[박하나/한성은 모의고사]

대학수학능력시험 수학(가형) 연습 (1/4)

한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

평가원이 아무렇게나 내니까 나도 아무렇게나.
대충 네 개쯤 만들지 않을까 싶어서 (1/4)을 넣었습니다.

hansungeun.com
 – 저자소개, 학습자료, 교재판매

CCL

– 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
– 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{8}\times\sqrt{9}$의 값은? [2점]

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

2. $a_5=7$이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_7의 값은? [2점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+1}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

4. 정적분 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. $(2x^2+x)^4$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

6. 부등식 $\log_2(4x-4)<1-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

7. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고

$$\mathrm{E}(2X-1)=7,\quad \mathrm{V}(2X-1)=12$$

일 때, n의 값은? [3점]

① 20 ② 18 ③ 16
④ 14 ⑤ 12

8. 함수 $y=2\cos(ax)+b$가 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극솟값 0을 가질 때, $a+b$의 최솟값은? (단, $a>0$, $b>0$이다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

9. 곡선 $\ln(xy)=ax-2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 상수이다.) [3점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

10. 모든 자연수 n에 대하여 자연수 3^n+4^n의 일의 자리의 수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값은? [3점]

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ 6
④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

11. 함수 $y=\ln(e^2-x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

① e^2-2　② e^2-1　③ e^2　④ e^2+1　⑤ e^2+2

12. 한 개의 주사위를 6의 약수가 세 번 나올 때까지 반복해서 던진다. 이 시행이 주사위를 5번 던져서 끝날 확률은? [3점]

① $\frac{3}{27}$　② $\frac{14}{81}$　③ $\frac{16}{81}$　④ $\frac{2}{9}$　⑤ $\frac{20}{81}$

13. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=f(8-x)$$

이고 $\mathrm{P}(0 \le X \le 3)=\mathrm{P}(4 \le Y \le 7)$일 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

14. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 (1-t)f(tx)dt=\ln x \quad (x>0)$$

를 만족시킬 때, $f(e^2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

15. 다항함수 $p(x)$가

$$\int_0^\pi (p(x)+p''(x))\cos x dx = -5$$

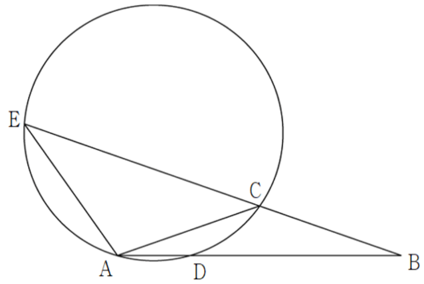
를 만족시킨다. $p'(0)=2$일 때, $p'(\pi)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 그림과 같이

$$\overline{AB}=4\sqrt{2}, \quad \overline{BC}=\overline{CA}=3$$

인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 1:3 내분점을 D, 세 점 A, C, D를 지나는 원이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 E라 할 때, $\sin(\angle EAC)$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

17. 주머니에 1부터 16까지의 숫자가 하나씩 적혀 있는 16개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는 시행을 짝수가 적힌 공 8개를 모두 꺼낼 때까지 반복할 때 꺼낸 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

> 확률변수 X가 가질 수 있는 최솟값은 8이고, 최댓값은 16이다. $8 \le k \le 16$인 자연수 k에 대하여 $\mathrm{P}(X=k)$를 구하자.
>
> k번째에 마지막 짝수가 적힌 공을 꺼내려면 이전 $k-1$개의 공을 꺼낼 때까지 짝수가 7개, 홀수가 $k-8$개가 나와야 하고, k번째에 짝수가 적힌 공을 꺼내야 하므로
>
> $$\mathrm{P}(X=k)=\frac{{}_8\mathrm{C}_7 \times {}_8\mathrm{C}_{k-8}}{{}_{16}\mathrm{C}_{k-1}} \times \boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이다. $0 \le r \le n$인 정수 r에 대하여
>
> $${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$
>
> 이므로
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=8}^{16} k \times \mathrm{P}(X=k)$$
> $$=\frac{8}{{}_{16}\mathrm{C}_8}\sum_{k=8}^{16}\boxed{\text{(나)}} \ \cdots \ (*)$$
>
> 이다. $0 \le r \le n$인 정수 r에 대하여
>
> $${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$$
>
> 이므로 $(*)$은
>
> $$\frac{8}{{}_{16}\mathrm{C}_8} \times \boxed{\text{(다)}}=\frac{136}{9}$$
>
> 이다.

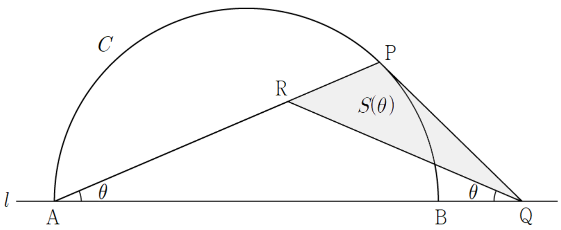
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $\dfrac{a \times f(15)}{g(15)}$의 값은? [4점]

① $\frac{17}{9}$ ② $\frac{19}{9}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{23}{9}$ ⑤ $\frac{25}{9}$

18. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 4번 반복할 때, 꺼낸 공에 적힌 수를 차례대로 a, b, c, d라 하자. $a<b<c$일 때 $d<c$일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

19. 그림과 같이 직선 l 위의 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하는 반원 C가 있다. 반원 C 위의 점 P에서의 접선이 직선 l과 만나는 점을 Q, 선분 AP 위에 점 R을 $\angle \mathrm{PAB}=\angle \mathrm{RQA}$가 되도록 잡는다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이는 $S(\theta)$이다. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

20. 양수 t와 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-x-1$에 대하여 원점을 지나고 기울기가 t인 직선과 곡선 $y=f(x)$가 제1사분면에서 만나는 점을 P, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 접하는 직선의 기울기를 $g(t)$라 하자. $g(a)=5$일 때, $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1
④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

21. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$에 가장 가까운 정수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_2=1$, $a_3=2$이다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_7=3$

ㄴ. $a_k=4$인 자연수 k의 개수는 8이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{20} a_n=60$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\log_3 54-\frac{1}{\log_2 3}$의 값을 구하여라. [3점]

23. 삼각형 ABC가

$$\overline{\mathrm{AB}}=5,\quad \overline{\mathrm{AC}}=7,\quad \cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{3}{5}$$

를 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{BC}}^2$의 값을 구하여라. [3점]

24. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때 문자 a끼리는 이웃하지 않는 경우의 수를 구하여라. [3점]

25. 첫째항이 14인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_5 = S_{10}$$

일 때, S_3의 값을 구하여라. [3점]

26. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax-b}{\ln x} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, ab의 값을 구하여라. (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = n(n+1), \quad \sum_{k=1}^{2n} a_k = 2n(n+1)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{6} a_{2k-1}$의 값을 구하여라. [4점]

28. 0 이상 네 정수 a, b, c, d가

$$(a+b+c)(a+b+d) = 40$$

를 만족시킨다. a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하여라. [4점]

29. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 모든 함수 $f:A\to A$ 중에서 임의로 하나를 선택하고,

$$g(1)\le g(2)\le g(3)$$

를 만족시키는 모든 함수 $g:A\to A$ 중에서 임의로 하나를 선택하여 합성함수 $h=g\circ f$를 만들 때, 함수 h가

$$h(1)\le h(2)\le h(3)$$

을 만족시킬 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 함수

$$g(x)=\int_0^x |t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

라 할 때, $g(x)=12\pi$를 만족시키는 x의 최솟값을 α, 최댓값을 β라고 하자. $\int_\alpha^\beta t\sin t dt$의 값을 A라 할 때, $\dfrac{-20A}{\pi}$의 값을 구하여라. [4점]

[박하나/한성은 모의고사]

수능(가형) 연습(1/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	①	02	③	03	①	04	②	05	⑤
06	②	07	③	08	①	09	④	10	②
11	④	12	③	13	④	14	⑤	15	③
16	⑤	17	①	18	④	19	③	20	⑤
21	⑤	22	3	23	32	24	60	25	36
26	4	27	42	28	90	29	451	30	80

COMMENT 14

$tx=\alpha$로 치환하자.

$$\int_0^1 (1-t)f(tx)dt=\int_0^x \left(1-\frac{\alpha}{x}\right)f(\alpha)\left(\frac{1}{x}d\alpha\right)$$

이다. α에 대한 정적분이므로 x는 상수취급, 밖으로 묶어낼 수 있다.

$$\int_0^x \left(1-\frac{\alpha}{x}\right)f(\alpha)\left(\frac{1}{x}d\alpha\right)=\frac{1}{x^2}\int_0^x (x-\alpha)f(\alpha)d\alpha$$

이다. 준 식을 다시 쓰면 $\displaystyle\int_0^x (x-\alpha)f(\alpha)d\alpha=x^2\ln x$이다.

양 변을 미분하면 $\displaystyle\int_0^x f(\alpha)d\alpha=2x\ln x+x$이고, 다시 한 번 미분하면 $f(x)=2\ln x+3$이다.

COMMENT 16

방멱 $\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BE}}$ 때리면 $\overline{\mathrm{EC}}=5$이다.

삼각형 ACE에서 사인법칙을 돌리자. $\sin(\angle\mathrm{AEC})=\sin(\angle\mathrm{CDB})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

참고) 삼각형 ABE에서 $\overline{\mathrm{AE}}$를 구하고 삼각형 ACE에서 코사인 돌려도 가능.

COMMENT 17

$\dfrac{1}{17-k}$, $\quad {}_k\mathrm{C}_8$, $\quad {}_{17}\mathrm{C}_8$

COMMENT 18

$a<b<c$를 만족시키는 경우의 수와 $a<b<c$이며 $d<c$를 만족시키는 경우의 수를 c의 값에 따라 분류하여 나열하면,

Case1) $c=3$일 때 3개, 0개　　Case2) $c=4$일 때 9개, 3개
Case3) $c=5$일 때 18개, 12개　　Case4) $c=6$일 때 30개, 30개

이다. 구하는 확률은 $\dfrac{0+3+12+30}{3+9+18+30}$이다.

COMMENT 19

선분 AB의 중점을 O라 하면 $\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{\cos 2\theta}$이다. 구하는 것은 삼각형 APQ의 넓이에서 삼각형 AQR의 넓이를 빼는 각이군.

이등변삼각형 ARQ를 쪼개보자. 밑변 $\overline{\mathrm{AQ}}=1+\dfrac{1}{\cos 2\theta}$에 높이는 딱 보니 $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cos 2\theta}\right)\times\tan\theta$이다.

COMMENT 20

점 P의 x좌표를 u라 하면 $\dfrac{1}{2}u^3-u-1=tu$이고 $g(t)=\dfrac{3}{2}u^2-1$이다.

$\Rightarrow$ $g(a)=5$일 때, $u=2$이고 $t=\dfrac{1}{2}(=a)$이다.

$\Rightarrow$ $\left(\dfrac{3}{2}u^2-1\right)\dfrac{du}{dt}=t\times\dfrac{du}{dt}+u$에서 $\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=a}=\dfrac{4}{9}$이고 $g'(t)=3u\times\dfrac{du}{dt}$에서 $g'(a)=\dfrac{8}{3}$이다.

COMMENT 21

기역 : $2<\sqrt{7}<3$이고, $2.5<\sqrt{7}$이다. 제곱해봐.

니은 : $3.5<\sqrt{k}<4.5$에서 $12.25<k<20.25$이다.

디귿 : $a_k=m$이려면 $m-\frac{1}{2}<\sqrt{k}<m+\frac{1}{2}$에서 $m^2-m+\frac{1}{4}<k<m^2+m+\frac{1}{4}$이므로

$a_k=m$인 k는 m^2-m+1에서 m^2+m까지 $2m$개다. 따라서 a_n은 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, ⋯로 간다.

COMMENT 28

40은 1×40 또는 2×20 또는 4×10 또는 5×8로 나타난다.

Case1) $a+b+c=1$이고 $a+b+d=40$ $\Rightarrow$ $(a,\ b,\ c)$를 결정하면 $d=c+39$로 자동 결정이다. ${}_3\mathrm{H}_1$가지.

Case2) $a+b+c=2$이고 $a+b+d=20$ $\Rightarrow$ $(a,\ b,\ c)$를 결정하면 $d=c+18$로 자동 결정이다. ${}_3\mathrm{H}_2$가지.

Case3) $a+b+c=4$이고 $a+b+d=10$ $\Rightarrow$ $(a,\ b,\ c)$를 결정하면 $d=c+6$로 자동 결정이다. ${}_3\mathrm{H}_4$가지.

Case4) $a+b+c=5$이고 $a+b+d=8$ $\Rightarrow$ $(a,\ b,\ c)$를 결정하면 $d=c+3$로 자동 결정이다. ${}_3\mathrm{H}_5$가지.

나머지는 대칭으로 2배 때려준다.

COMMENT 29

전체 경우의 수 : f는 3^3가지, g는 ${}_3\mathrm{H}_3$가지가 가능하므로 270가지이다.

사건의 경우의 수 :

Case1) 함수 g의 치역의 원소의 개수가 1일 때 : 27×3

Case2) 함수 g의 치역의 원소의 개수가 2일 때 : 15×6

Case3) 함수 g의 치역의 원소의 개수가 3일 때 : 10×1

※ Case2의 15를 구하는 것이 상당히 노가다성이다. 꼼꼼하게 쩨려보자.

COMMENT 30

$x\sin x$는 $\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \cdots$에서 부호를 바꾼다. $\int_0^x t\sin t\,dt$의 부호를 조사하자.

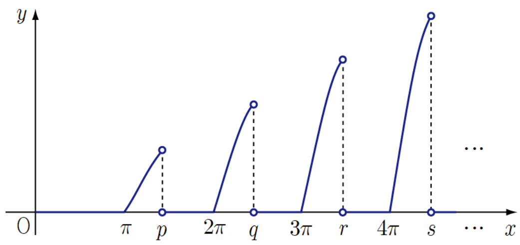
$\int_0^x t\sin t\,dt=[-t\cos t]_0^x+\int_0^x \cos t\,dt=-x\cos x+\sin x$에서 방정식 $\int_0^x t\sin t\,dt=0$의

양수인 근들은 $\tan x=x$의 양수인 근들과 같으므로 구간

$\left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right),\ \left(2\pi,\ \frac{5}{2}\pi\right),\ \left(3\pi,\ \frac{7}{2}\pi\right),\ \left(4\pi,\ \frac{9}{2}\pi\right),\ \cdots$

에 하나씩 존재한다. 이 근들을 작은 것부터 순서대로 $p,\ q,\ r,\ s,\ \cdots$라 하면 $g'(x)$는 다음과 같고 그래프는 아래 오른쪽과 같다. ($g(x)$는 $p,\ q,\ r,\ s,\ \cdots$에서는 미분불가능이다.)

$$g'(x)=\begin{cases} x\sin x-x\sin x & (0<x\le\pi) \\ -x\sin x-x\sin x & (\pi<x<p) \\ -x\sin x+x\sin x & (p<x\le2\pi) \\ x\sin x+x\sin x & (2\pi<x<q) \\ x\sin x-x\sin x & (q<x\le3\pi) \\ -x\sin x-x\sin x & (3\pi<x<r) \\ -x\sin x+x\sin x & (r<x\le4\pi) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{cases} \Rightarrow g'(x)=\begin{cases} 0 & (0<x\le\pi) \\ -2x\sin x & (\pi<x<p) \\ 0 & (p<x\le2\pi) \\ 2x\sin x & (2\pi<x<q) \\ 0 & (q<x\le3\pi) \\ -2x\sin x & (3\pi<x<r) \\ 0 & (r<x\le4\pi) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{cases}$$



계산해보면 도함수의 넓이는 $[\pi,\ p]$에서 2π, $[2\pi,\ q]$에서 4π, $[3\pi,\ r]$에서 6π이다.

이 값이 $g(x)$의 증가량이므로 $g(x)=12\pi$인 구간은 $[r,\ 4\pi]$이다.

정적분 $\int_r^{4\pi} t\sin t\,dt$는 $[-t\cos t+\sin t]_r^{4\pi}=-4\pi$이므로 답은 80이다.