 어디서부터 접근해야할지 고민하는 수험생분들 꽤 있었을 듯! 주어진 g(x) 식도 그렇고, k와 α라는 미지수. f(x)의 최고차항의 계수도 양수인지, 음수인지 모르는 상황! x=α에서 극대라는데 k위치가 어딘지 몰라서 바로 사용하기 힘들것은 것!

f(0)=0 이라는데 우선적으로 식으로 접근하기도 그렇고...
⇒ 그러면 (나) 조건부터 해석하면서 다른 주어진 조건을 같이 사용하자!

*관찰하기 쉬운 형태로 식조작하기!
ex) $\alpha g(x) - xg(\alpha) \geq 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{x} \geq \frac{g(\alpha)}{\alpha}$!
*분수식 ⇒ 기울기 관점!
*$\int_a^b f(t)dt$ ⇒ f가 a부터 b까지 실제 이동거리!
*이차함수 ⇒ 대칭성, 넓이공식!

21. 모든 항이 자연수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_n - 2^n)\left(\log_2 a_n - \frac{n}{b_n}\right) = 0$$

이고 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$\sqrt{a_n}$은 자연수가 아니고, $\log_2 b_n$은 자연수이다.

$a_m + a_{m+16} = 40$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. Part 2.

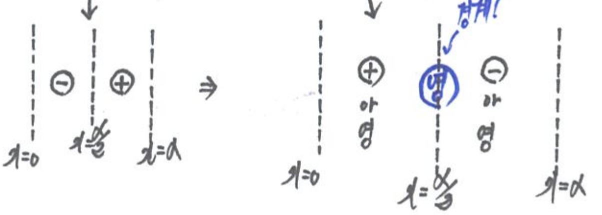
이차함수 f(x) 상수 k (k>0)

(연속) $g(x) = \begin{cases} \int_0^x |f(t)|dt & (x<k) & \text{: 실제 이동거리} \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq k) & \text{: 상차} \end{cases}$

* $|f(t)| \geq 0 \Rightarrow g(x)$: $x<k$ 에서 증가!
* $g(0) = 0$!

· 가) g(x) : x=α 에서 극대! ⇒ $\int_0^x |f(t)|dt$는 감소 불가능!
: $\int_0^x f(t)dt$ 구간에서 감소가능!
⇒ k ≤ α 정도 파악!

·나) $0 \leq x \leq \alpha$
$(2x-\alpha) \times \{\alpha g(x) - xg(\alpha)\} \leq 0$!



* $0 \leq x < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha g(x) - xg(\alpha) \geq 0$
$\Rightarrow \frac{g(x)}{x} \geq \frac{g(\alpha)}{\alpha}$!

* $\frac{\alpha}{2} < x \leq \alpha \Rightarrow \alpha g(x) - xg(\alpha) \leq 0$
$\Rightarrow \frac{g(x)}{x} \leq \frac{g(\alpha)}{\alpha}$!

(0,0) ~ (x, g(x)) 기울기
vs
⇒ (0,0) ~ (α, g(α)) 기울기

22. 이차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k>0)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x |f'(t)|dt & (x < k) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq k) \end{cases}$$

가 양의 상수 α에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

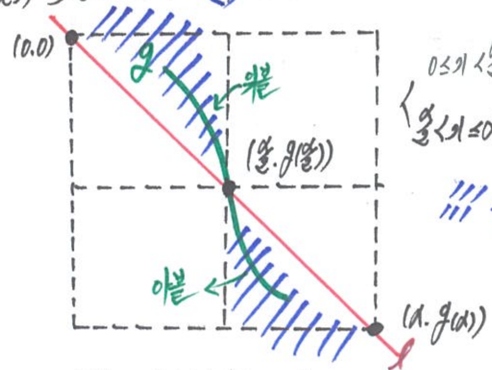
(가) 함수 $g(x)$는 $x = \alpha$에서 극대이다.
(나) $0 \leq x \leq \alpha$인 모든 실수 x에 대하여 $(2x - \alpha)\{\alpha g(x) - xg(\alpha)\} \leq 0$이다.

$f(0) = 0$일 때, $\left|12\alpha \times \frac{g(5)}{f(1)}\right|$의 값을 구하시오. [4점]

$* x = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{g(\frac{\alpha}{2}) - 0}{\frac{\alpha}{2} - 0} = \frac{g(\alpha) - 0}{\alpha - 0}$: $(0,0) \sim (\frac{\alpha}{2}, g(\frac{\alpha}{2}))$ 기울기 = $(\frac{\alpha}{2}, g(\frac{\alpha}{2})) \sim (\alpha, g(\alpha))$ 기울기

→ $(0,0)$ $(\frac{\alpha}{2}, g(\frac{\alpha}{2}))$ $(\alpha, g(\alpha))$
세 점은 하나의 직선 l 위에 존재!

Case 1) 직선 l 기울기 (음수)인 경우!



$0 \leq x < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{g(x)}{x} \geq \frac{g(\alpha)}{\alpha}$
$\frac{\alpha}{2} < x \leq \alpha \Rightarrow \frac{g(x)}{x} \leq \frac{g(\alpha)}{\alpha}$

/// : g(x) 존재가능

나) 조건을 만족시키려면 그래프는 $x = \frac{\alpha}{2}$에서 위 그림처럼 감소! 감소하는 상황이니 $g(x) : \int_0^x f(t)dt$

⇒ $\int_0^x f(t)dt$: 상차 ⇒ $x = \frac{\alpha}{2}$ 변곡점!

$\int_0^x f(t)dt$는 x=α에서 극대 X
가) 조건 위배! out!

* 확인 사항
  - 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
  - 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

~~21. 모든 항이 자연수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여~~

~~$$\left(a_n - 2^n\right)\left(\log_2 a_n - \frac{n}{b_n}\right) = 0$$~~

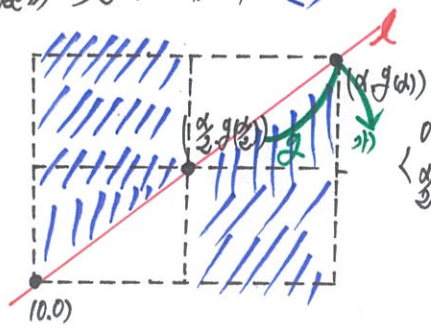
~~이고 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.~~

~~$\sqrt{a_n}$은 자연수가 아니고, $\log_2 b_n$은 자연수이다.~~

~~$a_m + a_{m+16} = 40$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]~~

22. Part 2.

Case II) 직선 l 기울기가 양수 인 경우!



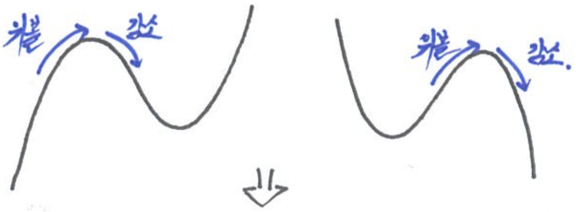
$0 \le x < \frac{\alpha}{2}$: $\frac{g(x)}{x} \ge \frac{g(\alpha)}{\alpha}$

$\frac{\alpha}{2} < x \le \alpha$: $\frac{g(x)}{x} \le \frac{g(\alpha)}{\alpha}$

$g(x)$는 $x=\alpha^-$ 에서 아래로 볼록형태로 증가하다가, $x=\alpha^+$에서 감소!

⇓

$\int_0^x f(t)dt$ 그래프 안으로는 불가능!



⇓

$x<\alpha$ 에서 $g(x) = \int_0^x |f(t)|dt$ 이고,

$x \ge \alpha$에서 감소하는 구간 존재 : $\int_0^x |f(t)|dt$ 불가능!

⇒ $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 여야!

⇒ $k=\alpha$!

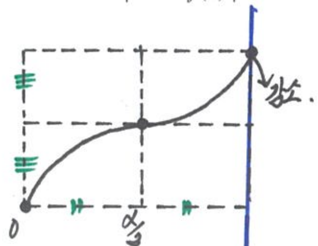
22. 이차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k>0)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x |f'(t)|dt & (x<k) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \ge k) \end{cases}$$

가 양의 상수 α에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이다.
(나) $0 \le x \le \alpha$인 모든 실수 x에 대하여 $(2x-\alpha)\{\alpha g(x) - x g(\alpha)\} \le 0$이다.

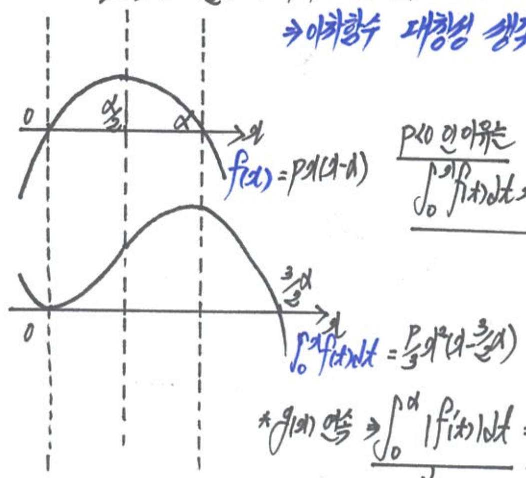
$f(0)=0$일 때, $\left|12\alpha \times \frac{g(5)}{f(1)}\right|$의 값을 구하시오. [4점]



$\int_0^\alpha |f(t)|dt$ $x=\alpha$ $\int_0^\alpha f(t)dt.$

⇒ $f(x)$는 열린구간 $(0, \frac{\alpha}{2})$에서 실제이동 거리와 열린구간 $(\frac{\alpha}{2}, \alpha)$에서 실제이동 거리 동일!

⇒ 이차함수 대칭성 생각!



$p<0$ 인 이유는 $\int_0^x f(t)dt$가 $x=\alpha$에서 극대!

* $g(x)$ 연속 ⇒ $\underbrace{\int_0^\alpha |f(t)|dt}_{2\times f(\frac{\alpha}{2})} = \underbrace{\int_0^\alpha f(t)dt}_{= -\frac{p}{6}\times\alpha^3}$ ⇒ $\alpha = 3$!

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$\left|12\alpha \times \frac{g(5)}{f(1)}\right| = \left|12 \times 3 \times \frac{\frac{p}{3}\times 5 \times 5 \times \frac{1}{2}}{p \times 1 \times (-2)}\right| = 75$!

∴ = 75 야호!!