제 2 교시

수학 영역(가형)

1	2	3	4	5
②	②	④	⑤	②
6	7	8	9	10
③	③	①	①	⑤
11	12	13	14	15
②	③	⑤	①	③
16	17	18	19	20
①	④	④	④	⑤
21	22	23	24	25
⑤	12	270	27	300
26	27	28	29	30
225	2	7	990	18

Ⅰ. 2015 교육과정 단원

① 확률과 통계 (9)
경우의 수 17, 23, 29
확률 5, 11, 19
통계 7, 14, 25

② 수학 1 (10)
지수함수와 로그함수 1, 4, 27
삼각함수 13, 26
수열 10, 15, 21, 24

③ 미적분 (11)
수열의 극한 2, 8, 18, 22
미분법 3, 12, 28, 30
적분법 6, 9, 16, 20

난이도	미적분	수학1	확률과 통계
1-3 [2점]	2	1	0
4-13 [3점]	4	3	3
14-18 [4점]	2	1	2
19-21 [4점]	1	1	1
22-25 [3점]	1	1	2
26-27 [4점]	0	2	0
28-30 [4점]	2	0	1
총합	12 [39점]	9 [30점]	9 [31점]

Ⅱ. 문항 분석

문항	답	과목	단원	연계
1	②	수학 1	지수함수와 로그함수	
2	②	미적분	수열의 극한	
3	④	미적분	미분법	
4	⑤	수학 1	지수함수와 로그함수	
5	②	확률과 통계	확률	
6	③	미적분	적분법	
7	③	확률과 통계	통계	O
8	①	미적분	수열의 극한	
9	①	미적분	적분법	O
10	⑤	수학 1	수열	
11	②	확률과 통계	확률	O
12	③	미적분	미분법	
13	⑤	수학 1	삼각함수	
14	①	확률과 통계	통계	
15	③	수학 1	수열	
16	①	미적분	적분법	O
17	④	확률과 통계	경우의 수	
18	④	미적분	수열의 극한	
19	④	확률과 통계	확률	
20	⑤	미적분	적분법	
21	⑤	수학 1	수열	
22	12	미적분	수열의 극한	
23	270	확률과 통계	경우의 수	
24	27	수학 1	수열	
25	300	확률과 통계	통계	
26	225	수학 1	삼각함수	
27	2	수학 1	지수함수와 로그함수	O
28	7	미적분	미분법	
29	990	확률과 통계	경우의 수	
30	18	미적분	미분법	

1. $\sqrt{32}\times 2^{-3}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

풀이 : $2^{\frac{5}{2}-3}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴②

2. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k-\frac{2k^2+3}{k^2}\right)=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 : 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k-\frac{2k^2+3}{k^2}\right)$ 가 수렴하므로

$\lim_{n-\infty}\left(a_n-\frac{2n^2+3}{n^2}\right)=0$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2}=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이다.

∴②

3. $f(x)=8\ln(x+3)+3$일 때, $f'(-1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 : $f'(x)=\frac{8}{x+3}$, $f'(-1)=4$

∴④

4. $f(x)=a^{-x}$이고 두 자연수 m,n에 대해 $f(m)=216f(n)$일 때, 자연수 a의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

풀이 : $f(m)=a^{-m}$, $f(n)=a^{-n}$이므로 $a^{n-m}=216=6^3$이다. $n-m$가 정수이므로, $n-m=3$일 때, $a=6$으로 최솟값을 가진다.

∴⑤

5. 두 사건 A,B는 서로 독립이고, 다음 조건들을 만족한다.

(가) $P(A-B)=P(B-A^C)$
(나) $P(A^C\cap B)P(A\cap B^C)>0$

$P(A^C\cap B^C)=kP(B-A)$일 때, k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

풀이 : $P(A-B)=a$라고 두면, $P(A\cap B)=P(B-A^C)=a>0$이다. $P(B-A)=b$라고 두고, 두 사건 A,B가 서로 독립이므로 $P(A)P(B)=P(A\cap B)$에 식을 대입해주면, $2a\times(a+b)=a$, $a+b=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $P(A^C\cap B^C)=b>0$이다.

따라서 $k=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(B-A)}=\frac{b}{b}=1$

∴②

※ 위와 같은 문제는 대부분 그림이나 표로 풀어야 한다. (그래야 어떤 값을 미지수로 둘지 쉽게 보인다.) 그리고 위 문제와 같이 비율(k)을 구하라고 했을 때는, $P(B-A)$나 $P(A^C\cap B^C)$와 같은 값을 구체적으로 구할 필요가 있는지 의심해 봐야한다.

6. $x=4$에서 $x=9$까지 곡선 $y=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$의 길이는? [3점]

① 12 ② $\frac{37}{3}$ ③ $\frac{38}{3}$ ④ 13 ⑤ $\frac{40}{3}$

풀이 : $f(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$라고 하면, $f'(x)=(x-1)^{\frac{1}{2}}$이다.

$\int_4^9\sqrt{1+(\sqrt{x-1})^2}\,dx=\int_4^9\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9=\frac{38}{3}$

∴③

[EBS 수능완성 변형문제 - 132p 필수 유형]

7. 이산확률변수 X가 가지는 값이 1, 2, 3, 4이고, $P(X=4)=\frac{1}{4}$이다. $P(X=1)=2P(X=2)=3P(X=3)$일 때, $P(X=2)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{44}$ ② $\frac{2}{11}$ ③ $\frac{9}{44}$ ④ $\frac{5}{22}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

풀이 : $P(X=1)=2P(X=2)=3P(X=3)=k$ 라고 하자.

$P(X=1)=k,\ P(X=2)=\frac{1}{2}k,\ P(X=3)=\frac{1}{3}k$이다.

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$이므로

$k+\frac{1}{2}k+\frac{1}{3}k+\frac{1}{4}=1,\ \therefore k=\frac{9}{22}$

$P(X=2)=\frac{1}{2}k=\frac{9}{44}$

$\therefore$ ③

> 수능완성 가형 132p - 필수 유형
>
> **필수 유형.** 이산확률변수 X가 가지는 값이 1, 2, 3, 4이고,
>
> $P(X=2)=\frac{1}{6}$,
>
> $P(X=1)=P(X=3)+P(X=4)$
>
> 이다. $P(X=1)$의 값은?
>
> ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{7}{24}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{12}$
>
> 답 : ⑤

8. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$은 수렴하지 않고 $\lim_{n\to\infty}(a_n)^2$은 수렴한다. $a_1=2$일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은? [3점]

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

풀이 : 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하자.

$\lim_{n\to\infty} a_n$이 수렴하지 않으므로 $r>1$ 또는 $r\le -1$이다.

$\frac{(a_n)^2}{(a_{n-1})^2}=r^2$이므로 수열 $\{(a_n)^2\}$은 공비가 r^2인 등비수열이다.

$\lim_{n\to\infty}(a_n)^2$가 수렴하므로 $r^2\le 1$, 즉, $-1\le r\le 1$이다.

$r>1$ 또는 $r\le -1$이며, $-1\le r\le 1$이여야 하므로 $r=-1$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{5} a_k=2$

$\therefore$ ①

[EBS 수능완성 변형문제 - 96p 26번]

9. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+8}+\frac{9}{n^3+27}+\cdots+\frac{n^2}{2n^3}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}\ln 2$ ② $\frac{1}{2}\ln 2$ ③ $\ln 2$ ④ $\frac{1}{3}\ln 3$ ⑤ $\frac{1}{2}\ln 3$

풀이 : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+8}+\frac{9}{n^3+27}+\cdots+\frac{n^2}{2n^3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\times\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx$

$=\left[\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|\right]_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$

$\therefore$ ①

> 수능완성 가형 96p - 26번
>
> 26. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+4}+\frac{3}{n^2+9}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$의 값은?
>
> ① $\frac{\ln 2}{8}$ ② $\frac{\ln 2}{4}$ ③ $\frac{\ln 2}{2}$ ④ $\ln 2$ ⑤ $2\ln 2$
>
> 답 : ③

10. 자연수 x의 소인수의 개수를 $f(x)$라고 하자. 수열 $\{a_n\}$이 임의의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족한다.

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n & (f(a_n)\ne 1) \\ a_n+n^2 & (f(a_n)=1)\end{cases}$$

$a_1=8$일 때, a_7의 값은? [3점]

① 55 ② 58 ③ 61 ④ 64 ⑤ 67

풀이 : $a_1=8=2^3$이므로 $f(a_1)=1$이고, $a_2=8+1^2=9$이다.

$a_2=9=3^2$이므로 $f(a_2)=1$이고, $a_3=9+2^2=13$이다.

$a_3=13$이므로 $f(a_3)=1$이고, $a_4=13+3^2=22$이다.

$a_4=22=2\times 11$이므로 $f(a_4)=2$이고, $a_5=22+4=26$이다.

$a_5=26=2\times 13$이므로 $f(a_5)=2$이고, $a_6=26+5=31$이다.

$a_6=31$이므로 $f(a_1)=1$이고, $a_7=31+36=67$이다.

$\therefore$ ⑤

[EBS 수능완성 변형문제 - 123p 20번]

11. 한 주사위를 4번 던져 나온 수를 순서대로 a, b, c, d라고 하자. 이 때, $a-b=0$, $(b-c)(c-d)(d-a)=0$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{5}{54}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{7}{54}$

풀이 : $a-b=0$인 사건을 A, $(b-c)(c-d)(d-a)=0$인 사건을 B라고 하자. 그러면 $P(A\cap B)$를 구하면 된다.

$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)$이다.

$a-b=0$일 확률은 a, c, d가 어떤 수든 상관없이 b에 의해서 결정되고, b가 6개의 수 중 a가 되어야 하므로 $P(A)=\frac{1}{6}$이다.

'$(b-c)(c-d)(d-a)=0$'은 '$b=c$또는 $c=d$또는 $d=a$이다'와 동치이므로 B^C인 사건은 '$b\neq c$, $c\neq d$, $d\neq a$이다' 이다.

따라서 $A\cap B^C$인 사건은 $b\neq c$, $c\neq d$, $d\neq b$ 이고, 즉, 세 수가 모두 달라야 하므로 $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{20}{216}$이다.

$\therefore P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)=\frac{1}{6}-\frac{20}{216}=\frac{16}{216}=\frac{2}{27}$

$\therefore$ ②

수능완성 가형 123p - 20번

20. 상자 속에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 공 5개가 들어있다. 이 상자에서 공 1개를 임의로 꺼내 적혀 있는 수를 확인한 후 꺼낸 공을 다시 상자에 넣는다. 이와 같은 방법으로 이 상자에서 4개의 공을 차례로 꺼내 확인한 수를 각각 a, b, c, d라 하자.

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)=0$$

이 될 확률은?

① $\frac{14}{25}$ ② $\frac{71}{125}$ ③ $\frac{72}{125}$ ④ $\frac{73}{125}$ ⑤ $\frac{74}{125}$

답 : ④

12. 실수 전체에서 정의되는 함수 $f(x)$가 $0\leq k\leq 2\pi$에 대해

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (x\leq k)\\ (\cos k)(x-k)+\sin k & (x>k)\end{cases}$$

이다. $f(x)$의 최댓값과 최솟값이 존재할 때, $\int_0^{2\pi}f(x)dx$의 최댓값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}+1$ ② $\pi+1$ ③ $\frac{3\pi}{2}+1$ ④ $\frac{\pi}{2}+2$ ⑤ $\pi+2$

풀이 : $(\cos k)(x-k)+\sin k$의 식을 보면 $\sin x$의 $x=k$에서의 접선 식임을 관찰할 수 있다.

따라서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값이 존재하려면 $k=\frac{\pi}{2}$ 또는 $k=\frac{3\pi}{2}$여야 한다. 그리고 그래프를 통해 $\int_0^{2\pi}f(x)dx$는 $k=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

$\therefore \int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}dx=\frac{3\pi}{2}+1$

$\therefore$ ③

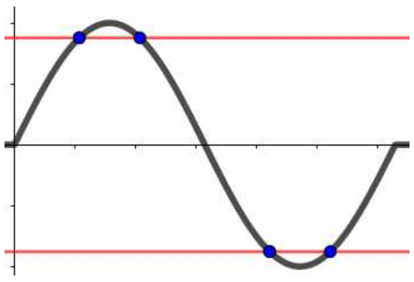
13. $0 \le x \le 2\pi$에서 $\sin^2(x+1)-\sin^2 x=0$의 모든 근의 합은? [3점]

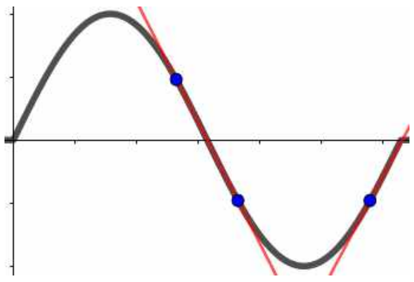
① $3\pi-\frac{3}{2}$ ② $3\pi-2$ ③ $4\pi-\frac{3}{2}$ ④ $4\pi-2$ ⑤ $5\pi-2$

풀이 :

$\sin^2(x+1)-\sin^2 x=(\sin(x+1)-\sin x)(\sin(x+1)+\sin x)=0$

$\sin(x+1)=\sin x$ 또는 $\sin(x+1)=-\sin x$ 이다.





[그림 1] 선대칭 [그림 2] 점대칭

$\sin(x+1)=\sin x$을 만족하려면 x와 $x+1$이 $\frac{\pi}{2}$또는 $\frac{3\pi}{2}$를 기준으로 대칭이여야 하므로 $\frac{x+(x+1)}{2}=\frac{\pi}{2}$또는 $\frac{x+(x+1)}{2}=\frac{3\pi}{2}$, 따라서 $x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$또는 $\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}$

$\sin(x+1)=-\sin x$을 만족하려면 x와 $x+1$이 π또는 2π를 기준으로 대칭이여야 하므로 $\frac{x+(x+1)}{2}=\pi$또는 $\frac{x+(x+1)}{2}=2\pi$, 따라서 $x=\pi-\frac{1}{2}$또는 $2\pi-\frac{1}{2}$

따라서 모든 근의 합은 $5\pi-2$이다.

∴⑤

※ 사인, 코사인 함수는 선대칭과 점대칭을 모두 갖고 있는 함수이기에, 사인, 코사인 함수의 대칭성에 대해 잘 이해하고 있어야 한다. 그래프를 그리면 x와 $x+1$이 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$를 기준으로 대칭이여야 함을 시각적으로 쉽게 확인할 수 있다. (대칭성은 그래프가 최고!) 그리고 x와 $x+1$사이의 거리가 1이므로, x는 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$로부터 1의 절반인 $\frac{1}{2}$만큼 왼쪽으로 떨어져있음을 알 수 있다.

14. 확률변수 X는 정규분포 $N(n, \sigma^2)$를 따른다. (단, $n>0$이다.)

$P(X \le a):P(a<X<b):P(X \ge b)=1:3:2$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a<n<b$이다.
ㄴ. $a+2b>3n$이다.
ㄷ. $P(\lvert X-n\rvert \le b)=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 :

ㄱ. $P(X \le a)+P(a<X<b)+P(X \ge b)=1$이므로

$P(X \le a)=\frac{1}{6}$, $P(a<X<b)=\frac{3}{6}$, $P(X \ge b)=\frac{2}{6}$이다.

$P(X \le n)=\frac{1}{2}$이고 $P(X \le b)=1-P(X \ge b)=\frac{2}{3}$이다.

$P(X \le a)<P(X \le n)<P(X \le b)$이므로 $a<n<b$이다.

ㄴ. $P(X \le k)=\frac{2}{6}$일 때, $\frac{k+b}{2}=n$이므로 $k=2n-b$이다.

$P\left(X \le \frac{a+n}{2}\right)<\frac{2}{6}$이므로 $\frac{a+n}{2}<2n-b$이고, $a+2b<3n$이다.

ㄷ. $P(\lvert X-n\rvert \le b)=P(n-b \le X \le n+b)$

$b-n<b$이므로

$$\begin{aligned} P(n-b \le X \le n+b) &> P(n-(b-n) \le X \le n+(b-n)) \\ &= P(2n-b \le X \le b) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 ㄱ이다.

∴①

※ 당연히 위와 같은 문제는 그래프로 풀어야 한다. 풀이는 식으로 써서 '갑자기 왜 이런 식이 나와?'라고 생각할 수 있지만, 그래프를 관찰하다보면 자연스럽게 나오는 생각이다.

※ ㄴ에서 $a+2b>3n$를 $\frac{a+2b}{3}>n$로 바꾸면, 왼쪽 식은 a와 b를 $2:1$로 내분하는 점이다. 이와 그래프를 이용하여 풀 수도 있다.

※ 그래프에 너무 의존하면 안된다는 것을 ㄷ선지가 보여준다. 선지를 대충보고 그래프에 대충 생각하면, 맞는 것처럼 보인다.

15. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{m}\sqrt{k}(k+3) < \frac{4}{5}(m+1)^{\frac{5}{2}}$ 가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

> i) $m=1$일 때
>
> (좌변)$=4$, (우변)$=\frac{16}{5}\sqrt{2}$.
>
> ii) $m=2$일 때
>
> (좌변)$=4+5\sqrt{2}\fallingdotseq 11$, (우변)$=\frac{36}{5}\sqrt{3}\fallingdotseq 12$
>
> iii) $m=3$일 때
>
> (좌변)$=4+5\sqrt{2}+6\sqrt{3}\fallingdotseq 21$, (우변)$=$ $\boxed{(가)}$
>
> 이므로 $m=1,2,3$일 때 성립한다.
>
> iv) $m=n$(단, $n\geq 3$)일 때 주어진 식이 성립한다고 가정하자.
>
> $\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}(k+3)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}(k+3)+$ $\boxed{(나)}$
>
> $< \frac{4}{5}(n+1)^{\frac{5}{2}}+$ $\boxed{(나)}$
>
> $=\frac{4}{5}\sqrt{n+1}\times$ $\boxed{(다)}$
>
> $< \frac{4}{5}\sqrt{n+1}(n+2)^2$
>
> $< \frac{4}{5}\sqrt{n+2}(n+2)^2=\frac{4}{5}(n+2)^{\frac{5}{2}}$
>
> 따라서 수학적 귀납법에 의해
>
> $\sum_{k=1}^{m}\sqrt{k}(k+3) < \frac{4}{5}(m+1)^{\frac{5}{2}}$이다.

(가)에 들어갈 수를 p, (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n), g(n)$이라고 할 때, $\frac{p\times g(4)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① 32 ② 48 ③ 64 ④ 80 ⑤ 96

풀이 : $m=3$일 때, $\frac{4}{5}(m+1)^{\frac{5}{2}}=\frac{4}{5}\times 4^{\frac{5}{2}}=\frac{128}{5}$

$\therefore p=\frac{128}{5}$

$\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}(k+3)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}(k+3)+\sqrt{n+1}(n+4)$이므로

$\therefore f(n)=\sqrt{n+1}(n+4)$

$$\frac{4}{5}(n+1)^{\frac{5}{2}}+\sqrt{n+1}(n+4)=\sqrt{n+1}\left(\frac{4}{5}(n+1)^2+n+4\right)$$
$$=\frac{4}{5}\sqrt{n+1}\left(n^2+\frac{13}{4}n+6\right)$$

$\therefore g(n)=n^2+\frac{13}{4}n+6$

$\frac{p\times g(4)}{f(3)}=\frac{128}{5}\times 35\times\frac{1}{14}=64$

$\therefore$ ③

[EBS 수능완성 변형문제 - 93p 17번]

16. $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\int_0^1 e^x\cos^2 g(x)dx$의 값은? [4점]

① 1 ② e ③ e^2 ④ e^3 ⑤ e^4

풀이 : $f(x)=\sin x$의 역함수가 $g(x)$이므로 $\sin(g(x))=x$이다. 따라서 $\cos^2 g(x)=1-\sin^2 g(x)=1-x^2$이다.

$$\therefore \int_0^1 e^x\cos^2 g(x)dx=\int_0^1 e^x(1-x^2)dx$$
$$=\left[e^x(-x^2+2x-1)\right]_0^1$$
$$=1$$

$\therefore$ ①

> 수능완성 가형 93p - 17번
>
> 17. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\int_0^1 x\cos^2 g(x)dx$의 값은?
>
> ① $\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $\frac{3}{2}\ln 2$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{2}\ln 2$
>
> 답 : ①

17. $X=\{1,2,3,4,5,6\}$이고 $X\to X$로의 함수 f에 대하여 치역의 임의의 원소 k에 대하여 $f(x)=k$의 서로 다른 근이 n개 존재하도록 하는 함수 f의 개수를 a_n이라고 하자.

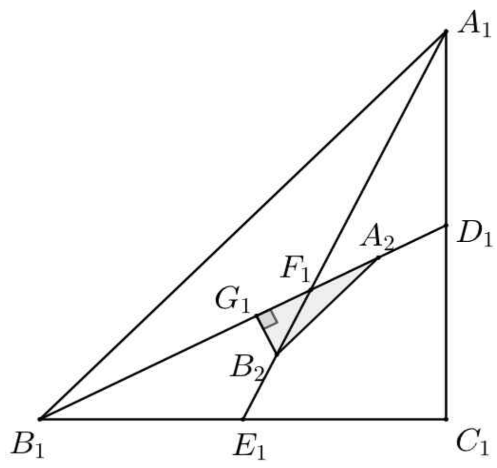
이 때, $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은? [4점]

① 2526 ② 2626 ③ 2726 ④ 2826 ⑤ 2926

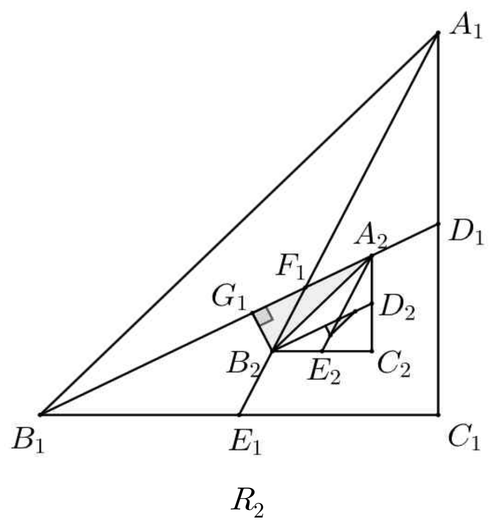
풀이 :
치역의 개수를 m이라고 하자. 치역의 임의의 원소 k에 대하여 $f(x)=k$의 서로 다른 근이 n개 존재하므로 $mn=6$이다.
m은 자연수이므로 $n=4,5$일 때는 모순이다.
$\therefore a_4=a_5=0$
$i)\,a_1$
치역의 임의의 원소 k에 대하여 $f(x)=k$의 서로 다른 근이 1개 존재하므로 치역의 개수는 6이다.
$a_1=6!=720$
$ii)\,a_2$
치역의 임의의 원소 k에 대하여 $f(x)=k$의 서로 다른 근이 2개 존재하므로 치역의 개수는 3이다.
$a_2={}_6C_3\times({}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2)=1800$
$ii)\,a_3$
치역의 임의의 원소 k에 대하여 $f(x)=k$의 서로 다른 근이 3개 존재하므로 치역의 개수는 2이다.
$a_3={}_6C_2\times({}_6C_3\times{}_3C_3)=300$
$ii)\,a_6$
치역의 임의의 원소 k에 대하여 $f(x)=k$의 서로 다른 근이 6개 존재하므로 치역의 개수는 1이다.
$a_6={}_6C_1=6$
$\therefore \sum_{k=1}^{6}a_k=2826$
$\therefore$④

※ 문제 대충 읽지 말자. 공역과 치역을 구분안하고 풀었으면, 문제가 이상하게 보인다.

18. 그림과 같이 $\overline{A_1C_1}=\overline{B_1C_1}=2$인 직각이등변삼각형 $A_1B_1C_1$가 있다. A_1C_1의 중점을 D_1, B_1C_1의 중점을 E_1이라 하고 A_1E_1과 B_1D_1의 교점을 F_1이라고 하자. D_1F_1의 중점을 A_2, E_1F_1의 중점을 B_2라고 하자. B_2에서 B_1D_1에 내린 수선의 발을 G_1이라고 했을 때 삼각형 $A_2B_2G_1$을 색칠하여 얻은 도형을 R_1이라고 하자.
A_1C_1과 평행하면서 A_2를 지나는 직선과 B_1C_1과 평행하면서 B_2를 지나는 직선의 교점을 C_2라고 하고, A_2C_2의 중점을 D_2, B_2C_2의 중점을 E_2이라 하고 A_2E_2과 B_2D_2의 교점을 F_2이라고 하자. D_2F_2의 중점을 A_3, E_2F_2의 중점을 B_3라고 하자. B_3에서 B_2D_2에 내린 수선의 발을 G_2이라고 했을 때 삼각형 $A_3B_3G_2$을 색칠하여 얻은 도형을 R_2이라고 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

⋮

① $\frac{1}{50}$ ② $\frac{1}{25}$ ③ $\frac{3}{50}$ ④ $\frac{2}{25}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

풀이 : E_1에서 B_1D_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$\triangle B_1C_1D_1 \propto \triangle B_1HE_1$이므로 $\overline{B_1H}=1\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이고,

$\overline{HE_1}=1\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

B_2가 E_1F_1의 중점이므로, G_1은 HF_1의 중점이다. A_2는 F_1D_1의 중점이므로, $\overline{A_2G_1}=\frac{1}{2}\overline{D_1H}=\frac{1}{2}\left(\overline{D_1B_1}-\overline{B_1H}\right)=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

$\overline{G_1B_2}=\frac{1}{2}\overline{HE_1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$이다.

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{3}{40}$

$\overline{A_2B_2}=\frac{1}{2}\overline{D_1E_1}=\frac{1}{4}\overline{A_1B_1}$이므로 공비는 $\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$이다.

따라서 $\dfrac{\frac{3}{40}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{2}{25}$이다.

$\therefore$ ④

19. $X=\{1,2,3,4,5,6\}$이다. 함수 $f: X\rightarrow X$가 임의의 $x\in X$에 대하여 $f_{60}(x)=x$일 때, f가 임의의 $x\in X$에 대하여 $f_6(x)=x$일 확률은?
(단, $f_{(n+1)}(x)=f_n(f(x))$이고 $f_1(x)=f(x)$이다.) [4점]

① $\frac{13}{40}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{19}{40}$ ④ $\frac{11}{20}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

풀이 : 만약 치역이 5개 이하일 경우, $f_{60}(x)=x$와 $f_6(x)=x$를 만족하지 못한다. (치역이 아닌 원소 중 하나를 α라고 하면 $f_{60}(\alpha)\neq\alpha$이므로) 따라서 치역은 6개이고, 이는 일대일 대응을 의미한다. 어떤 일대일 함수든, 6번 안에는 자기 자신으로 돌아오기 때문에, 6이하의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6의 최소공배수인 60번 안에는 반드시 자기 자신으로 돌아온다. 따라서 일대일 대응이면, $f_{60}(x)=x$이다. (어떤 수든 $f_1(\alpha)=\alpha$, $f_2(\alpha)=\alpha$, $f_3(\alpha)=\alpha$, $f_4(\alpha)=\alpha$, $f_5(\alpha)=\alpha$, $f_6(\alpha)=\alpha$ 중 하나를 만족시키므로 어떤 수든 $f_{60}(\alpha)=\alpha$이다.)

따라서 전체는 $6!=720$

모든 수에 대하여 $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x$ 중 하나이면 $f_6(x)=x$이고, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x$가 아니면서 $f_4(x)=x$ 혹은 $f_5(x)=x$이면 $f_6(x)=x$가 될 수가 없다.

따라서 전체에서 $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x$가 아니면서 $f_4(x)=x$ 혹은 $f_5(x)=x$일 확률을 빼주면 된다.

i) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x$가 아니면서 $f_4(x)=x$일 경우의 수

${}_6C_4\times(3\times2\times1\times1)\times2=180$

ii) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x$가 아니면서 $f_5(x)=x$일 경우의 수

${}_6C_5\times(4\times3\times2\times1\times1)\times1=144$

$\therefore 1-\frac{180+144}{720}=\frac{396}{720}=\frac{11}{20}$

$\therefore$ ④

※ 감이 안 올 때는 주어진 조건을 쉽게 바꿀 수 있는 방법을 찾아야 한다. 이는 당연히 몇 개의 함수를 만들어보며 관찰하는 것이다. 위의 풀이는 문제를 풀어보지 않고 보면 너무 뜬금없는 풀이지만, 관찰하다보면 쉽게 알 수 있는 것이고, 최대한 엄밀하게 쓰다 보니 복잡해 보이는 것이다. 관찰이 확신이 되었을 때, 증명을 하면 되고, 수능에서는 굳이 증명할 필요가 없다.

20. 상수 a, b에 대하여

$f(x)=e^{-(x-a)^2+b^2}$, $F(x)=\int_a^{x+b} f(t-b)dt$ 이다.

$F(a)=a$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $b>0$이다.) [4점]

ㄱ. $a>b$
ㄴ. $0 \le x \le |a-b|$일 때, $f(x) \le 1$이다.
ㄷ. $\int_0^{a+b} f'(F(x))dx \ge e^{b^2-a^2}-f(F(0))$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 : $f(x)=e^{-(x-a)^2+b^2}=e^{-(x-a-b)(x-a+b)}$
$x=a+b, a-b$일 때 $f(x)=1$이고, 이를 이용해서 그래프를 그려서 시작하자. (직접 그려라)

ㄱ. $F(x)=\int_a^{x+b} f(t-b)dt=\int_{a-b}^{x} f(t)dt$

이고, $F(a)=\int_{a-b}^{a} f(t)dt=a$인데, $a-b<x\le a$일 때 $f(t)>1$

이므로 $a=\int_{a-b}^{a} f(t)dt>\int_{a-b}^{a} dt=b$ 이다. 따라서 $a>b$이다.

(그래프로 쉽게 확인할 수 있다. $a=a\times 1$인 직사각형을 의미하므로 $\int_{a-b}^{a} f(t)dt$의 넓이와 같음을 이용하여 푸는 것이 일반적이다.)

ㄴ. $f(a-b)=1$이고 $0\le x\le |a-b|$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 $0\le x\le |a-b|$에서 $f(x)\le 1$이다. (그래프에서도 쉽게 확인할 수 있다.)

ㄷ.
$$
\begin{aligned}
F(2a-x) &= \int_{a-b}^{2a-x} f(t)dt \\
&= \int_{a-b}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{2a-x} f(t)dt \\
&= \int_{a-b}^{x} f(t)dt+2\int_{x}^{a} f(t)dt \\
&= \int_{a-b}^{x} f(t)dt+2\int_{x}^{a-b} f(t)dt+2\int_{a-b}^{a} f(t)dt \\
&= -F(x)+2F(a)
\end{aligned}
$$

$f(x)$가 $x=a$에 대해 선대칭이므로 $f'(2a-x)=-f'(x)$이다.

$$
\begin{aligned}
f'(F(2a-x)) &= f'(-F(x)+2F(a)) \\
&= -f'(2a+F(x)-2F(a)) \\
&= -f'(F(x))
\end{aligned}
$$

따라서 $f'(F(x))$는 $(a,0)$에 대해 점대칭이다.

$\therefore \int_{a-b}^{a+b} f'(F(x))dx=0$

$0\le x\le |a-b|$에서 $f(x)\le 1$이고, $F(x)\le 0$이므로
$f'(F(x))>0$이다. 따라서 $f(x)f'(F(x))\le f'(F(x))$이다.

$$
\begin{aligned}
\therefore \int_0^{a+b} f'(F(x))dx &= \int_0^{a-b} f'(F(x))dx+\int_{a-b}^{a+b} f'(F(x))dx \\
&= \int_0^{a-b} f'(F(x))dx \\
&\ge \int_0^{a-b} f(x)f'(F(x))dx \\
&= [f(F(x))]_0^{a-b} \\
&= f(F(a-b))-f(F(0)) \\
&= f(0)-f(F(0)) \\
&= e^{b^2-a^2}-f(F(0))
\end{aligned}
$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
$\therefore$ ⑤

※ 점대칭 함수의 합성함수를 묻는 문제이다. ㄷ 풀이에서 엄밀하게 증명을 했지만, 실제로 그럴 필요 없고 그래프면 충분하다. $f(x)$가 $x=a$에 선대칭함수이므로, $F(x)$는 $(a,F(a))=(a,a)$ 점대칭함수이고, $f'(x)$는 $(a,f'(a))=(a,0)$ 점대칭함수이다. 따라서 합성함수 $f'(F(x))$는 $(a,f'(F(a)))=(a,0)$ 점대칭함수이다! 이렇게 바로 $\int_{a-b}^{a+b} f'(F(x))dx=0$를 알 수 있다.

※ ㄷ보기는 ㄱ, ㄴ에 힌트가 있다. 안풀릴 때는 앞 선지들을 관찰해보자.

21. 자연수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 조건들이 성립한다.

(가) $n \ge 9$일 때만 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$이다.

(나) 임의의 자연수 n에 대하여 $a_{a_n} = n$ 이다.

(다) $a_{(a_n)^2} \ne n^2$을 만족시키는 n은 α, β, γ 이다.

이 때, $\alpha\beta\gamma + \sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하시오. (단, α, β, γ은 서로 다른 자연수이다.) [4점]

① 42 ② 44 ③ 46 ④ 48 ⑤ 50

풀이 : (가) 조건에서 $n \ge 9$일 때 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$이므로

$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = n+1$이다.

따라서 $n \ge 10$일 때, $a_n = n$이다.

(나) 조건에서

$a_n = n$일 때, $a_{a_n} = a_n = n$이므로 모순이 없다.

$a_n = m\,(n \ne m)$일 때, $a_{a_n} = a_m$이므로 $a_m = n$이다.

이는 일대일대응을 의미하는데, 따라서 $a_m = a_n$일 때, $m = n$이다.

$n \ge 10$일 때, $a_n = n$이므로 $n \le 9$일 때, $a_n \le 9$이다.

만약 $a_1 = 1$이라면 $n = 1$일 때 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$이므로 (가) 조건에 모순이고, $a_9 = 9$라면 $n = 8$일 때 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$이므로 (가) 조건에 모순이다. 따라서 $a_1 \ne 1$, $a_9 \ne 9$이다.

(다) 조건에서

$a_{(a_1)^2} = 1^2$이라고 가정하자. $a_1 = m\,(m \ne 1)$이면 $a_{m^2} = 1$이고, $a_1 = m^2$이다. $m = m^2$이므로 $m = 1$이다. 따라서 모순이다.

$\therefore \alpha = 1$

$a_{(a_9)^2} = 9^2 = 81$라고 가정하자. 그러면 $a_{81} = (a_9)^2$이므로 $a_9 = 9$이고, 이는 모순이다.

$\therefore \beta = 9$

$i)\gamma = 2$일 때

$n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$일 때는 $a_{(a_n)^2} = n^2$이다.

$n = 4, 5, 6, 7, 8$일 때, $n^2 \ge 10$이므로 $a_{(a_n)^2} = n^2 = a_{n^2}$이고, $(a_n)^2 = n^2$이고, $a_n = n$이다.

$a_3 = m$이라고 두면 $a_{m^2} = 9$인데, 이를 만족하려면 $m^2 < 9$이므로 $m = 1$또는 $m = 2$이다.

$m = 1$이면 (다)조건에서는 $a_1 = 9$인데, (나)조건에서는 $a_1 = 3$이므로 모순이다.

$m = 2$이면 $a_4 = 9$가 되므로 모순이다.

$ii)\gamma = 3$일 때

$n = 2, 4, 5, 6, 7, 8$일 때는 $a_{(a_n)^2} = n^2$이다.

$n = 4, 5, 6, 7, 8$일 때, $i)$에서와 같이 $a_n = n$이다.

$a_{(a_2)^2} = 2^2 = 4 = a_4$이므로 $(a_2)^2 = 4$, $a_2 = 2$이다.

$a_3 \ne 3$이면 $a_n \ne n$을 만족시키는 자연수 n이 1, 3, 9로 3개 존재하므로 모순이다.($a_n = m$일 때, $a_m = n$이여야 하므로 짝수개 존재해야함.) 따라서 $a_3 = 3$이고, $a_1 = 9$, $a_9 = 1$이다.

$\therefore \alpha\beta\gamma + \sum_{k=1}^{5} a_k = 50$

$iii)\gamma = 4$일 때

$n = 2, 3, 5, 6, 7, 8$일 때는 $a_{(a_n)^2} = n^2$이다.

아까와 같은 논의로 $a_3 = m$이라고 두면 $a_{m^2} = 9$인데, 이를 만족하려면 $m^2 < 9$이므로 $m = 1$또는 $m = 2$이다.

$m = 1$이면 (다)조건에서는 $a_1 = 9$인데, (나)조건에서는 $a_1 = 3$이므로 모순이다.

$m = 2$이면 (다)조건에 의해 $a_4 = 9$이고, (나)조건에 의해 $a_2 = 3$인데, 그러면 $a_n \ne n$을 만족시키는 자연수 n이 1, 2, 3, 4, 9로 5개 존재하므로 모순이다.

$iv)\gamma = 5, 6, 7, 8$중 하나일 때(그 중 5라고 하자)

$n = 2, 3, 4, 6, 7, 8$일 때는 $a_{(a_n)^2} = n^2$이다.

그러면 아까와 같은 논의로 $a_2 = 2$이고 $a_3 = 1$혹은 $a_3 = 2$인데 $a_2 = 2$이므로 $a_3 = 1$이다. (가)조건에 의해 $n = 3$일 때 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$가 성립하므로 모순이다.

$\therefore$ ⑤

※ $n \ge 9$때 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$라는 조건은 $n \ge 9$일 때, $a_n = n$가 아니라, $n = 10$일 때부터 $a_n = n$라는 말이다.

※ $n \ge 9$일 때만 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$라고 해서 $n \ge 10$일 때만 $a_n = n$이라는 소리는 아니다.

※ 수열은, 정의역을 자연수로 하는 함수일 뿐이다. 이를 잘 이해하고 있다면, 이 수열이 일대일함수를 의미하는 것을 쉽게 찾을 수 있었을 것이다. ($a_{a_n} = n$은 $f(f(x)) = x$와 같다는 것을 눈치 챘는지 점검해봐라. 오른쪽 형태로 보니 익숙할 것이다.) 그러면 수열에서도 일대일함수의 특징들을 사용해보면, 함숫값(수열의 값)이 같으면 정의역도 같다. 따라서 $a_m = a_n$일 때, $m = n$이다. 이를 찾는 것이 이 문제의 핵심이다.

22. 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x \to 3} \frac{\ln(x-a)}{x^2-9} = b$일 때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오. [3점]

풀이 ; $\lim_{x \to 3}(x^2-9) = 0$이므로 $\lim_{x \to 3} \ln(x-a) = 0$이다. $\therefore a = 2$

$b = \lim_{x \to 3} \frac{\ln(x-2)}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3} \times \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$

$\therefore \frac{a}{b} = 12$

23. $\left(x^8 + 3x^6 + 3x + \frac{1}{x}\right)^5$의 x의 계수를 구하시오. [3점]

풀이 : $\left(x^8 + 3x^6 + 3x + \frac{1}{x}\right)^5$의 x의 계수는 $\left(3x + \frac{1}{x}\right)^5$의 x의 계수와 같다.

$\therefore {}_5C_3 \times 3^3 = 270$

24. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 54$이고, $n \geq 4$일 때, $a_n \leq 6$이다. 공비의 최솟값을 m이라고 할 때, $\frac{1}{m^6}$의 값을 구하시오. [3점]

풀이 : 공비가 음수일 때, $a_4 < 0$이다. 따라서 $a_5 = 6$일 때, 공비가 최솟값이 된다. $a_5 = 6$이면, $m^4 = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$이고, $\frac{1}{m^6} = 27$이다.

※ 문제 대충 읽지 말자. 아마 답을 81이라고 썼다면, 공비가 최솟값인지 최댓값인지도 확인안하고, 공비가 음수일수도 있다는 점을 고려 안한 상태로 $a_4 = 6$으로 두고 푼 것이다.

25. 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 $\alpha\%$로 모평균을 추정할 때, 표본평균이 $\overline{x_1}$, 신뢰구간이 $2a \leq m \leq b$이다. 이후에 같은 모집단에서 크기가 $4n$인 표본을 임의추출하여 신뢰도 $\alpha\%$로 모평균을 추정할 때, 표본평균이 $\overline{x_2}$, 신뢰구간이 $b \leq m \leq 75-a$이다.
이 때, $\overline{x_1} + 2\overline{x_2} + 3b$의 값을 구하시오. [3점]

풀이 : $\overline{x_1} = \frac{2a+b}{2}$, $\overline{x_2} = \frac{b+75-a}{2}$

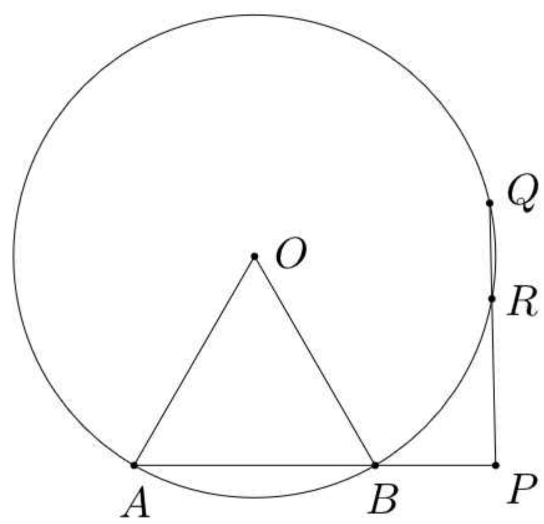
첫 번째와 두 번째에 1 : 4의 비율로 표본을 뽑았으므로, 신뢰구간의 길이는 2 : 1이다.

$b - 2a = 2 \times (75 - a - b)$

$\therefore b = 50$

$\therefore \overline{x_1} + 2\overline{x_2} + 3b = \frac{9}{2}b + 75 = 300$

26. 반지름이 20인 원 C의 중심이 O이고 점 A와 B가 원 C 위에 있으며 삼각형 OAB는 정삼각형이다. 직선 AB위에 점 P가 있고 $\overline{BP} = 10$이다. 원 위의 점 Q에 대하여 직선 PQ와 원 C의 교점을 R이라고 하자. 이 때, $\overline{PR} : \overline{RQ} = 3 : 1$이다. 사각형 OAPQ의 넓이를 $a\sqrt{3} + b\sqrt{7}$이라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 원 밖에 있고, 점 Q는 점 $\overline{PQ} > \overline{PR}$이며, a와 b는 유리수이다.) [4점]



풀이 : $\overline{RQ} = k$라고 하면 $\overline{PB} \times \overline{PA} = \overline{PR} \times \overline{PQ}$이므로

$30 \times 10 = 3k \times 4k$이다. $\therefore k = 5$

점 O에서 AP, QP에 내린 수선의 발을 H_1, H_2라고 하면,

$\overline{OH_1} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$이고, $\overline{OH_2} = \sqrt{20^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{15\sqrt{7}}{2}$

이다. OAPQ의 넓이는 삼각형OAP와 OPQ의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 30 + \frac{1}{2} \times \frac{15\sqrt{7}}{2} \times 20 = 150\sqrt{3} + 75\sqrt{7}$이다.

$a = 150, b = 75$

$\therefore a + b = 225$

[EBS 수능완성 변형문제 - 148p 12번]

27. $y=\log_a x$ 위에 있는 점 A, B가 각각 제 4사분면, 제 1사분면에 있다. 점 O, A, B를 지나는 원 C가 x축과 만나는 점 중 O가 아닌 점을 D라고 할 때, 다음 조건들이 성립한다.

(가) 원 C는 y축과 접한다. (나) $\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$

삼각형 OAB의 넓이가 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$일 때, a^2의 값을 구하시오. (단 점 O는 원점이고, $a>1$이다.) [4점]

풀이 : (가) 조건에서 원 C가 원점을 지나는데 y축과 접하므로, 원 C는 y축과 원점에서 접한다. 따라서 원의 중심은 x축 위에 있다.

(나) 조건에서 $\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$이므로 AB는 원 C의 지름이다.

따라서 A의 y좌표와 B의 y좌표는 절댓값이 같고 부호가 반대이다. 원의 중심을 $(k,0)$, 점 A의 좌표를 $k+\alpha$라고 하면,

$\log_a(k+\alpha)=-\log_a(k-\alpha)$이므로 $\log(k^2-\alpha^2)=0$이고,

$k^2=\alpha^2+1$이다. 따라서 피타고라스 정리에 의해 A의 y좌표는 1이다.

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times k\times 2$이므로 $k=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$이고, $\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다.

$\log_a(k+\alpha)=1$이므로 $a=k+\alpha=\sqrt{2}$

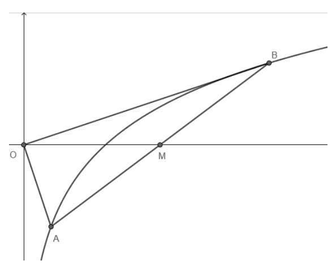
$\therefore a^2=2$

수능완성 가형 148p - 12번

12. 그림과 같이 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AB의 중점 M은 x축 위에 있다. (나) 두 직선 OA, OB는 서로 수직이다.

삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



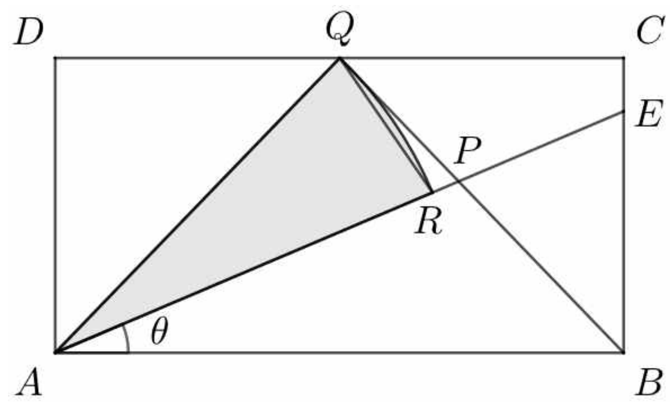
① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ $\dfrac{11}{6}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{13}{6}$

답 : ②

[10월 더프리미엄 대성 모의고사 변형]

28. $\overline{AB}=2$이고, $\overline{BC}=\tan2\theta$인 직사각형 ABCD가 있다. $\angle EAB=\theta$이고 점 P는 선분 AE를 $\tan2\theta:\tan\theta$로 내분하는 점이다. 직선 BP와 DC의 교점을 Q라고 하고 선분 AE위의 점 R에 대하여 $\overline{AQ}=\overline{AR}$이다.

부채꼴 AQR의 넓이를 $f(\theta)$, $\overline{RQ}=g(\theta)$, $\overline{QP}=h(\theta)$라고 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)h(\theta)}{g(\theta)}=\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소이고, $0<\theta<\dfrac{\pi}{8}$이다.) [4점]



풀이 : AB와 평행하고 점 E를 지나는 직선과 QB의 교점을 F라고 하자. 그러면 $\overline{EF}:\overline{AB}=\overline{EP}:\overline{AP}=\tan\theta:\tan2\theta$

$\therefore \overline{EF}=\dfrac{2\tan\theta}{\tan2\theta}$

$\overline{EF}:\overline{CQ}=\overline{BE}:\overline{BC}=2\tan\theta:\tan2\theta$ 이므로 $\overline{CQ}=1$이다.

따라서 $\overline{DQ}=1$이고 $\overline{AD}=\tan2\theta$이므로 $\angle DQA=2\theta$이다.

$\therefore \angle QAR=\theta$

$\overline{AQ}=\dfrac{1}{\cos2\theta}$이므로

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{\cos2\theta}\right)^2\times\theta$ 이고, $g(\theta)=\dfrac{1}{\cos2\theta}\times\sin\dfrac{\theta}{2}\times2$이다.

$\overline{AQ}:\overline{AB}=\overline{QP}:\overline{BP}=\dfrac{1}{\cos2\theta}:2$이므로

$$h(\theta)=\overline{QP}=\frac{1}{\cos2\theta}\times\frac{\frac{1}{\cos2\theta}}{\frac{1}{\cos2\theta}+2}=\frac{1}{\cos2\theta(1+2\cos2\theta)}$$

$$\therefore\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)h(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{4}\times\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{\cos2\theta(1+2\cos2\theta)}=\frac{1}{6}$$

$\therefore p+q=7$

29. 계수가 모두 정수인 3차함수 $f(x)$에 대하여 다음 조건을 만족한다.

> 임의의 0이상의 정수 n에 대하여 $f^{(n)}(0)+n \ge 0$ 이 성립한다.

$f(k)=15$이 되는 함수 $f(x)$의 경우의 수를 a_k라고 할 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$ 의 값을 구하시오.

(단, $f^{(0)}(x)=f(x)$이고, $f^{(n+1)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(n)}(x)$이다.) [4점]

풀이 : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라고 하자. $f(x)$가 3차함수이므로 $a \ne 0$이다. 조건에 $n=0,1,2,3$을 차례대로 대입하고 정리하면 $d \ge 0$, $c \ge -1$, $b \ge -1$, $a \ge -\frac{1}{2}$이다. $a \ne 0$이므로 $a \ge 1$로 봐도 된다. $c+1=c'$, $b+1=b'$, $a-1=a'$이라고 하자.

$i)a_1$

$a+b+c+d=15$이므로 $a'+b'+c'+d=16$이다.

$\therefore {}_4H_{16}=969$

$ii)a_2$

$8a+4b+2c+d=15$이므로 $8a'+4b'+2c'+d=13$이다.

d는 홀수여야 하므로 $d=2d'+1$이라고 두면

$4a'+2b'+c'+d'=6$ 이다.

c',d'이 짝수인 경우, $c'=2c''$, $d'=2d''$라 두면

$b'+c''+d''=3-2a'$이므로 ${}_3H_3+{}_3H_1=13$

c',d'이 홀수인 경우, $c'=2c''+1$, $d'=2d''+1$이라 두면

$b'+c''+d''=2-2a'$이므로 ${}_3H_2+{}_3H_0=7$

$\therefore 13+7=20$

$ii)a_3$

$27a+9b+3c+d=15$이므로 $27a'+9b'+3c'+d=0$ 이다.

따라서 1가지이다.

a_4부터는 a의 계수가 급격하게 커지므로 존재하지 않는다. 따라서 $a_4, a_5=0$이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=969+20+1=990$

※ 3차함수라는 조건을 무시하지 말자. 조건은 어디에나 존재한다.

30. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$이고 $a^2 \le 3b+9$이다.

$0 \le t \le 2$에서 정의되는 연속함수 $g(t)$, $h(t)$에 대하여 $0<t<2$에서 다음 조건들이 성립한다.

> (가) $f(t)=f(g(t))=f(h(t))$
> (나) $g(t)<t<h(t)$

$x=5t-4g(t)$, $y=f(t)$를 매개변수로 하는 (x,y)곡선과, $x=4h(t)-3t$, $y=f(t)$를 매개변수로 하는 (x,y)곡선과, $0 \le x \le 2$에서의 $f(x)$곡선으로 이루어진 도형의 넓이를 구하시오. [4점]

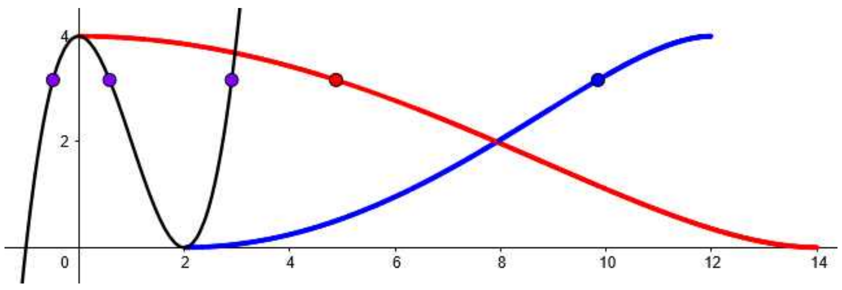
풀이 : $f(x)$가 $x=\alpha,\beta(\alpha<\beta)$에서 극값을 갖는다고 하자. (가) 조건과 (나) 조건을 동시에 만족하려면 $f(x)=f(t)$의 근이 3개가 존재해야 하고, 그 중 t가 2번째로 작은 근이므로 $\alpha \le 0$, $\beta \ge 2$이고, $\beta-\alpha \ge 2$이다. $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}$, $\alpha\beta=\frac{b}{3}$이고, $(\alpha-\beta)^2=\frac{4}{9}a^2-\frac{4}{3}b \le 4$이다.

$2 \le \beta-\alpha \le 2$이므로 $\beta-\alpha=2$이고 $\alpha=0, \beta=2$이다.

$\therefore f(x)=x^3+3x^2+c$

$5t-4g(t)=\frac{5t-4g(t)}{5-4}$이므로 $g(t)$와 t를 $5:4$로 외분하는 점이고, $4h(t)-3t=\frac{4h(t)-3t}{4-3}$이므로 t와 $h(t)$를 $4:3$으로 외분하는 점이다. 이를 통해서 2개의 매개변수 곡선을 그려보면 다음과 같다. 이때, c가 어느 값이든 넓이는 상관없으므로 계산의 편의상 $c=4$로 두자.



교점을 찾아보면, $5t-4g(t)=4h(t)-3t$, $g(t)+h(t)=2t$, 즉 t가 $g(t)$와 $h(t)$의 중점일 때, $t=1$, $f(t)=2$일 때 교점이다.

구하려는 넓이를 $y=2$를 기준으로 잘라서 위의 넓이와 아래의 넓이를 따로 구해보자.

편의상 보라색 점을 x좌표가 작은 순서대로 A, B, C 빨간색 점을 D, 파란색 점을 E라고 하자.

그리고 $y=2$와 $f(x)$로 이루어진 도형 중 $x=1$ 왼쪽에 있는 도형의 넓이를 S라고 하자.

$i)$ $y=2$ 위의 넓이

빨간색 매개곡선이 $g(t)$와 t의 $5:4$ 외분점이므로 $\overline{BD}=4\overline{AB}$이다. 따라서 구하려는 넓이는 $4S$이다.

$i)$ $y=2$ 아래의 넓이

파란색 매개곡선이 t와 $h(t)$의 $4:3$ 외분점이므로 $\overline{BE}=4\overline{BC}$이다. 따라서 구하려는 넓이는 $4S$이다.

S를 쉽게 구하기 위해서 $f(x)$를 평행이동해서

$f(x)=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=x^3-3x$이라 두면

$S=\int_{-\sqrt{3}}^{0}(x^3-3x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0}=\frac{9}{4}$이다.

$\therefore 8S=18$