제 2 교시

일간 우주설 프로젝트 1일차

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

역함수가 포함된 함수의 미분 가능성

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

우주설

역함수가 포함된 함수의 미분가능성

제 2 교시 수학 영역 (미적분)

홀수형

시작 전 사고정리

시작하기 전 각 문항을 풀어본 뒤 자신의 풀이를 정리하자.

1. 두 상수 $a, b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]
(21학년도 수능 가형 28번, 제한시간 5분)

> (가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) $h'(3)=2$

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x^3+x+2$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점] (우주설 자작문항, 제한시간 5분)

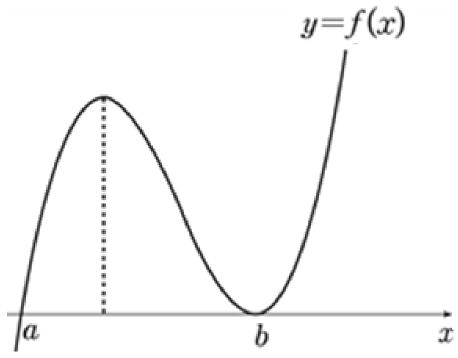
> (가) 함수 $|x|-|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 합은 음이 아니다.

일반적 사고과정

두 상수 $a, b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를
$f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 이라 하자.(1) 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여(2) 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]
(21학년도 수능 가형 28번)

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.(3)
(나) $h'(3)=2$(4)

(1):삼차함수 $f(x)$의 대략적인 개형을 그려볼까?



흠... 일단은 이 정도만 해보고 다음을 볼까.

(2): 함수 $g(x)$는 $g'(x)\geq 1$인 역함수가 존재하는 증가함수.

(3): (가)에서 제시한 $(x-1)|h(x)|$를 함수 $I(x)$라 하면,

$$I(x)=\begin{cases}(x-1)h(x) & (h(x)\geq 0)\\ -(x-1)h(x) & (h(x)<0)\end{cases}$$

이고, $y=x-1$과 $y=h(x)$ 모두 미분가능한 함수니까
$I(x)$가 미분 불가능 할 만 한 점은 $h(x)=0$인 순간이겠네.

$h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$이고, $f(x)=0$의 실근은 $x=a, b$뿐이니
$g^{-1}(x)=a, b$인 지점을 찾으면, $x=a^3+a+1,\ b^3+b+1$이네.
$(h(a^3+a+1)=h(b^3+b+1)=0)$

$$I'(x)=\begin{cases}\{h(x)+(x-1)h'(x)\} & (h(x)>0)\\ -\{h(x)+(x-1)h'(x)\} & (h(x)<0)\end{cases}$$

를 관찰하면 $I'(a^3+a+1)=I'(b^3+b+1)=0$ 이어야
$I(x)$는 실수 전체에서 미분가능 하겠구나.

$h'(x)=f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$이므로

$$\begin{aligned}I'(b^3+b+1)&=h(b^3+b+1)+(b^3+b)h'(b^3+b+1)\\&=(b^3+b)\times\{f'(b)\times(g^{-1})'(b^3+b+1)\}\\&=0\end{aligned}$$

이고, $I'(a^3+a+1)=(a^3+a)\times\{f'(a)\times(g^{-1})'(a^3+a+1)\}$ 인데
$(g^{-1})'(x)>0$이고, 삼차함수 그래프를 보아하니 $f'(a)\neq 0$이므로
$I'(a^3+a+1)=0$이려면 $a=0$일 수 밖에 없겠구나...
$f(x)=x(x-b)^2$이네.

(4):
$$\begin{aligned}h'(3)&=f'(g^{-1}(3))(g^{-1})'(3)\\&=f'(1)\times\frac{1}{g'(1)}\\&=\{(1-b)^2+2(1-b)\}\times\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이므로 $b=5$이고, $f(x)=x(x-5)^2$구나.

끝났네. $f(8)=72$

일반적 사고과정

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x^3+x+2$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때(1), $f(4)$의 값을 구하시오. [4점] (우주설 자작문항, 제한시간 5분)

(가) 함수 $|x|-|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.(2)
(나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 합은 음이 아니다.(3)

(1): 음... 당장은 할 수 있는 게 없으니 괜히 뭐라도 하려고 하지 말고 '그렇구나.' 정도로 생각하자.

(2): 151130에서 봤던 아이디어다.
함수 $y=|x|$가 $x=0$에서만 미분 불가하고,
$x=0$에서 $|x'|=1$이므로
함수 $y=|h(x)|$도 $x=0$에서만 미분 불가하고,
$|h'(0)|=1$이어야겠네.

그렇게 되려면... $h(0)=0$이어야 하네. 이거부터 해석하자.
$h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$에 대입하자.
$h(0)=(f\circ g^{-1})(0)$에서 $g^{-1}(0)=-1$이므로 $f(-1)=0$.
$|h'(0)|=1$도 해석해보면

$$h'(0)=f'(g^{-1})(0)\times(g^{-1})'(0)$$
$$=f'(-1)\times\frac{1}{g'(-1)}$$

$g'(-1)=4$이므로 $f'(-1)=-4$ 또는 4구나.

(3): $f(x)=0$의 실근이 $x=-1$외에도 적어도 하나 있구나.
해당 실근을 a라 해보자. (단, $a\geq 1$)

$h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$이므로 $h(x)=0$을 만족시키는 실근이 하나 더 생기고 ($g^{-1}(x)=a$가 되는 x가 존재) 이는 함수 $y=|h(x)|$가 $x=0$에서만 미분 불가하다는 조건을 위배할 수도 있겠네... 확인 해야겠다.

$g^{-1}(b)=a$라 하면, $h(b)=0$이고, 함수 $y=|h(x)|$가 $x=b$에서 미분가능하려면 $h'(b)$가 0이 되어야 하네.
그런데 $h'(x)=f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$에서
$(g^{-1})'(x)>0$이므로 $h'(b)=0$이려면, $f'(g^{-1}(b))=0$.
$f'(a)=0$이므로 $f(x)=(x+1)(x-a)^2$

$f'(-1)=-4$ 또는 4 를 사용하면 $a=1$이고,

$f(4)=45$

제시하는 사고과정

두 상수 $a, b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 이라 하자.(1) 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여(2) 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]
(21학년도 수능 가형 28번)

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.(3)
(나) $h'(3)=2$(4)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여 아래의 함수가 실수전체의 집합에서 미분가능함이 널리 알려져 있다.

1. $f(x)\pm g(x)$
2. $f(x)g(x)$
3. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$)
4. $f(g(x))$

위 내용을 이용하여 역함수가 들어간 함수의 미분가능성을 판단하는 사고과정을 제사하겠다.

(1): 일반적인 사고와 동일
(2): 함수 $g(x)$는 실수전체에서 미분가능하고 $g'(x)\neq 0$이므로 함수 $g^{-1}(x)$는 실수 전체에서 미분가능하다.

(3): (가)에서 제시한 $(x-1)|h(x)|$를 함수 $I(x)$라 하면, 함수 $I(g(x))$의 미분가능성을 판단하자.

함수 $I(g(x))$가 실수 전체에서 미분가능하다면,

함수 $g^{-1}(x)$가 실수 전체에서 미분가능하므로

두 함수를 합성한 $I(x)$가 실수전체의 집합에서 미분가능함이

자명하기 때문이다.

$I(g(x))=\{g(x)-1\}\times|f(x)|$

$=(x^3+x)\times\left|(x-a)(x-b)^2\right|$

이제부터의 과정은 수학II 이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x^3+x+2$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때(1), $f(4)$의 값을 구하시오. [4점] (우주설 자작문항, 제한시간 5분)

(가) 함수 $|x|-|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.(2)
(나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 합은 음이 아니다.(3)

(1): 일반적인 사고와 동일
(2): (가)에서 제시한 $(x-1)|h(x)|$를 함수 $I(x)$라 하면, 함수 $I(g(x))$의 미분가능성을 판단하자.

함수 $I(g(x))$가 실수 전체에서 미분가능하다면,

함수 $g^{-1}(x)$가 실수 전체에서 미분가능하므로

두 함수를 합성한 $I(x)$가 실수전체의 집합에서 미분가능함이

자명하기 때문이다.

$I(g(x))=|g(x)|-|f(x)|$

$=\left|x^3+x+2\right|-|f(x)|$

이제부터의 과정은 수학II 이다.

2일차 예습과제

정답을 내지 못하여도 상관없으니 도전하여 봅시다.

3. 실수 전체에서 정의된 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=ke^{2t} \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
(나) $g(0)=g'(0)=0$ 이다.

함수 $|f(x)-x|$는 양의실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 양수 k의 최솟값은? (우주설 자작문항, 제한시간 7분)

① $\frac{1}{8e}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{27}{8e^3}$ ④ $\frac{8}{e^4}$ ⑤ $\frac{125}{8e^5}$

4. 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=4(t-1)^3+2 \\ y=ke^{2t} \end{cases}$$

이다. 실수 전체에서 정의된 함수 $|f(x)-2x|$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최솟값이 ae^b일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.) [4점]
(우주설 자작문항, 제한시간 8분)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.