수학 2의 성질

무엇보다도 다항함수의 높이 공식과 넓이 공식을 모두 알아두어야 다항함수의 비율에 대한 이해가 깊어집니다.

그렇기에 관련 기출 문제들을 통해 실제 문제에서 이 공식들이 어떻게 쓰이는지 살펴보면서

체화시킬 수 있는 시간을 갖도록 하겠습니다..!

단순 길이 비율은 많이 하셨을텐데 높이 공식이 언제 어떻게 쓰이는지와
차이함수 관점이 언제 쓰이는지 살펴보며 문제 봐주시면 좋을 것 같습니다...!

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 $t$에 대하여 집합 $S$를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 $S$의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]



이 문제를 살펴보면, 우선 $f(x)$가 사차함수이고, 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있습니다.
근데 이제 문제 후반부에 $t=3, t=19$ 를 보면 그 차이가 16인 것을 알 수 있습니다.

이미 높이 공식에 도가 튼 사람은 $h=ak^4$이란 공식이 생각나며 혹시 이 그래프가 대칭인 4차함수가 아닐까? 하는 생각까지 하게 됩니다.

이런 생각은 너무 앞서는 것이긴 하지만, 시험 시간이 얼마 남지 않은 극한 상황에서

개형에 대한 힌트를 얻으실 수 있다는 것입니다.

실제로 이 문제를 풀려면 '$y=f(x)$와 $y=t$'의 위치 관계를 살펴야 합니다.

미분 불가능 점은 결국 중근이 아닌 단일한 근이 생기는 곳들이므로,
$t=3$, $19$ 일 때만 불연속인 걸 통해 두 가지 케이스가 나옵니다.

1) 삼중근과 단일근 하나를 가지는 사차함수 형태

2) 대칭인 사차함수

우선 1)의 경우, 극소점이 $y=3$인데 $f(0)=3$이므로 $x=0$이 극소점임을 알 수 있습니다.
$x=3$의 경우, 극소점 오른쪽이므로 반드시 기울기가 양수이므로 '$f'(3)>0$'이네요.
조건 위반이므로 2)로 넘어갑시다.

2) 대칭인 사차함수의 경우

$a=1$이므로 $k^4=16 \rightarrow k=2$이고, $y=3$이 극솟값, $y=19$가 극대이므로 식을 세우면,
$y=(x-p)^2(x-(p+4))^2+3$ ($k$는 극소점 간의 간격의 절반이므로, $k$의 두 배인 4 차이남.)

$f(0)=p^2\times(p+4)^2+3=3 \quad \therefore p=0$ or $p=-4$

두 가지 $p$의 값 중에 $f'(3)<0$을 고르면 $p=0$임을 그래프 그림을 그려보면 알 수 있습니다.

이렇게, '높이 공식'을 알면 개형 추론에서 도움을 받을 수도 있고,
간결하게 식을 세울 수 있는 시야를 제시해주므로 반드시 필요한 공식이라고 할 수 있습니다.

사차함수를 한 김에 또 더 해봅시다!

사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

| |
|---|
| (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.<br>(나) 함수 $f(x)$는 극솟값 $-10$을 갖는다. |



(가) : $f(x)$는 우함수 $\quad \therefore a=0,\ c=0$
(나) : 극솟값이 -10, 극댓값은 $f(0)$이므로 6입니다. 역시 높이가 16이네요.

그러면 또 식을 간단히 세울 수 있겠죠. 어차피 $k^4=16 \rightarrow k=2$이므로 극소점 간격 4네요.

$f(x)=(x+2)^2(x-2)^2-10$이라고 바로 식이 나오네요. $f(3)=5^2\times1^2-10=15$ ...!

왜 바로 저 식이 나오는지는 극소점 간격이 4이게 그래프를 머릿속에서 살짝 그려보시면,
극소점이 $x=-2$와 $x=2$라는 걸 알 수 있으실 거에요...!

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.<br>(나) 함수 $f(x)$는 극댓값 7을 갖는다. |

$f(1)=2$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? [4점]

① $-6$ ② $-5$ ③ $-4$ ④ $-3$ ⑤ $-2$

또 우함수네여. 0에서 극대!!
$f(x)=x^4+ax^2+7$
$f(1)=1^4+a\times1^2+7=2 \quad \therefore a=-6$
$f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$ , $k=\sqrt{3} \rightarrow ak^4=9$
따라서 극솟값은 $7-9=-2$..! 바로 나오네요!!

이렇게 극한으로 간단하게 식 세우는 걸 하려면 높이 공식을 꼭 알아주세요..!

높이공식에 대한 개괄적인 내용은 여러분들이 잘 안 쓰시는 사차함수로 한 번 살펴봤습니다.
그러면 이번엔 조금 어려운 문제를 삼차함수의 비율과 함께 살펴볼게요!

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 $0$이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

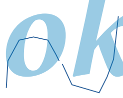
이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오. [4점]

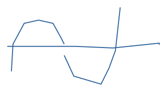
| |
|---|
| (가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 $1$이다.<br>(나) 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다. |

삼차함수 $g(x)$의 이차항 계수가 0이므로 변곡점의 $x$좌표도 0입니다.
$f(x)$의 극대점이 $x=-1$이므로 $x>-1$에서의 $f'$값은 음수겠네요. 이차함수 모양 생각해보면요

그러니까, $h(x)$가 미분 가능하려면 $f'(0)=g'(0)$이므로 $g'(0)<0$이겠고요.
변곡점의 기울기가 음수이므로 삼차함수의 최고차항 계수는 양수겠네요!



모양은 아주 대충 보면  이렇게 생겼겠네요 ㅎㅎ (그림 수준...)

저 그림에 $y=h(0)$도 그려보면,  $y=h(0)$ 이네요.

왼쪽에 생기는 근은 이차함수의 대칭성으로 인해 $-2$이겠네요. 대칭축이 -1이니까요.

(가)를 보면 실근의 합이 1인데 맨 왼쪽 근이 -2, 가운데 근이 0 이므로 맨 오른쪽 근은 3...!

오호라, 그러면 $g(x)=px(x-3)(x+3)+h(0)$이네요. 삼차함수 비율 $1:\sqrt{3}$이므로 극소점은 $x=\sqrt{3}$에 있겠네요. $f$도 뒤늦게 세워보면, $f(x)=qx(x+2)+h(0)$

$f'(0)=g'(0)$ 사용하면, $2q=-9p$

(나) : 최댓값$=f(-1)=-q+h(0)$, 최솟값 $g(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}p+h(0)$ 이네요.

차를 정리하면 $-q+6\sqrt{3}p=(\frac{9}{2}+6\sqrt{3})p=3+4\sqrt{3}=\frac{2}{3}(\frac{9}{2}+6\sqrt{3})$ $\quad \therefore\ p=\frac{2}{3},\ q=-3$

답이 쉽게 나왔네요..! 이 문제보면 비율 관계를 통해 논리적으로 개형 추론을 해나간 후 마지막에만 계산한 것을 볼 수 있습니다. 이렇게 계산 없이 알아내는 것이 많아질수록 문제 풀이의 안정성과 정확성, 심지어 빠르기까지 올라가게 될 겁니다..!

요번에는 차이함수를 봐볼까요?

**30.** 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, $k$는 상수이다.) [4점]

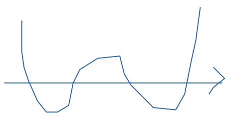
이 문제는 2020학년도 나형 30번 문제로 킬러로 출제된 문제입니다. 하지만 차이함수 관점을 쓰면, 과장없이 암산으로 풀이가 가능합니다.

$f(x)$와 어떤 직선이 네 점에서 만난답니다. 그 점의 $x$좌표는 $-1$, $0$, $1$, $2$이네요.

이때 많은 학생들이 그냥 더블유 모양으로 사차함수를 그리고 직선을 그린 후 네 점을 찍죠. 그러고 접선도 그리고 접선의 교점도 그려볼테지만, 알아내는 것은 아무것도 없이 무지성으로 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$를 쓰고 일일이 미지수를 구하면 정말 혼자서 고생을 하게 되는 겁니다.

한 번 우리 네 점을 지나는 직선을 $g(x)$라고 합시다. $h(x)=f(x)-g(x)$라고 합시다.
그러면 $y=h(x)$의 근이 '$-1$, $0$, $1$, $2$'입니다. 오호라 그러면 $y=h(x)$의 그림은 예쁜 대칭인 사차함수겠네요...!



대충 요런 식?  근데 양 끝 점인 $x=-1$과 $x=2$에서 접선을 그리면,

당연히 그 접선들도 대칭이겠죠..! 그러니 접선의 교점은 결국 중점인 $x=\frac{1}{2}$일 겁니다.

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$ $f(2k)=f(1)=20$ 그러면 직선은 '$y=m(x-1)+20$'이므로 식을 세울 수 있겠네요.

$f(x)=x(x+1)(x-1)(x-2)+m(x-1)+20$

$(2,\ f(2))$의 접선을 구하면, $y=(m+6)(x-2)+m+20$

$(k,0)$을 지나므로 '$x=\frac{1}{2}$ & $y=0$' 대입하면, $0=(m+6)(\frac{1}{2}-2)+m+20$ $\therefore\ m=22$

'$f(4k)=f(2)=42$' 답이 나왔네요!!

이렇게 차이함수를 이용하여 식을 세우면, 계산량도 폭발적으로 줄일 수 있을 뿐만 아니라 시각적으로도 확인 가능한 것이 많습니다.

두 함수의 위치관계를 살필 때는 언제나 '차이함수'를 보자고요! 심화문제 봅시다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 $\alpha$가 존재한다.<br>(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 $\beta$가 존재한다. |

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고, $f'(\alpha)=g'(\alpha)=\ -16$

(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$

계속해서 식이 $f$와 $g$의 관계를 통해서 나타나고 있습니다. 그러니 우리는 차이함수...!
$h(x)=f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$

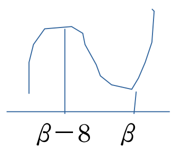
여기서 우리가 안 쓴 조건들을 생각해봅시다.
'-16, 16'이라는 값과 $g(x)$의 최고차항의 계수가 2라는 것을 전혀 이용 못했네요.



'-16, 16'의 값은 모두 $h'(x)$와 관련된 식이네요. 그럼 우선, $h'(x)$를 표현해보겠습니다.
$h'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ ($\because h'(\alpha)=h'(\beta)=0$) 그리고 값을 사용해봅시다.

근데 문제는 $h'(x)$라고 하는 순간 -16, 16 이라는 값은 사용하지 못합니다.
그러므로 $f'$이나 $g'$을 이용해야 할 듯하네요..!
$g'(\alpha)=-16,\ g'(\beta)=16$ 그리고 $g$의 계수도 써보면 $g'$의 계수는 4이겠죠.

근데 $g'$은 일차함수 아닌가요..? 기울기$=g'=4$이므로 $\beta$와 $\alpha$의 함숫값 차가 32일 때 $\beta-\alpha=8$
$\therefore\ \alpha=\beta-8\rightarrow h'(x)=3(x-(\beta-8))(x-\beta)$

$h(x)$의 그림을 그려보면, 

이런 모양이겠죠.

$h(x)=f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$ 이므로 $\alpha$ $(=\beta-8)$에서 $h(x)$가 $y$축과 접하죠.
게다가 비율 관계를 써주면 $\beta-8/\beta-4/\beta/\beta+4$ 이므로 $h(x)$는 다음과 같이 표현할 수 있죠.
$h(x)=(x-(\beta-8))^2(x-(\beta+4))$

문제에서 구하는 건 $-h(\beta+1)=-(\beta+1-(\beta-8))^2(\beta+1-(\beta+4))=-9^2\times(-3)=243$ ..!

차이함수, 비율관계를 통해 성공적으로 식을 줄이는 모습을 볼 수 있습니다. 다항함수에서 제일 중요한 건 최대한 식을 간단히 세워 함수를 표현하는 것임을 잊지 말아주세요..!

 번외로 수학 2 극한이나 연속 단원에서 자주 쓰이는 극한식을 살펴보겠습니다.
미적분 선택자의 경우 미적분에서도 자주 나오니 잘 봐두시길 바랍니다...!

'다항함수 $f(x)$에 대해 $f(x)=(x-a)^nQ(x)$ (단, $Q(a)\neq 0$)이면, $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=n$'

다항함수이면 좌변과 우변이 서로 필요충분관계이기 때문에 저 사실을 알아두면 문제 풀이 시 비약적으로 빨리 풀 수 있습니다. 예제와 함께 살펴볼 거에요 이것도...!

이 문제는 18수능 18번입니다.

최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)^2\}}=\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12



$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}\times\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{4}$입니다. $f(x)$에 $(x-2)$라는 인수가 n개 있다고 합시다.
$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\frac{1}{n}$이겠죠. 단, $n\geqq 2$라면, $f'(2)=0$일 겁니다. 그러면 극한식의 값이 존재할 수 없겠죠. $\frac{1}{n}\times\frac{1}{0}$ 꼴이니까요. 그러므로 $n=1$이며, $f'(2)=4$이겠죠. 식을 세워보면,
$f(x)=(x-2)(x-1)(x-a)$ (단, $a\neq 2$ $\because n=1$)이고, $f'(2)=2-a=4$ $\therefore a=-2$,

$f(3)=2(3-a)=10$ 답 나왔네요!!

제가 알려드렸던 필요충분조건 식을 몰랐다면, 식의 의미를 생각하지 못하고 그냥 계산 문제로 받아들였을 겁니다.

이건 비교적 쉬운 문제에 해당하고, 다른 문제들에 이 식이 녹아있을 때, 이것만 알아도 문제의 단순화가 가능할 겁니다.

심화문제는 딱히 수2에는 없고 미적분에 있어서 미적분 문제로 해보겠습니다.
(미적 선택자 아니시더라도 체화하고 싶다면 찬찬히 읽어보시길 바랍니다 :)

*미적분 선택자 아닌 사람들에게 필요한 정보

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

2018학년도 6월 모의고사 21번 (킬러)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=3,\ \lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49



차근차근 해봅시다. $\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to1}(x-1)\times\frac{f'(x)}{f(x)}=3$

우리는 이 식을 보고 $f(x)=(x-1)^3(x-a)$ (단, $a\neq1$)임을 알 수 있습니다.

그리고 $g(x)\sin x=h(x)$라고 합시다.

$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\frac{h'(x)}{h(x)}}=\frac{1}{4}$ 여기서 우리가 알고 있는 형태로 바꾸려면 어떻게 해야 할까요?

$x\to0$이면 $\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)}{f(x)}$여야 하므로 이렇게 식을 바꿔봅시다. $\lim_{x\to0}\frac{\frac{xf'(x)}{f(x)}}{\frac{xh'(x)}{h(x)}}=\frac{1}{4}$

$f(x)$는 4차함수이나 이미 $(x-1)$이라는 인수를 3개 가지므로 $x$라는 인수를 가지려면,

0개, 1개만 가능합니다. 그러나 0개를 가져버리면 $\lim_{x\to0}\frac{\frac{xf'(x)}{f(x)}}{\frac{xh'(x)}{h(x)}}=\frac{1}{4}$의 분자가 0이 되죠.

분자가 0인데 수렴하려면 분모인 $h(x)$도 $x$라는 인수를 0개 가져야 하는데, $h(x)$의 경우

$h(x)=g(x)\sin x$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$임을 이용하면,,$\sin x$로 인해 $\lim_{x\to0}\frac{xh'(x)}{h(x)}\geq1$이 성립합니다.

($\sin x$가 $x=0$ 주변에서는 $x$와 거의 동일하므로 인수 개수를 셀 때 $x$로 처리할 수 있다.)

따라서 분자가 0인 건 불가능하므로 $f(x)$에 $x$라는 인수가 반드시 존재한다. 1개!!

$\therefore f(x)=x(x-1)^3 \rightarrow \lim_{x\to0}\frac{xf'(x)}{f(x)}=1$ 그러므로 $\lim_{x\to0}\frac{xh'(x)}{h(x)}=4$

$\therefore h(x)=x^4$ 따라서, $g(x)\sin x=x^4 \approx x^3\times\sin x$ $\therefore g(x)=x^3$

$f(x)+g(x)=x((x-1)^3+x^2)$ 답은 51 ..!

결국, '다항함수 $f(x)$에 대해 $f(x)=(x-a)^nQ(x)$ (단, $Q(a)\neq0$)이면, $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=n$'을 알면, 계산이 복잡한 문제를 논리 문제로 풀어버릴 수 있는 것입니다.
제가 이 문제 해설을 설명 때문에 길게 썼지만, 사실 이 문제를 풀 때 했던 생각은,

아 $f$한테 $(x-1)$ 인수 개수가 3개네~ 근데 $x$라는 인수도 하나 있네~ $f(x)=x(x-1)^3$이구나 그러면 $g(x)=x^3$이구나~ 하면 문제가 풀리는 거죠..!

이런 식으로 계산 문제에 의미를 더해 논리 문제로 바꿔줄 수 있는 저 식을 기억합시다!