제 2 교시

수학 영역 (가형)

홀수형

5지선다형

1. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식
$\left| a_n - \frac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n} \right| < \left(\frac{1}{4}\right)^n$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

중요도	★★	쪽 번	013 002	문항코드	20010-0013

2. 자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2+2nx-n=0$의 서로 다른 두 실근을 α_n, $\beta_n\,(\alpha_n<\beta_n)$이라 하자. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(\alpha_n)$, $\mathrm{B}(\beta_n)$에 대하여 선분 AB를 $n+1:1$로 외분하는 점을 $\mathrm{P}(p_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} p_n$ 의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

중요도	★★★	쪽 번	014 001	문항코드	20010-0017

3. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ n^3)$과 원점 O를 지나는 원 C 가 있다. 곡선 $y=x^3$ 위의 점 P에서의 접선 l과 원 C 위의 점 P에서의 접선 m이 서로 수직일 때, 원 C의 중심의 y좌표를 a_n 이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

중요도	★★★	쪽 번	014 002	문항코드	20010-0018

4. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+2x+1}{x^{2n}+1}$ 과 수열 $\{a_n\}$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)\{f(x-n)+a_n\}$가 $x=1$에서 연속일 때, $\sum_{n=1}^{11}a_n$ 의 값은? [3점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

중요도	★★★	쪽 번	014 003	문항코드	20010-0019

5. 첫째항이 3, 공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

중요도	★★★★	쪽 번	017 001	문항코드	20010-0020

6. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$이다. $80\alpha^2$의 값을 구하시오. (단, α는 상수이다.) [3점]

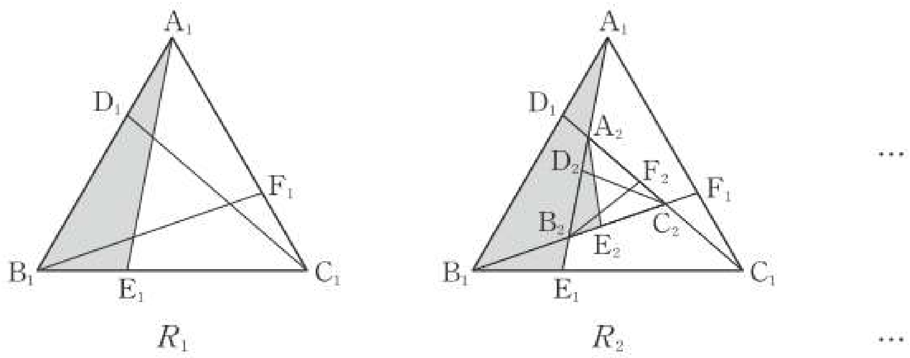
중요도	★★★	쪽 번	017 002	문항코드	20010-0021

7. 첫째항이 3이고 공비가 $r\,(0<r<1)$인 등비수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}=\sum_{k=2n+1}^{\infty}a_k$ 를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+2}$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

중요도	★★★	쪽 번	024 006	문항코드	20010-0036

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 을 $1:2$로 내분하는 점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하고, 삼각형 $A_1B_1E_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 두 선분 A_1E_1, C_1D_1의 교점을 A_2, 두 선분 A_1E_1, B_1F_1의 교점을 B_2, 두 선분 B_1F_1, C_1D_1의 교점을 C_2라 하고, 삼각형 $A_2B_2C_2$에 대하여 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



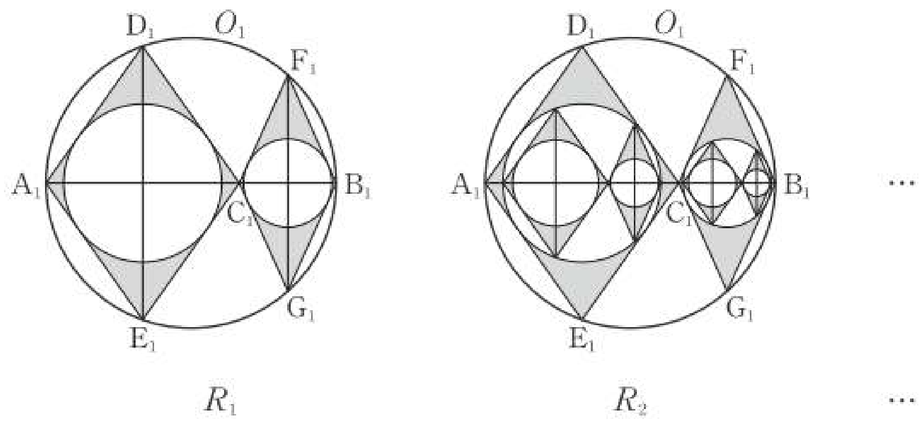
① $2\sqrt{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

중요도	★★★★	쪽 번	024 008	문항코드	20010-0038

9. 곡선 $y=2x^2$ 위의 한 점 $(a_n,\ 2(a_n)^2)$에서의 접선을 l_n, 직선 l_n의 x절편을 a_{n+1} 이라 할 때, 곡선 $y=2x^2$과 직선 l_n, 직선 $x=a_{n+1}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n 이라 하자. $a_1=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

중요도	★★★★	쪽 번	025 002	문항코드	20010-0040

10. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원 O_1의 지름 A_1B_1에 대하여 선분 A_1B_1을 $2:1$로 내분하는 점을 C_1이라 하자. 선분 A_1C_1의 중점을 지나고 선분 A_1C_1에 수직인 직선이 원 O_1과 만나는 점을 각각 D_1, E_1, 선분 C_1B_1의 중점을 지나고 선분 C_1B_1에 수직인 직선이 원 O_1과 만나는 점을 각각 F_1, G_1이라 하자. 두 사각형 $A_1E_1C_1D_1$과 $C_1G_1B_1F_1$에 각각 내접하는 원을 그리고 사각형의 내부와 사각형에 내접하는 원의 외부의 공통 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 두 원에 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하고, 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n 에 색칠된 부분의 넓이를 S_n 이라 하면 $\lim_{n\to\infty} S_n = a\sqrt{2}+b\sqrt{5}+c\pi$이다. $11(a+b+c)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 유리수이다.) [3점]



중요도	★★★★★ ★★★★★	쪽 번	025 003	문항코드	20010-0041

11. 좌표평면에서 곡선 $y=e^x$ 위의 서로 다른 두 점 A(0, 1), P(t, e^t)에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 x축 위의 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0} f(t)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

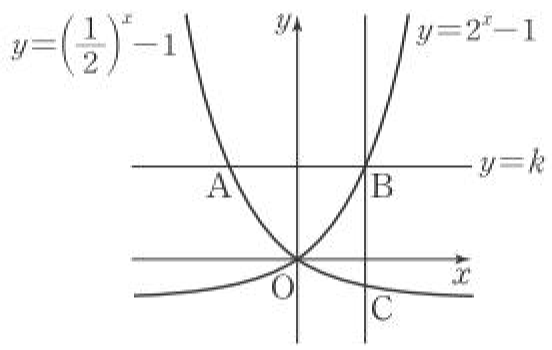
중요도	★★★	쪽 번	037 004	문항코드	20010-0057

12. 자연수 n에 대하여 $a_n=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} kx\{\ln(x+k)-\ln x\}$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

중요도	★★★	쪽 번	038 001	문항코드	20010-0058

13. 그림과 같이 양수 k에 대하여 직선 $y=k$가 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$, $y=2^x-1$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\lim_{k\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}}{\mathrm{k}}$의 값은? [4점]



① $\frac{2}{\ln 2}$ ② $\frac{3}{\ln 2}$ ③ $\frac{4}{\ln 2}$ ④ $\frac{5}{\ln 2}$ ⑤ $\frac{6}{\ln 2}$

중요도	★★★	쪽 번	038 004	문항코드	20010-0061

14. 두 직선 $y=mx-2$와 $y=\frac{1}{2}x+2$가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 모든 m의 값의 합은? [4점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

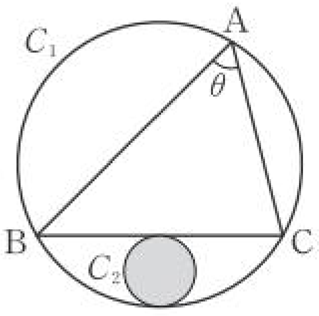
중요도	★★	쪽 번	045 006	문항코드	20010-0067

15. 빈 문제입니다.

16. 빈 문제입니다.

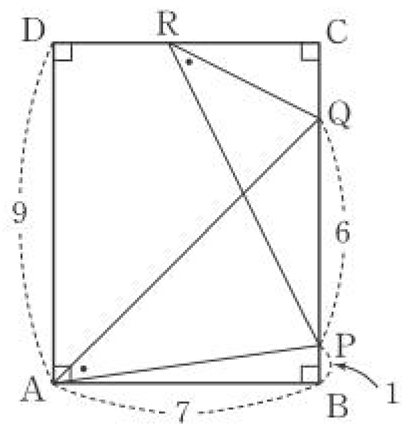
17. 그림과 같이 예각삼각형 ABC에 외접하는 원 C_1의 반지름의 길이는 2이다. 원 C_1과 선분 BC로 둘러싸인 두 부분 중 넓이가 작은 쪽에서 원 C_1과 선분 BC에 동시에 접하는 원을 그렸을 때, 그 크기가 가장 큰 원을 C_2라 하자. $\angle \mathrm{CAB} = \theta$일 때 원 C_2의 넓이를 $f(\theta)$라 하면 $\lim_{\theta \to 0} \frac{f'(\theta)}{\theta^3} = k\pi$이다. $15k$의 값을 구하시오.

[4점]



중요도	★★★★★	쪽 번	049 010	문항코드	20010-0071

18. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 7$, $\overline{\mathrm{AD}} = 9$인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 BC 위의 두 점 P, Q와 선분 CD 위의 한 점 R가 다음 조건을 만족시킬 때, $10\overline{\mathrm{DR}}^2$의 값을 구하시오. [4점]



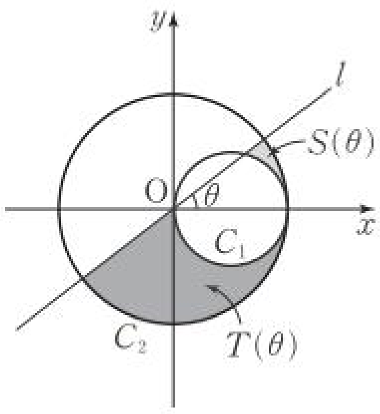
(가) $\overline{\mathrm{BP}} = 1$, $\overline{\mathrm{PQ}} = 6$	
(나) $\angle \mathrm{PAQ} = \angle \mathrm{PRQ}$	

중요도	★★★★★	쪽 번	049 010	문항코드	20010-0078

19. 그림과 같이 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 직선을 l이라 하자. 두 원

$C_1 : (x-2)^2+y^2=4$, $C_2 : x^2+y^2=16$

과 직선 l로 둘러싸인 도형 중 직선 l의 아래쪽에 있으면서 제1사분면에 있는 색칠한 부분의 넓이를 $S(\theta)$, 제3사분면, 제4사분면에 있는 색칠한 부분의 넓이를 $T(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)-4\theta+4\sin\theta}{\theta^2\{6\pi-T(\theta)\}}$ 의 값은? [4점]

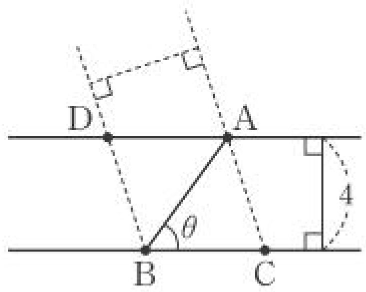


① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

중요도	★★★★	쪽 번	052 002	문항코드	20010-0082

20. 그림과 같이 폭이 4로 일정한 종이의 윗변의 한 점을 A, 아랫변의 한 점을 B라 하자. 선분 AB를 접는 선으로 종이를 접어서 아랫변의 점 C와 윗변의 점 D가 일치할 때, $\angle ABC=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 사각형 ADBC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(단, 종이의 윗변과 아랫변은 평행한 선분이고 종이의 길이는 충분히 길다.)



< 보 기 >

ㄱ. $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=16$

ㄴ. $S(\theta)=48$이면 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

ㄷ. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} \frac{6\times\left\{S\left(\frac{\pi}{6}\right)-S(\theta)\right\}}{(6\theta-\pi)\times S\left(\frac{\pi}{6}\right)\times S(\theta)}=\frac{1}{8}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★	쪽 번	052 003	문항코드	20010-0083

21. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{g'(0)}{g(0)}$의 값은? [3점]

(가) $f(x)\sqrt{g(x)}=\frac{e^x}{\cos 2x}$

(나) $\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{1}{2}$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

중요도	★★★★★	쪽 번	066 001	문항코드	20010-0104

22. 두 함수 $f(t)=3t^5-5t^4+t$, $g(t)=t^4+t^2-2$에 대하여 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$를 l이라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{\Delta t \to 0}\frac{g(1+2\Delta t)}{f(1+\Delta t)+1}=-3$

ㄴ. 곡선 l은 점 (-2, 0)을 지난다.

ㄷ. 곡선 l 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$가 존재한다.

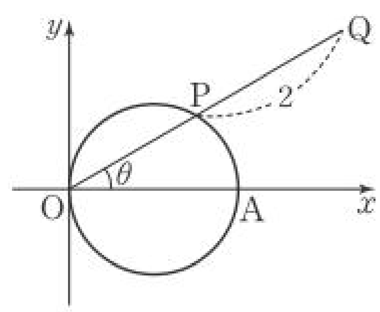
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★★	쪽 번	066 002	문항코드	20010-0105

23. 함수 $y=2^x-2^{-x}$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$라 하자. 함수 $g(t)=f(t)\times\{4^{f(t)}+4^{-f(t)}\}$일 때, $\left\{g'\left(\frac{15}{4}\right)-15\right\}\times 68\ln 2$의 값을 구하시오. (단, t는 실수이다.) [3점]

중요도	★★★★	쪽 번	066 004	문항코드	20010-0107

24. 그림과 같이 두 점 O(0, 0), A(2, 0)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점 중 제1사분면의 점을 P라 하자. 반직선 OP 위의 점 Q가 $\overline{PQ}=2$를 만족시킨다. $\angle POA=\theta$일 때, 점 Q의 x좌표와 y좌표의 합을 $f(\theta)$라 하자. $f(\theta)$의 최댓값은? [3점]



① $\sqrt{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

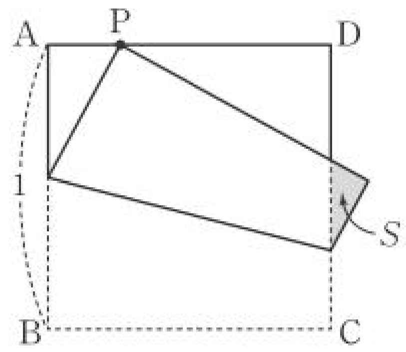
중요도	★★★★★	쪽 번	075 007	문항코드	20010-0114

25. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=n(1-x)^n\ (0<x<1)$위의 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4e}$　② $\frac{1}{2e}$　③ $\frac{1}{e}$　④ 1　⑤ e

중요도	★★★★	쪽 번	081 004	문항코드	20010-0127

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 색종이가 있다. 선분 AD 위의 점 P에 대하여 점 B와 점 P가 일치하도록 색종이를 접었을 때, 정사각형 ABCD의 외부에 생기는 색칠한 도형의 넓이를 S라 하자. S의 값이 최대일 때, 선분 AP의 길이는? [4점]



① $\frac{-2+\sqrt{7}}{6}$　② $\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$　③ $\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$
④ $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$　⑤ $\frac{-1+2\sqrt{7}}{6}$

중요도	★★★★	쪽 번	082 002	문항코드	20010-0129

27. 함수 $f(x)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-|x|}\sin x$와 양의 실수 k에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 $g(k)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f'(0)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

ㄴ. $g(e^{-\pi})=2$

ㄷ. $e^{-\frac{5}{2}\pi}\le k\le 2$에서 함수 $g(k)$가 불연속인 k의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★	쪽 번	082 003	문항코드	20010-0130

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=xe^{-x}-2x\int_0^1 f(t)dt+4x\int_0^1 tf(1-t^2)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $1-\frac{1}{e}$ ② $1-\frac{2}{e}$ ③ $1-\frac{3}{e}$
④ $1-\frac{4}{e}$ ⑤ $1-\frac{5}{e}$

중요도	★★★★	쪽 번	093 003	문항코드	20010-0146

29. $x>0$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, n은 자연수이다.) [2점]

< 보 기 >

ㄱ. $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}dx = \ln 2$

ㄴ. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$

ㄷ. $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\ln(x+1)}dx > \frac{1}{2}\ln 2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★★	쪽 번	094 001	문항코드	20010-0148

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=(ax-2)e^{a(-x+2)}$은 $x=b$에서 최댓값을 갖는다. 함수 $g(a)=\int_0^b |f(x)|dx$가 $a=k$에서 최솟값을 가질 때, k의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

중요도	★★★★★	쪽 번	094 002	문항코드	20010-0149

31. $0 \le x \le \pi$일 때, 함수 $f(x)=\int_{0}^{\pi}|\sin(t-x)-\sin 2t|\,dt$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [2점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

중요도	★★★★	쪽 번	094 003	문항코드	20010-0150

32. $0<x<1$일 때, 함수

$f(x)=\int_{x}^{x+1}\{\pi|\sin(\pi t)|-|1-t|e^{1-t}\}\,dt$는 $x=a$에서 극댓값 b를 갖는다. ab의 값은? [2점]

① $e^{\frac{1}{e+1}}$ ② $e^{\frac{2}{e+1}}$ ③ $e^{\frac{3}{e+1}}$ ④ $e^{\frac{4}{e+1}}$ ⑤ $e^{\frac{5}{e+1}}$

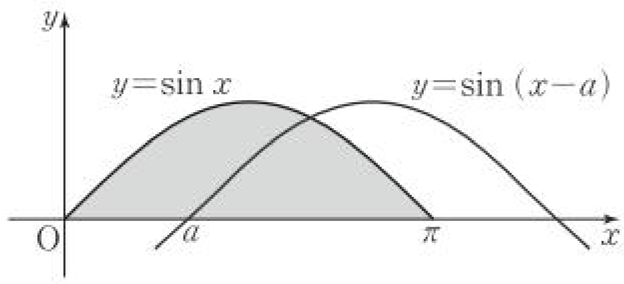
중요도	★★★★★	쪽 번	094 004	문항코드	20010-0151

33. $\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$ 의 값은? [2점]

① $2\ln 2-2$ ② $2\ln 2-1$ ③ $2\ln 2$
④ $2\ln 2+1$ ⑤ $2\ln 2+2$

중요도	★★★	쪽 번	097 002	문항코드	20010-0153

34. 그림과 같이 $0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y=\sin(x-a)\,(0<a<\pi)$가 이등분할 때, 상수 a의 값은? [2점]



① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{5}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

중요도	★★★★	쪽 번	108 002	문항코드	20010-0171

35. 닫힌 구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=x\sin x$가 있다. $0<x<\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선 l이 원점을 지날 때, 접선 l과 함수 $f(x)=x\sin x$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? [2점]

① $\dfrac{\pi^2-8}{8}$ ② $\dfrac{\pi^2-7}{8}$ ③ $\dfrac{\pi^2-6}{8}$ ④ $\dfrac{\pi^2-5}{8}$ ⑤ $\dfrac{\pi^2-4}{8}$

중요도	★★★★	쪽 번	110 003	문항코드	20010-0180

36. 정의역이 $\left\{x \mid -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right\}$인 함수 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \tan\theta\, d\theta$가 있다. $0<t<\dfrac{\pi}{2}$인 실수 t에 대하여 $0\le x\le t$일 때 곡선 $y=f(x)$의 곡선의 길이를 $l(t)$라 하자. $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left\{l(t)+\ln\frac{\sin t}{f'(t)}\right\}$의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

중요도	★★★★	쪽 번	110 004	문항코드	20010-0181

1)

[정답/모범답안]

5

[해설]

$a_n-\dfrac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n}=b_n$이라 하면 $|b_n|<\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$에서

모든 자연수 n에 대하여

$-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n<b_n<\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

$a_n=b_n+\dfrac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n}$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+5}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1}=\dfrac{0+5}{0+1}=5$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n+\dfrac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n}\right)=0+5=5$

2)

[정답/모범답안]

1

[해설]

$x^2+2nx-n=0$에서 $x=-n\pm\sqrt{n^2+n}$이므로

$\alpha_n=-n-\sqrt{n^2+n}$, $\beta_n=-n+\sqrt{n^2+n}$

두 점 $A(\alpha_n)$, $B(\beta_n)$에 대하여 선분 AB를 $n+1:1$로 외분하는 점 P의 좌표 p_n 은

$$p_n=\frac{(n+1)(-n+\sqrt{n^2+n})-(-n-\sqrt{n^2+n})}{n}$$

$$=-\frac{n^2}{n}+\frac{(n+2)\sqrt{n^2+n}}{n}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}-n+\frac{(n+2)\sqrt{n^2+n}}{n}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\sqrt{n^2+n}-n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2(n^2+n)-n^4}{n((n+2)\sqrt{n^2+n}+n^2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+8n^2+4n}{(n^2+n)\sqrt{n^2+n}+n^3}=\frac{5}{2}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{5}{2}$$

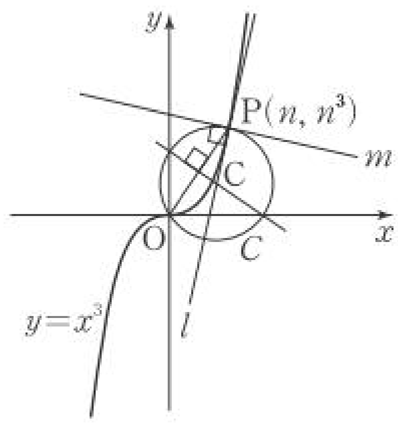
3)

[정답/모범답안]

5

[해설]

$f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$이므로 곡선 $y=x^3$ 위의 점 P $(n,\ n^3)$에서의 접선 l의 방정식은 $y-n^3=3n^2(x-n)$이므로 직선 l의 방정식은 $y=3n^2x-2n^3$ . . . . ㉠



직선 l이 점 P를 지나고 원 C 위의 점 P에서의 접선 m과 서로 수직이므로 직선 l은 원의 중심 C를 지난다.

그러므로 원 C의 중심 C는 직선 l과 선분 OP의 수직이등분선의 교점이다.

직선 OP는 기울기가 $\dfrac{n^3}{n}=n^2$이므로 선분 OP의 수직이 등분선은 기울기가 $-\dfrac{1}{n^2}$이고 점 $\left(\dfrac{n}{2},\ \dfrac{n^3}{2}\right)$을 지나는 직선이다.

즉, $y-\dfrac{n^3}{2}=-\dfrac{1}{n^2}\left(x-\dfrac{n}{2}\right)$

$y=-\dfrac{1}{n^2}x+\dfrac{n^3}{2}+\dfrac{1}{2n}$ . . . . ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{\dfrac{5}{2}n^3+\dfrac{1}{2n}}{3n^2+\dfrac{1}{n^2}}$이므로 이를 다시 ㉠에 대입하여 y좌표를 구하면

$$a_n=\frac{\dfrac{3}{2}n^5-\dfrac{1}{2}n}{3n^2+\dfrac{1}{n^2}}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2n^2}}{3n^2+\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2n^4}}{3+\dfrac{1}{n^4}}=\frac{1}{2}$$

4)

[정답/모범답안]

4

[해설]

(ⅰ) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x^{2n-1}}+\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{x+0+0}{1+0}=x$$

(ⅱ) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(1)=\frac{1+2+1}{1+1}=2$$

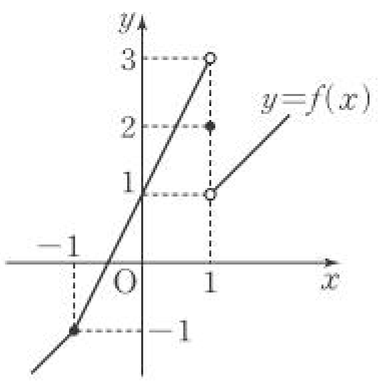
(ⅲ) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0+2x+1}{0+1}=2x+1$$

(ⅳ) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(-1)=\frac{-1-2+1}{1+1}=-1$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=3$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이고 $f(1)=2$이고, 자연수 n에 대하여

$\lim_{x\to1-}[f(x)\{f(x-n)+a_n\}]=3\times\{f(1-n)+a_n\}$ . . . . ㉠

$\lim_{x\to1+}[f(x)\{f(x-n)+a_n\}]=1\times\{f(1-n)+a_n\}$ . . . . ㉡

$f(1)\{f(1-n)+a_n\}=2\times\{f(1-n)+a_n\}$ . . . . ㉢

㉠=㉡=㉢이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x-n)+a_n\}=f(1-n)+a_n=0$

$n=1$일 때, $1+a_1=0$이므로 $a_1=-1$

$n\geq2$일 때, $1-n+a_n=0$이므로 $a_n=n-1$

따라서 수열 $a_n(n\geq2)$은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{11}a_n=-1+\sum_{n=2}^{11}a_n=-1+(55)=54$

5)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}$$

첫째항이 3, 공차가 6인 등차수열이므로 $S_1=a_1=3$이고

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(2\times3+6n)}{2}=\frac{6(n+1)^2}{2}=3(n+1)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3(n+1)^2}=0$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=\frac{1}{S_1}=\frac{1}{3}$$

6)

[정답/모범답안]

5

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha=\lim_{n\to\infty}S_n$이고,

$\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\alpha$이다.

$$a_{2n-1}=\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$a_{2n}=\frac{(-1)^{2n}}{2n(2n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$$ 에서

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a2k$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{4}$$

따라서 $80\alpha^2=80\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2=5$

{참고}

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} a_{2n} = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$$

7)

[정답/모범답안]

2

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 3이고 공비가 $r\,(0<r<1)$인 등비수열이므로

$a_n = 3r^{n-1},\ a_{2n} = 3r^{2n-1}$

$a_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=2n+1}^{\infty} 3r^{k-1} = \frac{3r^{2n}}{1-r}$ 에서

$3r^{2n-1} = \frac{3r^{2n}}{1-r}$

$r \neq 0$이므로 $1 = \frac{r}{1-r}$, $1-r = r$, $r = \frac{1}{2}$

따라서 $a_n = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

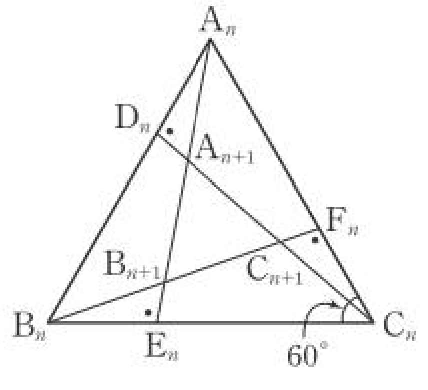
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} 9\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 3$$

8)

[정답/모범답안]

4

[해설]



$\overline{B_nC_n} = 3a$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{B_nF_n} = \sqrt{(3a)^2 + a^2 - 2\times 3a\times a\times cos\,60^\circ} = \sqrt{7}a$

이고 세 삼각형 $A_nB_nE_n$, $B_nC_nF_n$, $C_nA_nD_n$은 합동이므로

$\angle A_nE_nB_n = \angle B_nF_nC_n = \angle C_nD_nA_n$

그러므로 두 삼각형 $B_nC_nF_n$, $B_nB_{n+1}E_n$은 닮은 도형이다.

따라서 $\overline{B_nC_n} : \overline{B_nB_{n+1}} = \overline{B_nF_n} : \overline{B_nE_n}$

즉, $3a : \overline{B_nB_{n+1}} = \sqrt{7}a : a$에서

$\overline{B_nB_{n+1}} = \frac{3}{\sqrt{7}}a = \frac{3\sqrt{7}}{7}a$

$\overline{B_nF_n} : \overline{B_nE_n} = \overline{F_nC_n} : \overline{E_nB_{n+1}}$

즉, $\sqrt{7}a : a = a : \overline{E_nB_{n+1}}$에서

$\overline{E_nB_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{7}}a = \frac{\sqrt{7}}{7}a$이므로

$\overline{F_nC_{n+1}} = \overline{E_nB_{n+1}} = \frac{\sqrt{7}}{7}a$

$$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \sqrt{7}a - \frac{3\sqrt{7}}{7}a - \frac{\sqrt{7}}{7}a = \frac{3\sqrt{7}}{7}a = \frac{\sqrt{7}}{7}\times 3a = \frac{\sqrt{7}}{7}\overline{B_nC_n}$$

그러므로 정삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 한 변의 길이는 공비가 $\frac{\sqrt{7}}{7}$인 등비수열을 이룬다.

$S_1 = \frac{1}{2}\times 6\times 2\times sin\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$에서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $3\sqrt{3}$, 공비가 $\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2 = \frac{1}{7}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

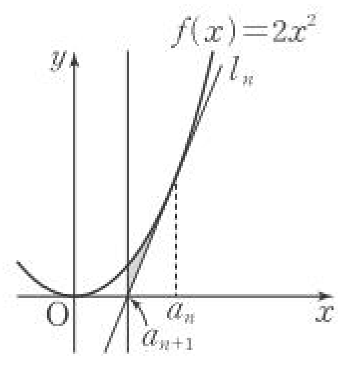
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3\sqrt{3}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

9)

[정답/모범답안]

23

[해설]



$f(x) = 2x^2$이라 하면 $f'(x) = 4x$

점 $(a_n,\ 2(a_n)^2)$에서의 접선의 방정식은

$y - 2(a_n)^2 = 4a_n(x - a_n)$

$y = 4a_nx - 2(a_n)^2$

$a_1 = 1$에서 $a_n > 0$이므로 $y=0$에서 $x = \frac{1}{2}a_n$

그러므로 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, $a_1 = 1$에서

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$S_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n}[2x^2 - \{4a_nx - 2(a_n)^2\}]dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 2a_nx^2 + 2(a_n)^2x\right]_{a_{n+1}}^{a_n}$$

$= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2a_n x^2 + 2(a_n)^2 x\right]_{\frac{a_n}{2}}^{a_n}$

$= \frac{1}{12}(a_n)^3 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{21}$ 이므로

$p+q = 21+2 = 23$

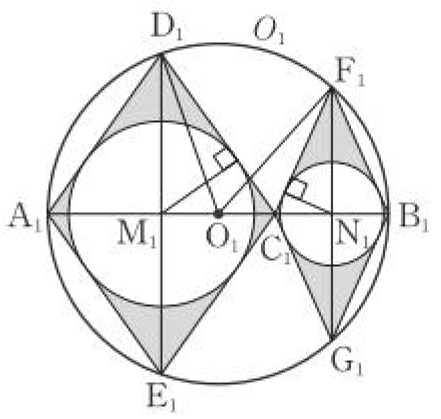
10)

[정답/모범답안]

117

[해설]

그림 R_1에서 원 O_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 중점을 $\mathrm{M_1}$, 선분 $\mathrm{C_1B_1}$의 중점을 $\mathrm{N_1}$, 두 사각형 $\mathrm{A_1E_1C_1D_1}$과 $\mathrm{C_1G_1B_1F_1}$에 각각 내접하는 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자.



직각삼각형 $\mathrm{M_1O_1D_1}$에서 $\overline{\mathrm{M_1O_1}} = 1$, $\overline{\mathrm{O_1D_1}} = 3$이므로

$\overline{\mathrm{D_1M_1}} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$

직각삼각형 $\mathrm{M_1C_1D_1}$에서 $\overline{\mathrm{M_1C_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{D_1M_1}} = \sqrt{8}$이므로

$\overline{\mathrm{C_1D_1}} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{8})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$이고

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{M_1C_1}} \times \overline{\mathrm{D_1M_1}} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{C_1D_1}} \times r_1$에서

$r_1 = \frac{2\sqrt{8}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$

직각삼각형 $\mathrm{O_1N_1F_1}$에서 $\overline{\mathrm{O_1N_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{O_1F_1}} = 3$이므로

$\overline{\mathrm{F_1N_1}} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

직각삼각형 $\mathrm{C_1N_1F_1}$에서 $\overline{\mathrm{C_1N_1}} = 1$, $\overline{\mathrm{F_1N_1}} = \sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{C_1F_1}} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$이고

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{C_1N_1}} \times \overline{\mathrm{F_1N_1}} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{C_1F_1}} \times r_2$에서

$r_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

그러므로 그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 두 사각형의 넓이에서 내접하는 두 원의 넓이를 뺀 것이므로

$S_1 = 4\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{5}\right)$

$\qquad - \pi \times \left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2 - \pi \times \left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2$

$= 8\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \frac{7}{2}\pi$

한편 원 O_1과 사각형에 내접하는 두 원의 닮음비는 각각

$3 : r_1 = 3 : \sqrt{\frac{8}{3}}$, $3 : r_2 = 3 : \sqrt{\frac{5}{6}}$

이므로 넓이의 비는 각각 $1 : \frac{8}{27}$, $1 : \frac{5}{54}$이고,

$S_2 = S_1 + S_1\left(\frac{8}{27} + \frac{5}{54}\right) = S_1 + \frac{7}{18}S_1$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $8\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \frac{7}{2}\pi$이고 공비가 $\frac{7}{18}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

$\lim_{n \to \infty} S_n = \dfrac{8\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \frac{7}{2}\pi}{1 - \frac{7}{18}} = \dfrac{8\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \frac{7}{2}\pi}{\frac{11}{18}}$

$= \frac{18}{11}\left(8\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \frac{7}{2}\pi\right)$

따라서 $a+b+c = \frac{18}{11}\left(8 + 2 - \frac{7}{2}\right) = \frac{117}{11}$ 이므로

$11(a+b+c) = 117$

11)

[정답/모범답안]

3

[해설]

곡선 $y = e^x$위의 두 점 A(0, 1), P(t, e^t)와 x축 위의 점 Q$(f(t), 0)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AQ}}^2 = (f(t) - 0)^2 + \{0 - 1\}^2 = 1 + \{f(t)\}^2$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = (f(t) - t)^2 + \{0 - e^t\}^2$
$\quad = t^2 + \{f(t)\}^2 + 2tf(t) + (e^t)^2$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2$에서

$1 + \{f(t)\}^2 = t^2 + \{f(t)\}^2 + 2tf(t) + (e^x)^2$

이므로 $t \neq 1$일 때

$f(t) = \frac{1 - (e^t)^2 - t^2}{2t}$ 이고,

$\lim_{t \to 0} \frac{1 - (e^t)^2 - t^2}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - (e^t)^2}{2t} - \frac{t}{2} = \lim_{t \to 0} \frac{(e^t - 1)(e^t + 1)}{2t} - \frac{t}{2}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{(e^t - 1)}{t} \times \frac{e^t + 1}{2} - 0 = 1 \times 1 - 0 = 1$

따라서

$\lim_{t \to 1} f(t) = 1$

12)

[정답/모범답안]

4

[해설]

$a_n = \lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{n} kx\{\ln(x+k) - \ln x\}$

$= \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} kx\ln\frac{x+k}{x}$

$= \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k^2\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2\left\{\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right\}$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2\times\ln e$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$

13)

[정답/모범답안]

3

[해설]

두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-1=k$에서 $x_1=\log_{\frac{1}{2}}(1+k)=-\log_2(1+k)$

$2^{x_2}-1=k$에서 $x_2=\log_2(1+k)$

$\overline{AB}=x_2-x_1$
$=\log_2(1+k)-\{-\log_2(1+k)\}$
$=2\log_2(1+k)$

두 점 B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2라 하면

$y_1=k$이고 두 점 B, C의 x좌표가 모두 x_2이므로

$y_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-1=(2^{x_2})^{-1}-1=(1+k)^{-1}-1$

$=\frac{1}{1+k}-1=-\frac{k}{1+k}$

$\overline{BC}=y_1-y_2=k-\left(-\frac{k}{1+k}\right)=\frac{k(2+k)}{1+k}$

따라서

$\lim_{k\to0+}\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{k}=\lim_{k\to0+}\frac{2\log_2(1+k)+\frac{k(2+k)}{1+k}}{k}=$

$=\lim_{k\to0+}\left\{\frac{2\log_2(1+k)}{k}+\frac{(2+k)}{1+k}\right\}$

$=\lim_{k\to0+}\left\{2\log_2(1+k)^{\frac{1}{k}}\times\frac{(2+0)}{1+0}\right\}$

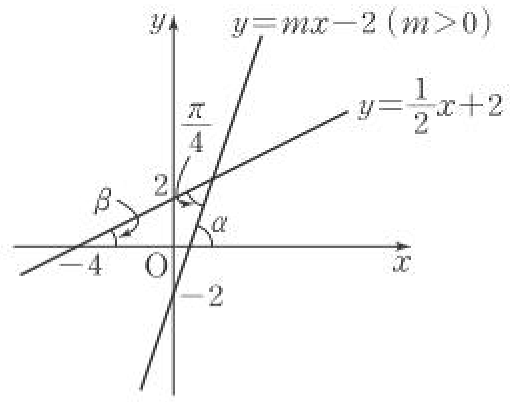
$=2\log_2 e\times2=\frac{4}{\ln2}$

14)

[정답/모범답안]

2

[해설]



두 직선 $y=mx-2$와 $y=\frac{1}{2}x+2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\tan\alpha=m$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{m-\frac{1}{2}}{1+m\times\frac{1}{2}}=\frac{2m-1}{m+2}$

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$에서 $\left|\frac{2m-1}{m+2}\right|=1$

(ⅰ) $\frac{2m-1}{m+2}=1$일 때

$2m-1=m+2$, $m=3$

(ⅱ) $\frac{2m-1}{m+2}=-1$일 때

$2m-1=-(m+2)$, $m=-\frac{1}{3}$

따라서 모든 m의 값의 합은 $m=\frac{8}{3}$

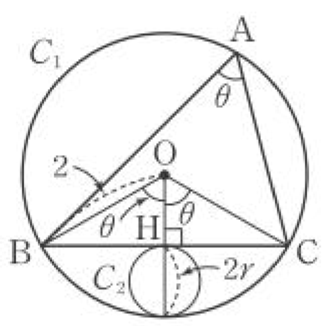
15)

[정답/모범답안]

15

[해설]

원 C_1의 중심 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 원 C_1과 선분 BC로 둘러싸인 두 부분 중 넓이가 작은 쪽에서 원 C_1과 선분 BC에 동시에 접하는 원을 그렸을 때, 그 크기가 가장 큰 원 C_2는 점 H에서 선분 BC와 접한다.



$\angle CAB$는 호 BC에 대한 원주각이고, $\angle COB$는 호 BC에 대한 중심각이므로

$\angle COB=2\angle CAB=2\theta$

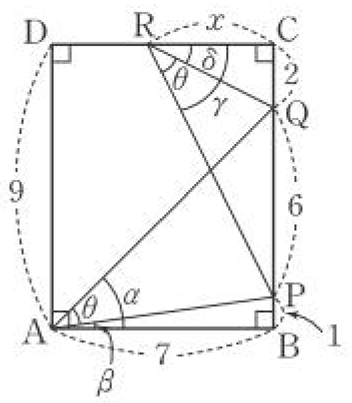
한편 $\angle OHB = \angle OHC = \frac{\pi}{2}$, $\overline{OB} = \overline{OC} = 2$, $\overline{OH}$는 공통이므로 삼각형 OBH와 삼각형 OCH는 서로 합동이다.
따라서 $\angle BOH = \angle COH$이므로
$\angle COB = \angle BOH + \angle COH$
$2\theta = 2\angle BOH$, $\angle BOH = \theta$이고,
$\overline{OH} = \overline{OB}\cos\theta = 2\cos\theta$
이때 원 C_2의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{OB} = \overline{OH} + 2r$, $2 = 2\cos\theta + 2r$, $r = 1 - \cos\theta$
따라서
$f(\theta) = \pi r^2 = \pi(1-\cos\theta)^2 = \pi(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)$
한편
$$(\cos^2\theta)' = (\cos\theta \times \cos\theta)' \\ = -\sin\theta \times \cos\theta + \cos\theta \times (-\sin\theta) \\ = -2\sin\theta\cos\theta$$
이므로
$f'(\theta) = \pi(2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta)$
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{f'(\theta)}{\theta^3} = \pi \frac{2\sin\theta}{\theta} \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2} = \pi \times 2 \times \frac{1}{2} = \pi$$
따라서 $k = 1$이므로 $15k = 15$

18)

[정답/모범답안]

90

[해설]



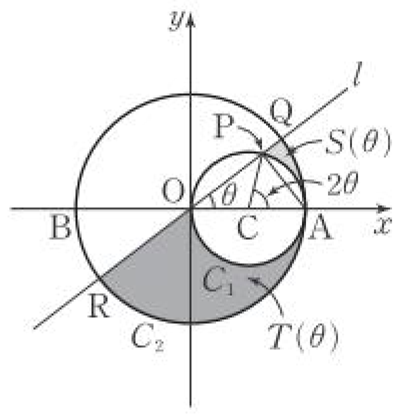
$\angle PAQ = \angle PRQ = \theta$, $\angle QAB = \alpha$, $\angle PAB = \beta$라 하면
$\tan\alpha = 1$, $\tan\beta = \frac{1}{7}$ 에서
$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1 - \frac{1}{7}}{1 + 1 \times \frac{1}{7}} = \frac{3}{4}$$
$\overline{CQ} = \overline{AD} - (\overline{BP} + \overline{PQ}) = 9 - (1 + 6) = 2$
$\overline{RC} = x$라 하고 $\angle PRC = \gamma$, $\angle QRC = \delta$라 하면
$\tan\gamma = \frac{8}{x}$, $\tan\delta = \frac{2}{x}$ 에서
$$\tan\theta = \tan(\gamma - \delta) = \frac{\tan\gamma - \tan\delta}{1 + \tan\gamma\tan\delta} = \frac{\frac{8}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{8}{x} \times \frac{2}{x}} = \frac{6x}{x^2 + 16}$$
즉, $\frac{6x}{x^2 + 16} = \frac{3}{4}$ 에서
$x^2 + 16 = 8x$, $(x-4)^2 = 0$, $x = 4$
$\overline{DR} = \overline{DC} - \overline{RC} = \overline{AB} - x = 7 - 4 = 3$
따라서
$10\overline{DR}^2 = 90$

19)

[정답/모범답안]

3

[해설]



직선 l이 두 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 l이 원 C_2와 제3사분면에서 만나는 점을 R라 하자. 또 원 C_2가 x축과 만나는 두 점을 A(4, 0), B(-4, 0)이라 하고, 원 C_1의 중심을 C(2, 0)이라 하자.
$S(\theta) = (\text{부채꼴 OAQ의 넓이}) - (\text{삼각형 OCP의 넓이}) - (\text{부채꼴 } CAP\text{의 넓이})$
이때
$(\text{부채꼴 OAQ의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \theta = 8\theta$
원 C_1에서 호 AP에 대한 중심각 ∠PCA의 크기는 호 AP에 대한 원주각 ∠POA의 크기의 2배이므로
$\angle PCA = 2\angle POA = 2\theta$이고 삼각형 OCP의 높이는
$\overline{CP} \times \sin 2\theta = 2\sin 2\theta$이므로
$$(\text{삼각형 OCP의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sin 2\theta \\ = 2\sin 2\theta \\ = 2\sin(\theta + \theta) \\ = 2(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta) \\ = 2 \times 2\sin\theta\cos\theta \\ = 4\sin\theta\cos\theta$$
$(\text{부채꼴 CAP의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 2^2 \times 2\theta = 4\theta$
따라서
$$S(\theta) = (\text{부채꼴 OAQ의 넓이}) - (\text{삼각형 OCP의 넓이}) - (\text{부채꼴 } CAP\text{의 넓이}) \\ = 8\theta - 4\sin\theta\cos\theta - 4\theta \\ = 4\theta - 4\sin\theta\cos\theta$$
$S(\theta) - 4\theta + 4\sin\theta = 4\sin\theta - 4\sin\theta\cos\theta$
한편
$T(\theta) = \frac{1}{2} \times (\text{원 } C_2\text{의 넓이})$

$-\frac{1}{2}\times$(원 C_1의 넓이)$-$(부채꼴 OBR의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(\pi\times 4^2)-\frac{1}{2}\times(\pi\times 2^2)-\frac{1}{2}\times 4^2\times\theta$

$=6\pi-8\theta$

$6\pi-T(\theta)=8\theta\theta$

따라서

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)-4\theta+4\sin\theta}{\theta^2\{6\pi-T(\theta)\}}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{4\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta}{\theta^2\times 8\theta}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\theta^3(1+\cos\theta)}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$

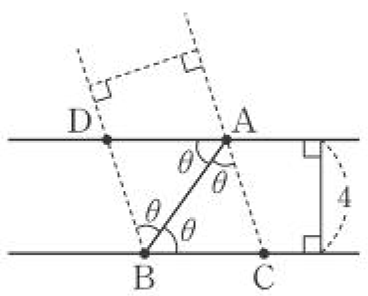
$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

20)

[정답/모범답안]

3

[해설]



선분 BC와 선분 BD는 선분 AB에 대하여 대칭이므로

$\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{ABC}=\theta$

종이의 윗변과 아랫변은 평행하므로

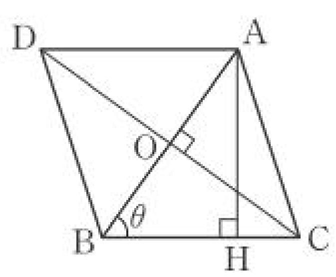
$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{ABC}=\theta$(엇각)

선분 AC와 선분 AD는 선분 AB에 대하여 대칭이므로

$\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BAD}=\theta$

삼각형 ABC와 삼각형 ABD는 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{AB}}$는 공통이므로 두 삼각형은 서로 합동이다.

따라서 사각형 ADBC는 마름모이다.



점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=4$이므로 직각삼각형 ABH에서

$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{4}{\overline{\mathrm{AB}}}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{4}{\sin\theta}$

한편 선분 AB와 선분 CD의 교점을 O라 하면 사각형 ADBC는 마름모이므로 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

즉, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$

$\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$

직각삼각형 OBC에서

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OB}}\tan\theta=\frac{2}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$

따라서

$S(\theta)=4\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OC}}\right)$

$=4\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sin\theta}\times\frac{2}{\cos\theta}\right)$

$=\frac{8}{\sin\theta\cos\theta}$

ㄱ. $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{8}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=16$ (참)

ㄴ. $S(\theta)=\frac{8}{\sin\theta\cos\theta}=48$에서

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{6}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$(참)

ㄷ. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{6}}\frac{6\times\left\{S\left(\frac{\pi}{6}\right)-S(\theta)\right\}}{(6\theta-\pi)\times S\left(\frac{\pi}{6}\right)\times S(\theta)}$

$=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{6}}\left[\frac{1}{\theta-\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{1}{S(\theta)}-\frac{1}{S\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right\}\right]$

$f(\theta)=\frac{1}{S(\theta)}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{8}$라 하면

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{6}}\left[\frac{1}{\theta-\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{1}{S(\theta)}-\frac{1}{S\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right\}\right]$

$=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(\theta)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\theta-\frac{\pi}{6}}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$f'(\theta)=\frac{1}{8}\{(\sin\theta)'\times\cos\theta+\sin\theta\times(\cos\theta)'\}$

$=\frac{1}{8}\{\cos\theta\times\cos\theta+\sin\theta\times(-\sin\theta)\}$

$=\frac{1}{8}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

이므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{8}\left(\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$

$=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21)

[정답/모범답안]

4

[해설]

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $e^x>0,\ \cos x>0$이므로

$f(x)\sqrt{g(x)}>0$, 즉 $f(x)>0,\ g(x)>0$

조건 (가)의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)\times\sqrt{g(0)}=e^0\times\cos 0=1$ …… ㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)\times\sqrt{g(x)}+f(x)\times\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

$=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)\times\sqrt{g(0)}+f(0)\times\frac{g'(0)}{2\sqrt{g(0)}}=1+0=1$ …… ㉢

㉠과 조건 (나)에서

$f'(0)\times\sqrt{g(0)}=f'(0)\times\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{2}$ …… ㉣

㉠에서

$f(0)\times\frac{g'(0)}{2\sqrt{g(0)}}=\frac{1}{\sqrt{g(0)}}\times\frac{g'(0)}{2\sqrt{g(0)}}=\frac{1}{2}\times\frac{g'(0)}{g(0)}$ …… ㉤

㉣, ㉤을 ㉢에 대입하면 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{g'(0)}{g(0)}=1$이므로

$\frac{g'(0)}{g(0)}=1$

{다른 풀이}

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $e^x>0,\ \cos x>0$이므로

$f(x)\sqrt{g(x)}>0$, 즉 $f(x)>0,\ g(x)>0$

조건 (가)에서 양변에 로그를 취하면

$\ln(f(x)\sqrt{g(x)})=\ln(e^x\cos x)$

$\ln f(x)+\ln\sqrt{g(x)}=\ln e^x+\ln(\cos x)$

$\ln f(x)+\frac{1}{2}\ln g(x)=x+\ln(\cos x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{2}\times\frac{g'(x)}{g(x)}=1+\frac{(-\sin x)}{\cos x}$ …… ㉡

㉡에 $x=0$을 대입하면 조건 (나)에서 $\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{1}{2}\times\frac{g'(0)}{g(0)}=1$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{g'(0)}{g(0)}=1$

따라서 $\frac{g'(0)}{g(0)}=1$

22)

[정답/모범답안]

1

[해설]

ㄱ. $f(t)=3t^5-5t^4+t,\ g(t)=t^4+t^2-2$에서

$f(1)=-1,\ g(1)=0$이므로

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(1+2\Delta t)}{f(1+\Delta t)+1}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(1+2\Delta t)-g(1)}{f(1+\Delta t)-f(1)}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\left\{\frac{g(1+2\Delta t)-g(1)}{2\Delta t}\right\}}{\frac{f(1+\Delta t)-f(1)}{\Delta t}}$$

$$=2\times\frac{g'(1)}{f'(1)}$$

$f'(t)=15t^4-20t^3+1,\ g'(t)=4t^3+2t$에서

$f'(1)=15-20+1=-4,\ g'(1)=4+2=6$이므로

$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(1+2\Delta t)}{f(1+\Delta t)+1}=2\times\frac{g'(1)}{f'(1)}=2\times\frac{6}{-4}=-3$ (참)

ㄴ. 곡선 l이 점 (-2, 0)을 지나면 $f(t)=-2,\ g(t)=0$을 동시에 만족시키는 실수 t가 존재한다.

$g(t)=0$에서 $t^4+t^2-2=0,\ (t^2+2)(t^2-1)=0$

$t^2+2>0$이므로 $t^2-1=0$

$t=-1$ 또는 $t=1$

(ⅰ) $t=-1$일 때, $f(-1)=-9$에서 $f(-1)\neq-2$

(ⅱ) $t=1$일 때, $f(1)=-1$에서 $f(1)\neq-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(t)=-2,\ g(t)=0$을 동시에 만족시키는 실수 t는 존재하지 않는다. 즉, 곡선 l은 점 (-2, 0)을 지나지 않는다. (거짓)

ㄷ. 두 함수 $f(t),\ g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능 하므로 곡선 l 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에 대하여

$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$가 존재하기 위해서는 실수 전체의 집합에서 $f'(t)\neq 0$이 성립해야 한다.

따라서 $h(t)=f'(t)$로 놓으면 4차 함수 $h(t)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 실수 전체의 집합에서 $h(t)>0$이 성립해야 한다.

$h(t)=15t^4-20t^3+1$

$h'(t)=60t^3-60t^2=60t^2(t-1)$

$h'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=0$ 또는 $t=1$

$h'(t)$의 부호를 조사하여 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	↘	1	↘	극소	↗

함수 $h(t)$는 $t=1$에서 극소이면서 최소이고

$h(1)=15-20+1=-4$

$h(0)>0,\ h(1)<0,\ h(2)=81>0$이므로 위의 표와 사잇값 정리에 의하여 $h(\alpha)=0,\ h(\beta)=0$ 을 만족시키는 $\alpha,\ \beta\ (0<\alpha<1<\beta<2)$가 존재한다.

즉, 방정식 $f'(t)=0$을 만족시키는 $\alpha,\ \beta$가 존재하므로 $t=\alpha,\ t=\beta$에 대응하는 점에 대하여 $\frac{dy}{dx}$는 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

23)

[정답/모범답안]

257

[해설]

점 $(f(t),\ t)$는 함수 $y=2^x-2^{-x}$의 그래프 위의 점이므로

$2^{f(t)}-2^{-f(t)}=t$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$4^{f(t)}+4^{-f(t)}=t^2+2$이므로

$$\begin{aligned} g(t)&=f(t)\times\{4^{f(t)}+4^{-f(t)}\}\\ &=f(t)\times(t^2+2)=(t^2+2)f(t)\end{aligned}$$

함수 $g(t)$를 t에 대하여 미분하면

$g'(t)=2tf(t)+(t^2+2)f'(t)$ …… ㉡

$f\left(\frac{15}{4}\right)=k$라 하면 ㉠에서 $2^k-2^{-k}=\frac{15}{4}$

$4\times2^{2k}-15\times2^k-4=0,\ (4\times2^k+1)(2^k-4)=0$

$4\times2^k+1>0$에서 $2^k=4$

$k=2$, 즉 $f\left(\frac{15}{4}\right)=2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{15}{4}\right)&=2\times\frac{15}{4}\times f\left(\frac{15}{4}\right)+\left\{\left(\frac{15}{4}\right)^2+2\right\}\times f'\left(\frac{15}{4}\right)\\ &=2\times\frac{15}{4}\times2+\left(\frac{225}{16}+2\right)\times f'\left(\frac{15}{4}\right)\\ &=15+\frac{257}{16}\times f'\left(\frac{15}{4}\right)\end{aligned}$$

함수 $h(x)=2^x-2^{-x}$이라 하면 ㉠에서

$h(f(t))=t$ …… ㉣

즉, 함수 f는 함수 h의 역함수이다.

㉣의 양변을 t에 대하여 미분하면

$h'(f(t))f'(t)=1,\ f'(t)=\frac{1}{h'(f(t))}$

이때

$h'(x)=2^x\times\ln2-2^{-x}\times\ln2\times(-1)=(2^x+2^{-x})\ln2$

$h'(2)=(2^2+2^{-2})\ln2=\frac{17}{4}\ln2$이므로

$$f'\left(\frac{15}{4}\right)=\frac{1}{h'\left(f\left(\frac{15}{4}\right)\right)}=\frac{1}{h'(2)}=\frac{4}{17\ln2}$$

따라서

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{15}{4}\right)&=15+\frac{257}{16}\times f'\left(\frac{15}{4}\right)\\ &=15+\frac{257}{16}\times\frac{4}{17\ln2}\\ &=15+\frac{257}{68\ln2}\end{aligned}$$

이므로

$\left\{g'\left(\frac{15}{4}\right)-15\right\}\times68\ln2=257$

{참고}

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$2^{f(t)}\times\ln2\times f'(t)-2^{-f(t)}\times\ln2\times\{-f'(t)\}=1$

$\{2^{f(t)}+2^{-f(t)}\}f'(t)\ \ln2=1$

$f'(t)=\frac{1}{\{2^{f(t)}+2^{-f(t)}\}\ln2}$ …… (*)

$f\left(\frac{15}{4}\right)=2$이므로 (*)에 $t=\frac{15}{4}$를 대입하면

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{15}{4}\right)&=\frac{1}{\left\{2^{f\left(\frac{15}{4}\right)}+2^{-f\left(\frac{15}{4}\right)}\right\}\ln2}\\ &=\frac{1}{(2^2+2^{-2})\ln2}=\frac{4}{17\ln2}\end{aligned}$$

24)

[정답/모범답안]

3

[해설]

점 P는 제1사분면의 점이므로

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

삼각형 OPA는 직각삼각형이므로

$\overline{OP}=2\cos\theta$이고 $\overline{mOQ}=2\cos\theta+2$

따라서 점 Q의 y좌표 $f(\theta)$는

$$\begin{aligned} f(\theta)&=(2\cos\theta+2)\sin\theta\\ &=2(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f'(\theta)&=2(\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta)\\ &=2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)\\ &=2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 에서 $f'(\theta)=0$을 만족시키는 θ의 값은 $\frac{\pi}{3}$이고, $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	극대	↘	

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 일 때 극대이면서 최대가 되고 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(2\cos\frac{\pi}{3}+2\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

25)

[정답/모범답안]

2

[해설]

점 P의 좌표를 $(t,\ n(1-t)^n)\ (0<t<1)$이라 하면

$Q(t,0),\ R(0,\ n(1-t)^n)$

이므로 삼각형 PQR의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$\begin{aligned} f(t)&=\frac{1}{2}\times t\times n(1-t)^n\\ &=\frac{1}{2}nt(1-t)^n\ (0<t<1)\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f'(t)&=\frac{1}{2}n(1-t)^n-\frac{1}{2}n^2t(1-t)^{n-1}\\ &=\frac{1}{2}n(1-t)^{n-1}\{1-(n+1)t\}\end{aligned}$$

$f'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{n+1}$

$0<t<\frac{1}{n+1}$일 때 $f'(t)>0$이고, $\frac{1}{n+1}<t<1$일 때

$f'(t)<0$이므로 $f(t)$는 $t=\frac{1}{n+1}$일 때 극대이면서 최대이다.

따라서 $S_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

이때

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$-\frac{1}{n+1} = s$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $s\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}(1+s)^{-\frac{1}{s}} = \frac{1}{2e}$$

26)

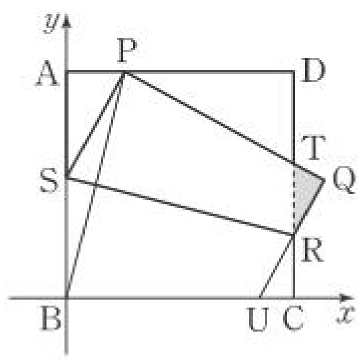
[정답/모범답안]

2

[해설]

그림과 같이 선분 BC가 x축, 선분 AB가 y축 위에 오도록 좌표 평면에 놓으면

A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1)



$\overline{AP} = t$ $(0 \le t \le 1)$이라 하면 P(t, 1)이고, 직선 SR는 선분 BP의 수직이등분선이다.

먼저 $t=0$ 또는 $t=1$이면 $S=0$이다. …… ㉠

$0<t<1$일 때 직선 BP의 기울기가 $\frac{1}{t}$이고, 선분 BP의 중점의 좌표가 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이므로 직선 SR의 방정식은

$y-\frac{1}{2} = -t\left(x-\frac{t}{2}\right)$, 즉 $y = -tx+\frac{t^2+1}{2}$

이때 $S\left(0,\ \frac{t^2+1}{2}\right)$, $R\left(1,\ \frac{(t-1)^2}{2}\right)$이다.

직선 QR와 x축이 만나는 점을 U라 하면 삼각형 TQR와 삼각형 UCR는 합동이다.

두 직선 PS와 QR는 서로 평행하므로 직선 QR의 방정식은

$y-\frac{(t-1)^2}{2} = \frac{1-t^2}{2t}(x-1)$

즉, $y = \frac{1-t^2}{2t}x + \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{t^2-1}{2t}$

따라서 점 U의 좌표는 $\left(\frac{t^2+1}{t+1},\ 0\right)$ 이고

$$S = \frac{1}{2}\times\overline{UC}\times\overline{CR} = \frac{1}{2}\times\left(1-\frac{t^2+1}{t+1}\right)\times\frac{(t-1)^2}{2} = \frac{t(1-t)^3}{4(1+t)} \quad (\text{단}, 0<t<1) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $t=0$ 또는 $t=1$일 때 ㉡이 성립하므로

$S = \frac{t(1-t)^3}{4(1+t)}$ (단, $0 \le t \le 1$)

S를 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{4}\times\frac{\{(1-t)^3-3t(1-t)^2\}(1+t)-t(1-t)^3}{(1+t)^2} = \frac{(1-t)^2(1-4t-3t^2)}{4(1+t)^2}$$

$0<t<1$일 때 $\frac{dS}{dt}=0$에서 $t=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$

$0 \le t \le 1$일 때 S의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{dt}$		+	0	−	
S	0	↗	극대	↘	0

$t=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$일 때 S의 값이 극대이면서 최대이므로 구하는 선분 AP의 길이는 $\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$이다.

27)

[정답/모범답안]

3

[해설]

ㄱ. $f(x) = \begin{cases}\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-x}\sin x & (x \ge 0)\\ \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}\sin x & (x<0)\end{cases}$ 이므로

$f(0)=0$에서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-h}\sin h - 0}{h} = \lim_{h\to 0+}\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-h}\times\frac{\sin h}{h}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+h}\sin h - 0}{h} = \lim_{h\to 0-}\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+h}\times\frac{\sin h}{h}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고

$f'(0) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$(참)

ㄴ. $x>0$일 때

$$f'(x) = \sqrt{2}(-e^{\frac{\pi}{4}-x})\sin x + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-x}\cos x = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-x}(\cos x - \sin x)$$

$x<0$일 때

$f'(x)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}\sin x+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}\cos x$
$\quad=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}(\cos x+\sin x)$

이고 $f'(0)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$이므로

$$f'(x)=\begin{cases}\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-x}(\cos x-\sin x) & (x\ge 0)\\ \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+x}(\cos x+\sin x) & (x<0)\end{cases}$$

$f'(x)=0$에서

$x\ge 0$일 때 $\cos x-\sin x=0$, 즉 $\tan x=1$이므로

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \cdots$

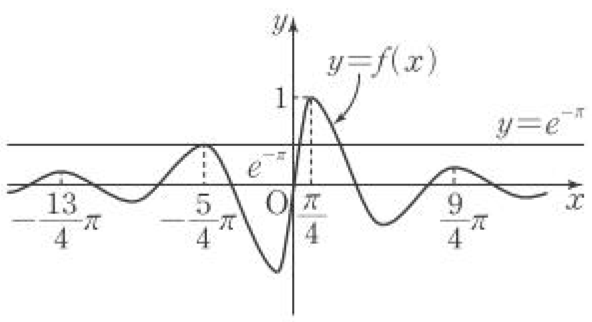
$x<0$일 때 $\cos x+\sin x=0$, 즉 $\tan x=-1$이므로

$x=-\frac{\pi}{4},\ -\frac{5}{4}\pi,\ -\frac{9}{4}\pi,\ \cdots$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대일 때 극댓값은

$f(\alpha)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-|\alpha|}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{\frac{\pi}{4}-|\alpha|}$

이므로 $|\alpha|$가 클수록 극댓값이 작아진다.



함수 $f(x)$는 $x=-\frac{5}{4}\pi,\ x=\frac{\pi}{4}$에서 극대이고

$f\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=e^{-\pi},\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$에서

$f\left(-\frac{5}{4}\pi\right)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

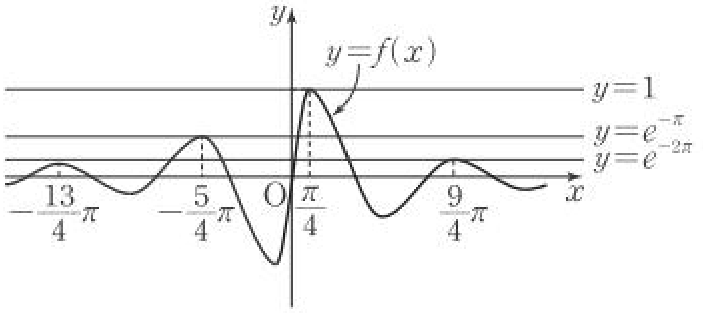
$|x|>\frac{5}{4}\pi$이면 $f(x)$의 극댓값은 $e^{-\pi}$보다 작으므로

함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=e^{-\pi}$과 서로 다른 세 점에서 만난다.

따라서 $g(e^{-\pi})=3$ (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대일 때 $|\alpha|$가 클수록 극댓값이 작아지므로

$f\left(-\frac{13}{4}\pi\right)=e^{-3\pi}<e^{-\frac{5}{2}\pi}<f\left(\frac{9}{4}\pi\right)=e^{-2\pi}$
$\quad<f\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=e^{-\pi}<f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1<2$



$e^{-\frac{5}{2}\pi}\le k\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 k의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 극대일 때마다 줄어드므로 이때 $g(k)$는 불연속이 된다.

따라서 $e^{-\frac{5}{2}\pi}\le k\le 2$에서 함수 $g(k)$가 불연속인 k의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

28)

[정답/모범답안]

2

[해설]

$\int_0^1 tf(1-t^2)\,dt$에서 $1-t^2=y$로 놓으면

$t=0$일 때 $y=1$, $t=1$일 때 $y=0$이고

$\frac{dy}{dt}=-2t$이므로

$\int_0^1 tf(1-t^2)\,dt=\int_1^0\left\{-\frac{1}{2}f(y)dy\right\}$
$\quad=\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\,dy$

따라서

$f(x)=xe^{-x}-2x\int_0^1 f(t)\,dt+4x\int_0^1 tf(1-t^2)\,dt$
$\quad=xe^{-x}-2x\int_0^1 f(t)\,dt+2x\int_0^1 f(y)\,dy$
$\quad=xe^{-x}-2x\int_0^1 f(t)\,dt+2x\int_0^1 f(t)\,dt$
$\quad=xe^{-x}$

이고 $u(x)=x,\ v'(x)=e^{-x}$이라 하면

$u'(x)=1,\ v(x)=-e^{-x}$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xe^{-x}dx$
$\quad=[-xe^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$
$\quad=(-e^{-1})+[-e^{-x}]_0^1$
$\quad=-e^{-1}+(-e^{-1}+1)$
$\quad=1-2e^{-1}=1-\frac{2}{e}$

29)

[정답/모범답안]

5

[해설]

ㄱ. $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}=\ln\frac{2}{n}-\ln\frac{1}{n}$
$\quad=\ln\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}=\ln 2$ (참)

ㄴ. $f(x)=\ln(x+1)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$
$\quad=\ln(x+1)+\frac{x^2}{2}-x$

라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+x-1$$
$$=\frac{1+(x-1)(x+1)}{x+1}$$
$$=\frac{x^2}{x+1}>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하는 함수이고

$f(0)=0$이므로 $x>0$일 때 $f(x)>0$

즉, $x-\frac{x^2}{2}<\ln(x+1)$

$g(x)=x-\ln(x+1)$이라 하면

$g'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$

이므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 증가하는 함수이고

$g(0)=0$이므로 $x>0$일 때 $g(x)>0$

즉, $\ln(x+1)<x$

따라서 $x>0$일 때, $x-\frac{x^2}{2}<\ln(x+1)<x$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $x>0$일 때 $\ln(x+1)<x$이므로

$x+\ln(x+1)<2x$

따라서 $\frac{1}{2x}<\frac{1}{x+\ln(x+1)}$이므로

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{2x}dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\ln(x+1)}dx$$

이때 ㄱ에서 $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}dx=\ln 2$이므로

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\ln(x+1)}dx>\frac{1}{2}\ln 2 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

30)

[정답/모범답안]

1

[해설]

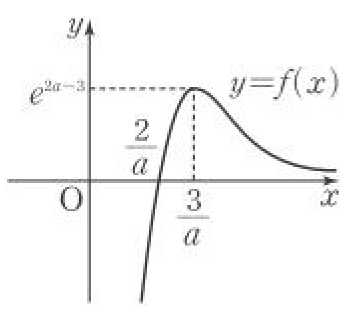
$f(x)=(ax-2)e^{a(-x+2)}$에서

$$f'(x)=ae^{a(-x+2)}+(ax-2)e^{a(-x+2)}\times(-a)$$
$$=\{a-a(ax-2)\}e^{a(-x+2)}$$
$$=a(3-ax)e^{a(-x+2)}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{a}$ 에서 극대이면서 최댓값을 가지므로

$b=\frac{3}{a}$

또한 $f(x)=0$에서 $x=\frac{2}{a}$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$$g(a)=\int_0^{\frac{3}{a}}|f(x)|dx$$
$$=\int_0^{\frac{2}{a}}\{-f(x)\}dx+\int_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}}f(x)dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\int(ax-2)e^{a(-x+2)}dx$에서

$u(x)=ax-2,\ v'(x)=e^{a(-x+2)}$이라 하면

$u'(x)=a,\ v(x)=-\frac{1}{a}e^{a(-x+2)}$이므로

$$\int(ax-2)e^{a(-x+2)}dx$$
$$=-\frac{1}{a}(ax-2)e^{a(-x+2)}+\int e^{a(-x+2)}dx$$
$$=-\frac{1}{a}(ax-2)e^{a(-x+2)}-\frac{1}{a}e^{a(-x+2)}+C$$
$$=-\frac{1}{a}(ax-1)e^{a(-x+2)}+C \text{ (단, }C\text{는 적분상수)}$$

따라서 ㉠에서

$$g(a)=\int_0^{\frac{3}{a}}|f(x)|dx$$
$$=\int_0^{\frac{2}{a}}\{-f(x)\}dx+\int_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}}f(x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{a}(ax-1)e^{a(-x+2)}\right]_0^{\frac{2}{a}}$$
$$+\left[-\frac{1}{a}(ax-1)e^{a(-x+2)}\right]_{\frac{2}{a}}^{\frac{3}{a}}$$
$$=\frac{1}{a}e^{2a-2}+\frac{1}{a}e^{2a}-\frac{2}{a}e^{2a-3}+\frac{1}{a}e^{2a-2}$$
$$=\frac{e^{2a}}{a}\left(1+\frac{2}{e^2}-\frac{2}{e^3}\right)$$

이므로

$$g'(a)=\frac{2e^{2a}\times a-e^{2a}}{a^2}\left(1+\frac{2}{e^2}-\frac{2}{e^3}\right)$$
$$=\frac{e^{2a}(2a-1)}{a^2}\left(1+\frac{2}{e^2}-\frac{2}{e^3}\right)$$

즉, 함수 $g(a)$는 $a=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최솟값을 가지므로

$k=\frac{1}{2}$

31)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$\sin(t-x)-\sin 2t=0$에서

$\sin(t-x)=\sin 2t$

따라서

$t-x=2t,\ 2t\pm 2\pi,\ 2t\pm 4\pi,\ \cdots$

또는

$(t-x)+2t=\pi,\ \pm 2\pi+\pi,\ \pm 4\pi+\pi,\ \cdots$

인데 주어진 범위에 의하여

$t-x=2t$또는 $t-x=\pi-2t$

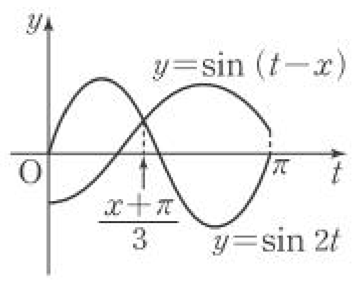
즉, $t=-x$ 또는 $t=\frac{x+\pi}{3}$

그런데 $0\le x\le\pi$이고 $0\le t\le\pi$이므로 $t=-x$는 주어진 범위를

만족시키지 못한다.

즉, $t=\frac{x+\pi}{3}$

따라서 $0\le t\le\pi$에서 두 곡선 $y=\sin(t-x)$, $y=\sin 2t$는 그림과 같다.



그러므로

$$f(x)=\int_0^{\pi}|\sin(t-x)-\sin 2t|\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{x+\pi}{3}}\{\sin 2t-\sin(t-x)\}\,dt+\int_{\frac{x+\pi}{3}}^{\pi}\{\sin(t-x)-\sin 2t\}\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos(t-x)\right]_0^{\frac{x+\pi}{3}}+\left[-\cos(t-x)+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{x+\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\left\{-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x+2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{-2x+\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}-\cos(-x)\right\}$$
$$+\left\{-\cos(\pi-x)+\frac{1}{2}\cos 2\pi+\cos\left(\frac{-2x+\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x+2\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2x}{3}\right)-\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+1$$
$$=2\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{2\pi}{3}-\pi\right)+1$$
$$=3\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+1$$

그런데 $0\le x\le\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}$이므로

최댓값은 $\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=0$일 때, 즉 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $M=4$,

최솟값은 $\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$일 때, 즉 $x=0$ 또는 $x=\pi$일 때 $m=\frac{5}{2}$이다.

따라서 $M+m=\frac{13}{2}$

$$=\left\{-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x+2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{-2x+\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}-\cos(-x)\right\}$$
$$+\left\{-\cos(\pi-x)+\frac{1}{2}\cos 2\pi+\cos\left(\frac{-2x+\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x+2\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2x}{3}\right)-\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+1$$
$$=2\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{2\pi}{3}-\pi\right)+1$$
$$=3\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+1$$

32)

[정답/모범답안]

1

[해설]

$F(x)=\int_x^{x+1}\pi|\sin(\pi t)|dt$라 하면

$0<x<1$이므로

$$F(x)=\int_x^{x+1}\pi|\sin(\pi t)|dt$$
$$=\int_x^1\pi\sin(\pi t)dt-\int_1^{x+1}\pi\sin(\pi t)dt$$
$$=[-\cos(\pi t)]_x^1-[-\cos(\pi t)]_1^{x+1}$$
$$=1+\cos(\pi x)-\{-\cos(\pi x+\pi)-1\}$$
$$=1+\cos(\pi x)-\cos(\pi x)+1=2$$

$G(x)=\int_x^{x+1}|1-t|e^{1-t}dt$라 하면 $0<x<1$이므로

$$G(x)=\int_x^{x+1}|1-t|e^{1-t}dt$$
$$=\int_x^1(1-t)e^{1-t}dt-\int_1^{x+1}(1-t)e^{1-t}dt$$

이때 $\int(1-t)e^{1-t}dt$에서 $u(t)=1-t$, $v'(t)=e^{1-t}$이라 하면

$u'(t)=-1$, $v(t)=-e^{1-t}$이므로

$$\int(1-t)e^{1-t}dt=-(1-t)e^{1-t}-\int e^{1-t}dt$$
$$=-(1-t)e^{1-t}+e^{1-t}+C$$
$$=te^{1-t}+C$$ (단, C는 적분상수)

$$G(x)=\int_x^{x+1}|1-t|e^{1-t}dt$$
$$=[te^{1-t}]_x^1-[te^{1-t}]_1^{x+1}$$
$$=1-xe^{1-x}-\{(x+1)e^{-x}-1\}$$
$$=2-xe^{1-x}-(x+1)e^{-x}$$

따라서

$$f(x)=\int_x^{x+1}\{\pi|\sin(\pi t)|-|1-t|e^{1-t}\}dt$$
$$=\int_x^{x+1}\pi|\sin(\pi t)|\,dt-\int_x^{x+1}|1-t|e^{1-t}dt$$
$$=F(x)-G(x)$$

$= 2-\{2-xe^{1-x}-(x+1)e^{-x}\}$
$= xe^{1-x}+(x+1)e^{-x}$
$= \{(e+1)x+1\}e^{-x}$

이므로

$f'(x)=(e+1)e^{-x}-\{(e+1)x+1\}e^{-x}$
$=\{e-(e+1)x\}e^{-x}$

이고 $f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{e}{e+1}$

이때 $f'(x)$의 부호는 $x=\dfrac{e}{e+1}$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{e}{e+1}$에서 극대이고 극댓값은

$f\left(\dfrac{e}{e+1}\right)=(e+1)e^{-\frac{e}{e+1}}$

따라서 $a=\dfrac{e}{e+1}$, $b=(e+1)e^{-\frac{e}{e+1}}$ 이므로

$ab=\dfrac{e}{e+1}\times(e+1)e^{-\frac{e}{e+1}}=e^{1-\frac{e}{e+1}}=e^{\frac{1}{e+1}}$

{다른 풀이}

함수 $y=|\sin(\pi t)|$는 주기가 1인 주기함수이고 함수 $y=|\sin(\pi t)|$의 그래프는 직선 $t=\dfrac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}\pi|\sin(\pi t)|dt$

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\pi|\sin(\pi t)|dt$

$=2[-\cos(\pi t)]_0^{\frac{1}{2}}=2$

33)

[정답/모범답안]

2

[해설]

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\displaystyle=\int_0^1\ln(1+x)dx=\int_1^2\ln x\,dx$

$=[x\ln x-x]_1^2=(2\ln 2-2)-(-1)$

$=2\ln 2-1$

34)

[정답/모범답안]

2

[해설]

$0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}=1+1=2$

또한 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(x-a)$의 교점의 x좌표를 θ라 하면 $0<\theta<\pi$에서

$\sin\theta=\sin(\theta-a)$

$\dfrac{\theta+(\theta-a)}{2}=\dfrac{\pi}{2}$, $2\theta-a=\pi$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{a}{2}$

그런데 $0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y=\sin(x-a)$가 이등분하므로

$\displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}}\sin(x-a)dx+\int_{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$

$=[-\cos(x-a)]_a^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}}+[-\cos x]_{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}}^{\pi}$

$=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a}{2}\right)+2+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{a}{2}\right)$

$=2-2\sin\dfrac{a}{2}$

에서 $\dfrac{1}{2}\times2=2-2\sin\dfrac{a}{2}$, $\sin\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}$

이때 $0<a<\pi$이므로

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ 에서 $a=\dfrac{\pi}{3}$

35)

[정답/모범답안]

1

[해설]

$f(x)=x\sin x$에서 $f'(x)=\sin x+x\cos x$이므로

점 $\mathrm{P}(t,\ t\sin t)$ $(0<t<\pi)$라 하면 접선 l의 기울기는

$f'(t)=\sin t+t\cos t$

그런데 접선 l의 기울기는 원점 O와 점 $\mathrm{P}(t,\ t\sin t)$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$\sin t+t\cos t=\dfrac{t\sin t}{t}$, $t\cos t=0$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$이고 접선 l의 방정식은 $y=x$이다.

그런데 $x\ge0$에서

$x-x\sin x=x(1-\sin x)\ge0$

이므로 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

$\displaystyle=\frac{\pi^2}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$라 하면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$
$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\sin x)dx = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$
$$= \frac{\pi^2}{8} - 1 = \frac{\pi^2 - 8}{8}$$

36)

[정답/모범답안]

1

[해설]

$f(x) = \int_0^x \tan\theta\,d\theta$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = \tan x$

따라서 $0 \le x \le t$일 때 곡선 $y = f(x)$의 곡선의 길이 $l(t)$는

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx = \int_0^t \sqrt{1 + \tan^2 x}\,dx$$
$$= \int_0^t \sqrt{\sec^2 x}\,dx = \int_0^t \sec x\,dx$$
$$= \int_0^t \frac{1}{\cos x}\,dx = \int_0^t \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int_0^t \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\,dx$$

이때 $\sin x = s$로 놓으면 $x = 0$일 때 $s = 0$, $x = t$일 때 $s = \sin t$이고 $\frac{ds}{dx} = \cos x$이므로

$$\int_0^t \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}dx = \int_0^{\sin t} \frac{1}{1 - s^2}ds$$
$$= \int_0^{\sin t} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\right)ds$$
$$= \frac{1}{2}[-\ln(1-s) + \ln(1+s)]_0^{\sin t}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+s}{1-s}\right]_0^{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$

이므로

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left\{l(t) + \ln\frac{\sin t}{f'(t)}\right\}$$
$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \ln\frac{\sin t}{\tan t}\right)$$
$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \ln\cos t\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + 2\ln\cos t\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \ln\cos^2 t\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\times\cos^2 t\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln\left\{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\times(1-\sin^2 t)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln(1+\sin t)^2$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2^2 = \ln 2$$

{다른 풀이}

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ (C는 적분상수)이고 $0 < t < \frac{\pi}{2}$이므로

$$l(t) = \int_0^t \sec x\,dx$$
$$= [\ln(\sec x + \tan x)]_0^t$$
$$= \ln(\sec t + \tan t)$$
$$= \ln\frac{1+\sin t}{\cos t}$$

따라서

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left\{l(t) + \ln\frac{\sin t}{f'(t)}\right\}$$
$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + \ln\frac{\sin t}{\tan t}\right)$$
$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + \ln\cos t\right)$$
$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\times\cos t\right)$$
$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln(1+\sin t)$$
$$= \ln 2$$