역함수의 모든 것

by URdokzon

역함수_

- 정의역과 치역이 반대로 들어가는 함수이다.
- 함수의 정의 자체가 치역과 대응되지 않는 정의역의 원소가 있으면 안 되고, 동일한 정의역에 대해 두 개 이상의 치역이 대응되어서도 안 되므로, 일대일 대응 함수(단조증가, 단조감소하는 함수)만이 역함수가 존재한다.
- $f^{-1}(b)=a$ 이면, $f(a)=b$이다.
- $f: X \to Y$ / $g: Y \to Z$ 라고 하자. 이때 합성함수 $(g \circ f)(x)$는 $X \to Y \to Z$ 즉, $X \to Z$이다.
- 그렇다면, 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 역함수는 $Z \to Y \to X$ 즉, $Z \to X$일 것이다. 이때, $g^{-1}: Z \to Y$, $f^{-1}: Y \to X$이므로 $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$가 $(g \circ f)(x)$의 역함수이다.

역함수는 방금 본 것처럼, 정의역과 치역이 그대로 바뀔 수 있는 함수이다.
이 정의가 어떻게 문제에 적용되는지 지금부터 살펴보자.

ex. 1) $f(x)=f^{-1}(x)$의 근을 구해라.

가장 기본적인 역함수 문제이다. 하지만, 역함수 킬러 문제의 근간이며, 이 기본을 몰라 역함수를 어려워하는 학생이 대다수이니 잘 보길 바란다.

Sol. for ex. 1)
$f(a)=f^{-1}(a)=b$ 라고 하자. $f^{-1}(a)=b \to f(b)=a$ 이므로, $f(a)=b$와 $f(b)=a$를 동시에 만족하는 순서쌍 (a, b)가 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근이 된다.

가장 쉽게 만족하는 순서쌍은 $a=b$일 때이다. $f(a)=a$이므로, $f(x)=x$의 근은 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근에 모두 포함된다.

$a \neq b$ 일 때, $a<b$라고 하면, $f(a)=b>a=f(b)$ 이다.
$\therefore$ $f(x)$는 감소함수이다. → $y=x$와 한 번만 만날 수 있음.
따라서, $a \neq b$일 때 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근이 생기려면, $f(x)$는 반드시 감소함수여야 하며,
$f(x)$가 증가함수일 때는 $f(x)=x$의 근만이 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근이 될 수 있다.
ex 1.의 해설을 정리해보자.

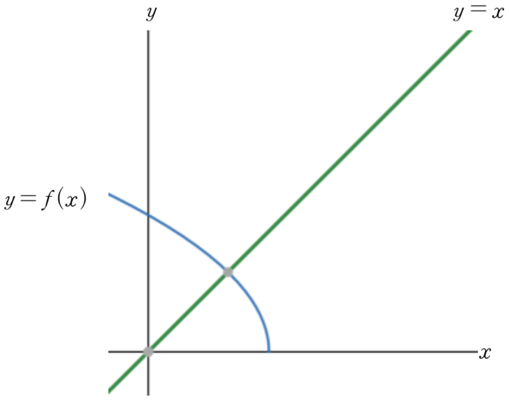
ⅰ) $f(x)$가 증가함수일 때는 $f(x)=x$의 근만 확인하면 된다.
ⅱ) $f(x)$가 감소함수일 때는 $f(x)=x$의 근 하나와 $f(a)=b, f(b)=a$를 동시에 만족하는 근을 찾으면 된다.

→ 특별히, ⅱ)는 $f(x)=x$의 근이 하나만 존재, 나머지는 a와 b로 쌍으로 존재. ∴ 근이 홀수 개

다음의 예제로 연습해보자.

ex 2. $f(x)=\sqrt{7-3x}$에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근을 모두 구하시오.

Sol. for ex 2.



$f(x)$는 감소함수이다.

$f(x)=x$의 근을 구해보자.

$\sqrt{7-3x}=x \rightarrow x^2+3x-7=0$

근의 공식을 사용하면, $x=-3\pm\sqrt{37}$

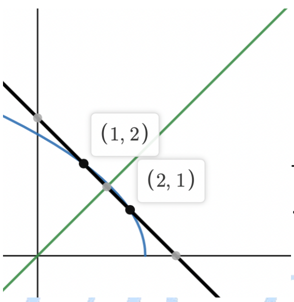
이때 근이 양수여야 하므로, $x=-3+\sqrt{37}$만 근.

$f(a)=b,\ f(b)=a$를 만족하는 $(a,\ b)$를 찾자.

$\sqrt{7-3a}=b,\ \sqrt{7-3b}=a \ \rightarrow\ 3a+b^2=7,\ 3b+a^2=7$ $\cdots$ 두 식을 빼주자.

$(a-b)(a+b-3)=0 \ \rightarrow$ 경우의 수가 둘로 나뉜다. $a=b\ /\ a+b=3$

$a=b \ \rightarrow\ a^2+3a-7=0$ $\cdots$ 이는 앞선 $f(x)=x$의 근이므로 어차피 중복이다.



$b=3-a \ \rightarrow\ a^2-3a+9=7$ 정리하면, $a=1,\ b=2$

$\therefore$ 왼쪽의 그림처럼 $(1,\ 2)\ /\ (2,\ 1)$

모두 합치면 총 3개의 근이다.

$x=1,\ 2,\ -3+\sqrt{37}$ (답)

이런 식으로, $f(x)$가 감소함수일 때 근을 구해주는 것을 항상 기억하자.

ex 3. 2019학년도 6월 29번
함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (x \ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

해설_

$f(x)$는 연속이므로, $f(1-)=f(1+) \to a+b=c+\frac{5}{2}$

$f(x)$가 역함수를 가지므로, 단조증가하거나 단조감소한다. 한편, $f(x)=f^{-1}(x)$의 근이 3개 즉, 홀수개이므로 $f(x)$가 감소할 수도 있다는 것을 염두에 두어야 한다.

$f(x)$가 증가함수라고 가정해보자. 그러면, $f(x)=x$의 근이 $-1, 1, 2$ 세 개다.
하지만, $f(x)$는 $x<1$에서 일차함수이므로 $y=x$와의 근이 최대 1개 생길 수 있다. ∴ 모순

$f(x)$는 감소함수이다. 그렇다면, $f(x)=x$의 근이 단 하나 존재할 것이고, (a, b)에 해당하는 근은 나머지 두 개일 것이다. 여기서 개념 하나가 등장한다.
(a, b)와 (b, a)는 $y=x$ 대칭이므로 언제나 대소는 $a<k=\{k \mid k$는 $f(x)=x$ 의 근$\}<b$ 일 것이다.
$\therefore a=-1, k=1, b=2 \quad \cdots$ 바로 확정된다.

$f(-1)=2 \to -a+b=2$, $f(2)=-1 \to 4c+5=-1$

구한 식을 연립해서 정리하면, $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$이므로 답은 20.

Comment. $f(x)$가 감소할 때 나타나는 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근의 특징을 잘 알아두자.

한편, $f(x)$와 $g(x)$가 역함수 관계일 때 반드시 성립하는 식인 $f(g(x))=x$와 $g(f(x))=x$, 이 두 가지를 이용하는 문제도 많이 출제된다. 단순히 저 형태들만 쓰이는 것이 아니라,
$f'(g(x))g'(x)=1$이라는 미분 형태도 잘 쓰이니 미적분 선택과목인 사람들은 여기까지 기억하자.

ex 4. 2017학년도 수능 30번
실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오.

해설 _
$f'(x)=3x^2-6x+6 \rightarrow 4(3x^2-6x+6)+12x-18=12x^2-12x+6=3g(x)^2-6g(x)+6$
정리하면, $(g(x)-2x)(g(x)-(-2x+2))=0$ 이므로, $g(x)=2x$ or $g(x)=-2x+2$이다.
이때 문제에서 주어진 범위가 x에 대해 닫힌 구간$[0,1]$이다.
$g(x)=2x=y$ 에 대해 y는 x의 범위에 의해 닫힌 구간$[0,2]$로 한정된다.
$g(x)=-2x+2=y$ 에 대해 y는 x의 범위에 대해 닫힌 구간$[0,2]$로 한정된다.
$g(x)=y \rightarrow f(y)=x$를 이용해서 식을 정리하자.
$f(y)=\frac{1}{2}y \ (0 \leqq y \leqq 2)$, $f(y)=-\frac{1}{2}y+1 \ (0 \leqq y \leqq 2)$ 로 정리된다.
$y^3-3y^2+6y+k=\frac{1}{2}y,\ -\frac{1}{2}y+1 \quad (0 \leqq y \leqq 2)$의 실근이 존재하도록 k를 구해주면 된다.
$k=-y^3+3y^2-\frac{11}{2}y,\ -y^3+3y^2-\frac{13}{2}y+1 \quad (0 \leqq y \leqq 2)$ 인데, 두 함수 모두 감소함수이므로, 주어진 범위에 따른 치역을 구하면 각각 '-7~0'과 '-8~1' 이다. $\therefore\ -8 \leqq k \leqq 1$이므로 65(답)

단순히 $f(x)$와 $g(x)$가 역함수라는 정의 자체를 이용한 문제이다. 기억해두자.

결국 역함수 문제는 역함수가 무엇인지 이해를 하면, 적용이 그나마 다른 단원보다는 쉽다는 것이다. 어차피 맨날 써야하는 식이 같기 때문이다.

본인이 비미적분 선택자라면, 지금까지 한 내용이 전부이다.
이제 미적분 선택과목의 역함수에 대해 살펴보자.

$f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $f(x)=g(x)$의 근이 a일 때 $f(a)=b$라고 하자. $\rightarrow$ $g(b)=a$ 이다.
이때 (a,b)와 (b,a)가 $y=x$대칭이므로 $f'(a)$와 $g'(b)$ 역시 $y=x$ (기울기 1)에 대해서 대칭이다.
이를 식으로 나타내면, $f'(a)\times g'(b)=1$이다.

식으로도 증명해보자. $f(g(x))=x \rightarrow f'(g(x))\times g'(x)=1$: $x=b$를 대입하자.
$f'(g(b))\times g'(b)=f'(a)\times g'(b)=1$

따라서 앞으로 역함수와 원래 함수$y=x$와의 관계에서 서로 대칭 관계에 있는 점을 [짝]이라고 부를 것이며, [짝]의 경우, 기울기가 서로 역수 관계임을 활용할 것이다. 이를 두 문제로 연습해 볼 것이며, 이 두 문제를 벗어나는 역함수 문제는 출제되기 어려울 것임을 명심하자.

ex 5. 2021년 10월 교육청 30번
서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$ 이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$
(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오.

해설_

우선 미분과 적분 문제의 가장 첫 출발은 '대칭성을 포함한 개형 조사'로 시작된다.
→ $f(x)$는 기함수이다. ; $f(0)=0$

또한, a, b는 모두 양수이므로 $f(x)$는 감소함수이다. ($\because \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$)
$f(x)$는 감소함수이므로 역함수에 대해 조사할 때 $y=x$와의 근뿐만 아니라, 서로 대칭인 점을 모두 지나는 (a, b), (b, a)의 상황도 보아야 한다. … 이해가 안 간다면 앞부분 설명을 다시 정독하고 오자.

모든 실수 x에 대하여 f'이 근을 안 가진다고 발문에서 주었으므로 역함수가 존재할 테다.

(가): $g(2)=f(2)-f^{-1}(2)=h(0)=g(f(0))=g(0)=f(0)-f^{-1}(0)=0$ → '$f(2)=f^{-1}(2)$'

ⅰ) $f(2)=2$이고, $f(x)$에서 2의 [짝]은 자기 자신인 2이다.
→ $f(x)$는 기함수이므로 $f(-2)=-2$이다. 그러면 $f(x)$가 감소함수라는 문제 발문과 위배된다.

ⅱ) $f(2)=k$ 이고 $f(k)=2$여서, $f(x)$에서 2의 [짝]은 k이다.
→ 발문처럼 $f(x)$가 감소함수이려면, k는 음수여야 한다.

$f(2)=k$, $f(k)=2$를 $f(x)$가 기함수라는 점을 이용해 생각해보자. 원점 대칭인 함수이므로, 함수 위의 모든 점이 원점에 대칭으로 대응된다.
따라서, $y=x$에 대칭인 $(2, k)$와 $(k, 2)$는 원점 대칭이어야 한다. $\therefore k=-2$

한편, $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$ 이므로, $g(x)$ 역시 원점 대칭인 기함수이다.

(나): $g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(-2)}=f'(2)+\dfrac{1}{f'(2)}$ ($\because$ 2와 -2는 [짝])
$-5h'(2)=-5g'(f(2))f'(2)=-5f'(2)\times g'(-2)=-5f'(2)\times g'(2)=g'(2)$
→ $g'(2)=f'(2)+\dfrac{1}{f'(2)}\neq 0$, $\therefore f'(2)=-\dfrac{1}{5}$

이제 구해낸 식들을 이용해, $f(x)$의 문자인 a와 b를 구해보자.

$f(x)=-\dfrac{ax^3+bx}{x^2+1}=-x$ 의 근이 2와 -2이다. 정리하면, $ax^2+b=x^2+1$ → $4a+b=5$
$(x^2+1)f(x)=-ax^3-bx$ 의 양변을 미분하자. … $(2x+1)f(x)+(x^2+1)f'(x)=-3ax^2-b$
$x=2$와 $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$를 대입해 정리하면, $12a+b=11$ 이므로, 연립하면 $a=\dfrac{3}{4}$, $b=2$이다.
$4(b-a)=4\times\dfrac{5}{4}=5$ (답)

문제에서 활용한 기술이 무엇인지 되짚어보자.

감소함수에서 [짝]을 찾는 방법이 두 가지임을 우선 사용했다.

첫째, $f(x)=x$의 근을 찾는 것
둘째, $f(a)=b$, $f(b)=a$를 동시에 만족하는 순서쌍 (a, b)를 찾는 것

그 다음으로는 [짝] 관계에서는 원래 함수와 역함수의 기울기가 역수 관계임을 사용했다.

이를 이 문제에서만 특별히 주어지는 성질인 '원점 대칭'과 결부지어 조기에 k 값을 확정한 것도 분명히 배워갈 만한 점이다. 따라서 미분이든 적분이든, 맨 처음 낯선 함수에 대해서는 대칭성 조사를 하자.

그 외에는 계산이 편하도록 곱이 미분 형태로 바꿔준다든지, $(2, f(2))$, $(-2, f(-2))$가 모두 $y=-x$ 위에 있다는 점을 이용한 것 등을 배워갈 수 있겠다.

역함수를 이용해서 풀어야 하는 상황_

1) $f(x)=t$의 근을 $g(t)$라고 주는 경우

$f(g(t))=t$이므로, $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계임을 알 수 있다.
이는 미분이나 적분 모두에서 자주 나오니 확인해두자.

대표적으로 다음과 같은 문제가 있다.

ex 6. 2019 7월 교육청 가형 21

$0<t<1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $f(x)=\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 그은 접선의 x 절편을 $g(t)$라 하자. $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$의 값은?

해설_

$y=\sin x$는 주어진 범위에서 증가함수이므로 역함수가 존재한다.
x 좌표인 P_x를 $h(t)$라 하면, $h(t)$는 f의 역함수이다. 발문에서 요구하는 P에서 그은 접선의 식은

$y=f'(h(t))(x-h(t))+t$ 이다. → x절편은 $g(t)=h(t)-\frac{t}{f'(h(t))}$이다.

한편, $f'(h(t))\times h'(t)=1$을 이용하면, $g(t)=h(t)-th'(t)$이다. 양변을 미분하자.

$g'(t)=-th''(t) \rightarrow \therefore -\frac{2\sqrt{2}}{3}\times h''\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

여기서 개념을 하나 정리하자. → [$f(g(x))=x$인 상황에서, $f''(g(x))=-\frac{g''(x)}{\{g'(x)\}^3}$]

이 개념을 사용해주면, $h''(f(x))=-\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^3}$이다. $f(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$라고 하자.

$f'(\theta)=\cos\theta=\frac{1}{3}$, $f''(\theta)=-\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\rightarrow h''\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times 27=18\sqrt{2}\rightarrow -24$ (답)

2) 복잡한 식의 우변을 x로만 놔둘 수 있을 경우

예를 들어 $\sin f(x)=\dfrac{x}{\pi}$ 라는 식이 있다고 하자. 이때 π를 좌변으로 넘겨 정리하면 다음과 같이 된다.

$(\pi\sin x)\circ f(x)=x \rightarrow \pi\sin x$와 $f(x)$는 역함수 관계임을 사용할 수 있다.

ex 7. 자작

$f(x)=x(x-1)\ (0<x<1)$에 대해 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$와 원점 O를 지나는 직선과

x축이 이루는 각을 $g(t)$라 하자. 이때, $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$의 값이 $a\pi+\ln b$ (a는 유리수, b는 무리수)이다.

$\dfrac{1}{ab^2}$의 값을 구하시오.

해설_

$\tan g(t)=\dfrac{f(t)}{t}=t-1 \rightarrow (\tan x+1)\circ g(x)=x$ 이므로 $g(x)$는 $\tan x+1$의 역함수이다.

$$\int_0^1 g(t)dt=\int_{\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1}^{\tan 0+1} g(t)\,dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\theta\sec^2\theta\, d\theta=[\theta\tan\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan\theta\, d\theta=\frac{\pi}{4}+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\therefore\ 4\times 2=8$(답)

따라서, $y=t$를 긋고 x좌표를 묻는 유형과 복잡한 식의 정리 결과가 '합성함수$=x$'일 때를 묻는 유형 모두 역함수임을 미리 알아두자.

자연스럽게 역함수의 적분으로 넘어가보자.

-역함수 적분

$f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계라고 하자.

$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$가 역함수 적분의 가장 기본 형태이다. $x=g(t)$를 저기다 밀어 넣자.

$\int_{a}^{b} f(g(t))\,dx = \int_{a}^{b} tg'(t)\,dt = [tg(t)]_a^b - \int_{a}^{b} g(t)\,dt$로 표현된다.

그러므로 f와 g를 '왔다갔다'할 때는 서로의 짝을 x에 밀어 넣어주면 된다.
이러면 아래 끝과 위 끝이 잘 맞아서 좋다.

하는 법은 정리하면, 구간 맞추고, $f(g(t))=t$ 이용해서 정리하고 무심하게 g'을 붙이자.

그리고, $\int xf'(x)\,dx$의 형태가 나오면 역함수 적분을 의심하자.

ex 8. 2022학년도 예비 시행 29번
함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하시오. [4점]

정말 29번임에도 쉬이 풀린다.
$F'(x)=t-f(x)$, $F(0)=0 \rightarrow x=\alpha$에서 극점 가지므로, $f(\alpha)=t \rightarrow f(g(t))=t$ _ 역함수 관계.

$\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}\,dt = \int_1^5 \frac{t}{1+e^t} \times f'(t)\,dt$ (구간 맞췄고, $f(g(t))=t$로 정리, f'을 무심하게 툭.)

$f'(t)=e^t+1 \rightarrow \int_1^5 t\,dt = \frac{1}{2}(5^2-1^2)=12$ (답)

이번에는 조금 어려워 보이는 대신, $\int xf'(x)\,dx$의 형태를 연습할 수 있는 문제를 보자.

ex 9. 2022학년도 수능 30번
실수 전체의 집합에서 증가하고 미분 가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$
(나) 함수 $f(x)$이 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

이 문제에 앞서 잠시 치환적분에 담긴 의미를 알아보고자 한다.

$\int f(2t+1)dt$가 있을 때 $(2t+1)$을 치환할 필요가 없다. 어차피 $+1$은 평행이동으로 구간 옮기면 되니 별 문제가 없다. 그러나 t앞의 계수가 2인 것은 상당히 불편하다.

하지만 $f(2t)$와 $f(t)$의 의미를 알면 된다. $f(2t)$는 $f(t)$를 두 배 좌우로 압축한 형태이다.

궁금하면 $\sin x$와 $\sin 2x$를 생각해보라.

$f(2t)$ 입장에서 $f(t)$는 두 배 늘린 것과 다름없다. 그러면 $f(t)$라고 생각하고 적분하면, 넓이가 두 배 넓게 나오는 셈이다. 그러면 보정으로 $\frac{1}{2}$를 곱하면 된다.

$\therefore$ $f(2t+1)$을 적분하고 싶으면 아래 끝, 위 끝만 맞춰주고 $f(t)$ 앞에 $\frac{1}{2}$ 붙여서 적분해주면 된다.

ex. $\int_0^4 \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}t+4\right)dt=\int_4^6 \frac{1}{2}\times 2\times f(t)\,dt=\int_4^6 f(t)\,dt$ 이런 식으로 해주면 된다.

다시 문제로 돌아가보자.

$f(x)$는 우선 미분 가능하다.

(가): $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$

(나): $f(g(x))=x$, $x\geqq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x) \rightarrow g(x)=2f\left(\frac{1}{2}x\right)$

역함수 g를 두 배 좌우로 압축하면 f를 위아래로 두 배 늘리란다. 이때 조심해야 할 것은 둘의 x좌표가 다르다는 것이며 잘 맞춰주어야 한다 (하나는 x, 하나는 $2x$).

$\int_1^8 xf'(x)\,dx$를 구하는 게 문제인데, 형태가 익숙하다. 아마 역함수 적분일 것이다.

우선, $f(1)=1$이고, $g(2x)=2f(x)$이므로, $f(2)=2$. 마찬가지로 반복하면, $f(4)=4$, $f(8)=8$.

$\therefore \int_1^{8.} xf'(x)dx=\int_{g(1)}^{g(8)} g(t)\times\frac{1}{g'(t)}\times g'(t)\,dx=\int_1^8 g(t)\,dt$

우리는 $g(2x)=2f(x) \rightarrow g(x)=2f\left(\frac{1}{2}x\right)$로 x의 범위를 반으로 줄일 수 있다.

또한, 역함수 적분을 할 수 있으므로, 자유자재로 f와 g를 갈아탈 수 있다.

우리는 절반으로 범위를 압축하고, 갈아타고, 다시 줄이고, 갈아탈 수 있다.

1~8이라는 구간을 등비수열로 나눠보자. 어차피 전부 $\int_1^2$로 모을 수 있을 거다. 압축이 가능하므로.

$\int_1^8 g(t)\,dt=\int_1^2 g(t)\,dt+\int_2^4 g(t)\,dt+\int_4^8 g(t)\,dt$

1. $\int_4^8 g(t)\,dt$를 반으로 팍 압축해보자. $\int_4^8 g(t)\,dt=\int_4^8 2f\left(\frac{1}{2}t\right)dt=\int_2^4 2\times2\times f(t)\,dt=4\int_2^4 f(t)\,dt$

2. $\int_2^4 g(t)dt=\int_{f(2)}^{f(4)} g(f(t))\times f'(t)\,dt=\int_2^4 tf'(t)\,dt=4f(4)-2f(2)-\int_2^4 f(t)\,dt$

다르게 표현하면, $\int_2^4 g(t)\,dt=\int_2^4 2f\left(\frac{1}{2}t\right)dt=\int_1^2 4f(t)\,dt=5=16-4-\int_2^4 f(t)\,dt$

$\therefore \int_2^4 f(t)\,dt=7 \rightarrow$ 1. 의 값은 28.

3. $\int_1^2 g(t)\,dt=\int_{f(1)}^{f(2)} g(f(t))\times f'(t)\,dt=\int_1^2 tf'(t)\,dt=2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(t)\,dt$

구한 걸 다 더하자. $4\times7+5+3-\frac{5}{4}=\frac{139}{4} \rightarrow 143$ (답)

위 문제에서 배워갈 것은 우리가 범위를 조절할 수 있다는 사실을 $g(2x)=2f(x)$라는 식에서 알아내고, $\int xf'(x)\,dx$를 보고 역함수 적분을 할 수 있다는 사실을 통해 결국 주어진 범위인 $\int_1^8$을 $\int_1^2$로 압축 가능할 것이라고 생각하고 계산에 들어가야 한다는 사실이다.

어려운 문제 하나만 더 확인해보자.

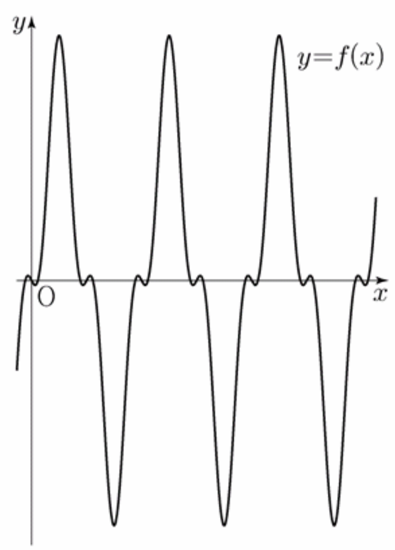
ex 10. 2020학년도 6월 30번

상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x+b\sin x$가 $f(\frac{\pi}{4})=3\sqrt{2}$, $f(\frac{\pi}{3})=5\sqrt{3}$ 을 만족시킨다.

실수 t $(1<t<14)$에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$$ 라 하자.

$\sum_{n=1}^{101} c_n=p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오. [4점]



해설_

우선, 단순히 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$을 이용해서 a와 b를 구하면 각각 $a=16$, $b=-2$이다.
이때 주어진 그래프 상의 작은 극대의 y값이 10이고, 큰 극대의 y값이 14이므로, t는 그 사이에 존재한다.

함수가 증감이 있으므로 극점마다 구간을 나누어 '구간별 역함수'를 구해야 한다.

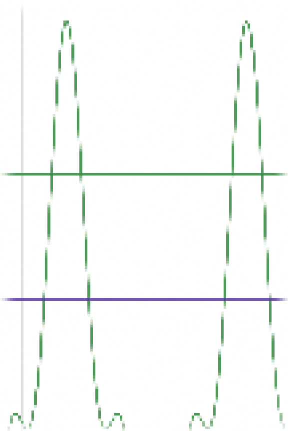
Comment. 구간별 역함수는 별 게 아니다. 단순히 극점 사이에서만 역함수를 구한다는 것으로 역함수를 표시할 때 $g_n(x)$처럼 표시해 몇 번째 구간의 역함수인지만 나타내면 된다.

다시 돌아와서, $y=t$와 만나는 x좌표 x_n을 $g_n(t)$라 하자.

$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(g_n(t))}dt=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}tg'_n(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}f_n(t)dt$로 정리된다.
(이때 $f_n(t)$란, t와 만나는 n번째 교점이 있는 구간의 f를 이른다.)

α와 β는 무수히 많다. 그러므로 f적분 구간을 x좌표로 말하지 않고 y좌표로 표시하게 되면, $f(x)$를 $y=3\sqrt{2}$부터 $y=5\sqrt{3}$이 될 때까지 적분한다고 생각하면 된다.

그림으로 그리자면 다음과 같다.



이때 주의할 점이 하나 있다. 현재 $f(x)$가 주기적으로 반복되는데, 증가하는 부분이 있고 감소하는 부분이 있다.

증가하는 부분에서는 $y=3\sqrt{2}\sim5\sqrt{3}$과 만나는 x좌표가 증가하지만
감소하는 부분에서는 x좌표가 감소하기 때문에 적분이 반대로 된다

즉, 증가하는 부분과 감소하는 부분이 대칭이므로 둘을 적분한 절댓값은 같고, 부호는 다를 것이다. $\cdots\ c_{2n}+c_{2n+1}=0$

$$\sum_{n=1}^{101}c_n=c_1+\sum_{n=1}^{50}(c_{2n}+c_{2n+1})=c_1$$

$$c_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(t)dt=16\left[-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+2[\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{19}{3}+\frac{17}{3}\sqrt{2}\rightarrow 12(\text{답})$$

이 문제에서는 구간별 역함수와 y좌표로 적분구간 표시하는 방법을 잘 기억하자.