기하와 벡터 학습 자료

-벡터의 일차결합-

- 이 자료는 고등학교 내신/수능 대비용 수학 교재인 「박수칠 수학 기본서」를 홍보하기 위해 제작되었으며, 기하와 벡터의 「벡터의 일차결합」에 대한 개념과 예제가 포함되어 있습니다.
- 이 자료는 **「PDF 파일 원본 또는 그 인쇄물」**의 형태로 자유롭게 배포할 수 있습니다. 원본이 훼손된 경우, 특히 출처가 삭제되거나 변조된 경우에는 저작권법에 따라 강력하게 대응합니다.
- 「박수칠 수학 기본서」의 구입 또는 문의는 **http://atom.ac/books/1504**에서 할 수 있습니다.

벡터의 일차결합 Ⅰ

• 두 벡터의 일차결합

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, 두 벡터의 실수배의 합 $\boldsymbol{m\vec{a}+n\vec{b}}$를 「$\vec{a}$, $\vec{b}$의 일차결합」이라고 한다.

• 두 벡터의 일차결합의 성질

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, 두 벡터의 일차결합에 대하여 다음 성질이 성립한다. (단, m, n, m', n'은 실수)

(1) $\boldsymbol{m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \iff m=0,\ n=0}$

(2) $\boldsymbol{m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b} \iff m=m',\ n=n'}$

∵(1)의 증명

$i)$ $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow m=0,\ n=0$은 다음과 같이 증명된다.

귀류법으로 증명하기 위해 결론을 부정하면 $m\neq 0$ 또는 $n\neq 0$이다.

여기서 $m\neq 0$으로 가정하고, $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$를 변형하면

$$m\vec{a}=-n\vec{b} \Rightarrow \vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b}$$

가 된다. 이때,

① $n\neq 0$이라면

$\vec{a}$가 $\vec{b}$의 실수배이므로 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$가 되고, 이것은 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 평행하지 않다는 가정에 모순이다.

② $n=0$이라면

$\vec{a}=\vec{0}$이므로 $\vec{a}$가 영벡터가 아니라는 가정에 모순이다.

①, ②로부터 $m\neq 0$으로 가정하면 모순이 나타남을 알 수 있으며, $n\neq 0$으로 가정할 때도 같은 방법으로 모순이 나타남을 보일 수 있다.

$ii)$ $m=0,\ n=0 \Rightarrow m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$인 것은 당연하다.

(2)의 증명

$i)$ $m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b} \Rightarrow m=m',\ n=n'$의 증명

$m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b}$를 변형하면

$$(m-m')\vec{a}+(n-n')\vec{b}=\vec{0}$$

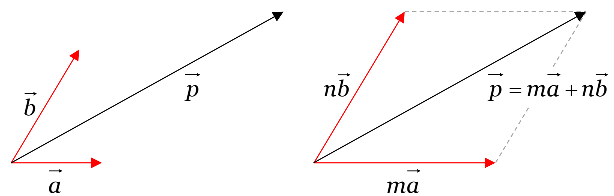
가 되고, 여기에 성질 (1)을 적용하면 다음이 성립한다.

$$m-m'=0,\ n-n'=0 \Rightarrow m=m',\ n=n'$$

$ii)$ $m=m',\ n=n' \Rightarrow m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b}$인 것은 당연하다.

★「벡터의 일차결합」이라는 용어는 교육과정에서 다루지 않지만 일차결합의 꼴, 즉 $m\vec{a}+n\vec{b}$의 꼴을 다루는 문제는 다양하게 출제되고 있다. 그러므로 다음과 같은 점을 기억해두고, 벡터 문제의 접근법 가운데 하나로 활용하도록 하자.

> 평면 위에 영벡터가 아니면서 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 잡으면 그 평면 위의 임의의 벡터 $\vec{p}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 일차결합 $m\vec{a}+n\vec{b}$로 표현할 수 있다.



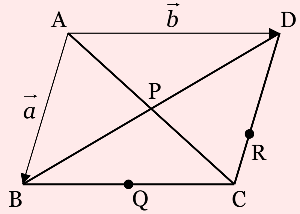
여기서 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 x축, y축의 역할을 하고, m, n은 x좌표, y좌표의 역할을 한다고 볼 수 있다. 이 점은 「평면벡터의 성분 표시」와 연결된다.

★ $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$와 같은 세 벡터의 일차결합도 생각할 수 있으며, 공간벡터 단원에서 다루게 된다. (p.5 참고)

예제1 오른쪽 그림의 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점이 P, 변 BC의 중점이 Q, 변 CD를 1:2로 내분하는 점이 R이다.

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$로 둘 때, 다음 벡터를 $m\vec{a}+n\vec{b}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\overrightarrow{AP}$　(2) $\overrightarrow{AQ}$　(3) $\overrightarrow{AR}$　(4) $\overrightarrow{QR}$



풀이 (1) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　중점의 위치벡터를 이용하면 간단하게 구할 수 있다.

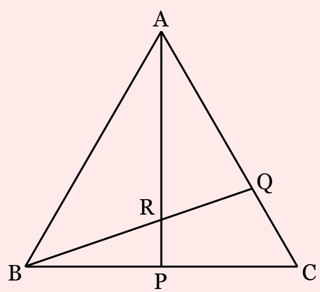
(2) $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

예제2 오른쪽 그림의 정삼각형 ABC에서 변 BC의 중점이 P, 변 AC를 2:1로 내분하는 점이 Q, 선분 AP와 선분 BQ의 교점이 R이다.

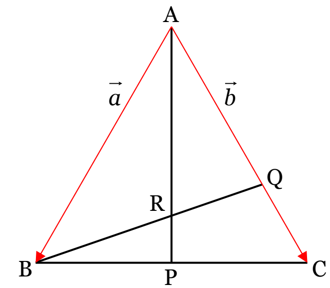
점 R가 선분 AP를 $m:n$으로 내분할 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)



풀이1 그림과 같이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$로 둔 다음, 점 R가 두 직선 BQ, AP의 교점임을 이용해서 $\overrightarrow{AR}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 일차결합으로 표현해보자.

세 점 B, R, Q가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AQ}$$
$$=k\vec{a}+(1-k)\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$
$$=k\vec{a}+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}k\right)\vec{b}\qquad\cdots\cdots①$$



가 성립하고, $\overrightarrow{AR}\,/\!/\,\overrightarrow{AP}$이므로

$$\overrightarrow{AR}=l\overrightarrow{AP}\qquad\cdots\cdots\cdots②$$

로 둘 수 있다. (단, k, l은 실수)

그리고

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

중점의 위치벡터를 이용하면 간단하게 구할 수 있다.

이므로 ②는 다음과 같이 변형된다.

$$\overrightarrow{AR}=\frac{l}{2}\vec{a}+\frac{l}{2}\vec{b}\qquad\cdots\cdots\cdots③$$

①, ③으로부터

$$\overrightarrow{AR}=k\vec{a}+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}k\right)\vec{b}=\frac{l}{2}\vec{a}+\frac{l}{2}\vec{b}$$

이므로 벡터의 일차결합의 성질 (2)에 의해 k, l의 값은 다음과 같다.

$$k=\frac{l}{2},\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}k=\frac{l}{2}\ \Rightarrow\ k=\frac{2}{5},\ l=\frac{4}{5}$$

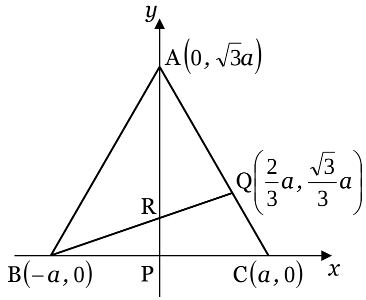
그러므로

$$\overrightarrow{AR}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AP}\ \Rightarrow\ \overline{AR}=\frac{4}{5}\overline{AP}\ \Rightarrow\ \overline{AR}:\overline{RP}=4:1\ \Rightarrow\ m+n=5$$

풀이2 문제에 주어진 그림에 좌표평면을 도입해서 각 꼭짓점의 좌표를 하나하나 구하는 방법으로 풀 수도 있다. (해석기하로 접근하는 방법)

점 P를 원점, 직선 BC를 x축, 직선 PA를 y축으로 하는 좌표평면을 그린다. 그리고 정삼각형의 한 변 길이를 $2a$로 두면 점 A, B, C, Q의 좌

표는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 직선 BQ의 방정식이

$$y-0=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a-0}{\frac{2}{3}a-(-a)}\{x-(-a)\}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{5}x+\frac{\sqrt{3}}{5}a$$

이므로 점 R의 좌표는 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{5}a\right)$가 된다.

따라서

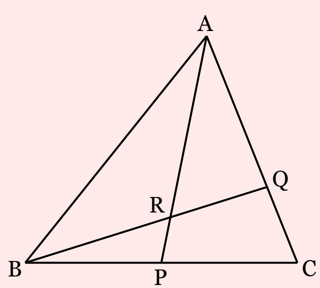
$$\overline{AR}:\overline{RP}=\left(\sqrt{3}a-\frac{\sqrt{3}}{5}a\right):\frac{\sqrt{3}}{5}a=4:1 \Rightarrow m+n=5$$

★ 예제2 의 풀이2 는 수학Ⅰ「도형의 방정식」단원에서 배웠던「해석기하」를 이용하기 때문에 풀이1에 비해 발상이 쉽고, 계산이 간편해 보인다. 그렇다고 해서 '굳이 벡터로 풀어야 하나?'라는 생각을 가지면 곤란하다.

설명을 위해 다음 문제를 살펴보자.

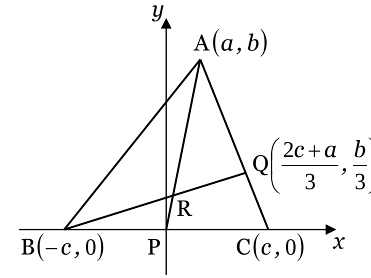
예제2-1 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점이 P, 변 AC를 2:1로 내분하는 점이 Q, 선분 AP와 선분 BQ의 교점이 R이다.

점 R가 선분 AP를 $m:n$으로 내분할 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)



풀이1 예제2 의 풀이1과 똑같다.

풀이2 점 P를 원점, 직선 BC를 x축, 점 P를 지나면서 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 그린다. 그리고 점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$으로 두면 점 B, Q의 좌표는 다음 그림과 같다.



여기서 직선 AP의 방정식

$$y=\frac{b}{a}x$$

와 직선 BQ의 방정식

$$y-0=\frac{\frac{b}{3}-0}{\frac{2c+a}{3}-(-c)}\{x-(-c)\}$$

$$\Rightarrow y=\frac{b}{a+5c}x+\frac{bc}{a+5c}$$

를 연립해서 풀면 점 R의 좌표 $\left(\frac{a}{5}, \frac{b}{5}\right)$가 나타난다.

따라서

$$\overline{AR}:\overline{RP}=\left(b-\frac{b}{5}\right):\frac{b}{5}=4:1$$

$$m+n=5$$

오른쪽 그림과 같이 점 A, R에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 A', R'이라 하면 $\Delta APA' \backsim \Delta RPR'$이므로 $\overline{AR}:\overline{RP}=\overline{A'R'}:\overline{R'P}$이다.

이처럼 해석기하를 이용하는 방법은 문제에 따라 계산이 복잡해질 수도 있고, 이 단원의 학습목표에도 부합하지 않기 때문에 벡터를 이용한 해법을 반드시 숙지해서 벡터 문제에 대한 다양한 접근법을 갖추도록 해야 한다.

p.2에서 설명했듯이 임의의 평면벡터는 「두 벡터의 일차결합」으로 표현할 수 있다. 마찬가지로 임의의 공간벡터는 「세 벡터의 일차결합」으로 표현할 수 있다.

벡터의 일차결합 Ⅱ

• 세 벡터의 일차결합

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 다음 조건을 동시에 만족시킬 때, 세 벡터의 실수배의 합 $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$를 「$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$의 일차결합」이라고 한다.

(a) 세 벡터 가운데 어느 것도 영벡터가 아니다. 즉,

$$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{c}\neq\vec{0}$$

(b) 세 벡터 가운데 어느 두 벡터도 서로 평행하지 않다. 즉,

$$\vec{a}\nparallel\vec{b},\ \vec{b}\nparallel\vec{c},\ \vec{c}\nparallel\vec{a}$$

(c) 세 벡터는 한 평면 위에 있지 않다.

• 세 벡터의 일차결합의 성질

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 위 조건 (a)~(c)를 동시에 만족시킬 때, 세 벡터의 일차결합에 대하여 다음 성질이 성립한다. (단, l, m, n, l', m', n'은 실수)

(1) $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0} \iff l=0,\ m=0,\ n=0$

(2) $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=l'\vec{a}+m'\vec{b}+n'\vec{c}$

$\iff l=l',\ m=m',\ n=n'$

∵ (1)의 증명

i) $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow l=0,\ m=0,\ n=0$은 다음과 같이 증명된다.

귀류법으로 증명하기 위해 결론을 부정하면 $l\neq0$ 또는 $m\neq0$ 또는 $n\neq0$이다. 여기서 $l\neq0$으로 가정하고, $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0}$를 변형하면

$$l\vec{a}=-m\vec{b}-n\vec{c} \Rightarrow \vec{a}=-\frac{m}{l}\vec{b}-\frac{n}{l}\vec{c}$$

가 된다. 이때,

① $m\neq0,\ n\neq0$이라면

$\vec{a}$는 $\vec{b}$, $\vec{c}$의 일차결합으로 표현되고, 이것은 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 한 평면 위에 있음을 의미하므로 조건 (c)에 모순이다.

② $m=0,\ n\neq0$이라면

$\vec{a}=-\frac{n}{l}\vec{c}$이므로 $\vec{a}\parallel\vec{c}$이고, 조건 (b)에 모순이다.

③ $m\neq0,\ n=0$이라면

$\vec{a}=-\frac{m}{l}\vec{b}$이므로 $\vec{a}\parallel\vec{b}$이고, 조건 (b)에 모순이다.

④ $m=0,\ n=0$이라면

$\vec{a}=\vec{0}$이므로 조건 (a)에 모순이다.

①~④로부터 $l\neq0$으로 가정하면 모순이 나타남을 알 수 있으며, $m\neq0$ 또는 $n\neq0$으로 가정할 때도 같은 방법으로 모순이 나타남을 보일 수 있다.

ii) $l=0,\ m=0,\ n=0 \Rightarrow l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0}$인 것은 당연하다.

(2)의 증명

i) $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=l'\vec{a}+m'\vec{b}+n'\vec{c} \Rightarrow l=l',\ m=m',\ n=n'$의 증명

$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=l'\vec{a}+m'\vec{b}+n'\vec{c}$를 변형하면

$$(l-l')\vec{a}+(m-m')\vec{b}+(n-n')\vec{c}=\vec{0}$$

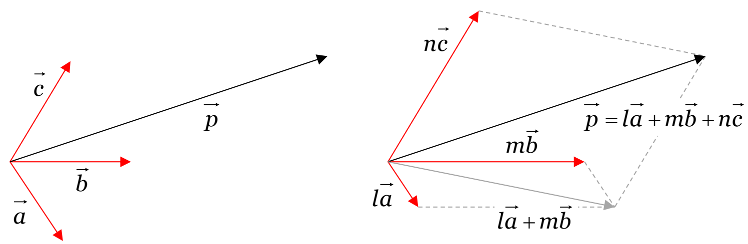
가 되고, 여기에 성질 (1)을 적용하면 다음이 성립한다.

$$l-l'=0,\ m-m'=0,\ n-n'=0 \Rightarrow l=l',\ m=m',\ n=n'$$

ii) $l=l',\ m=m',\ n=n' \Rightarrow l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=l'\vec{a}+m'\vec{b}+n'\vec{c}$인 것은 당연하다.

★「두 벡터의 일차결합」과 마찬가지로 「세 벡터의 일차결합」도 다음과 같은 점을 기억해두고, 벡터 문제의 접근법으로 활용하도록 하자.

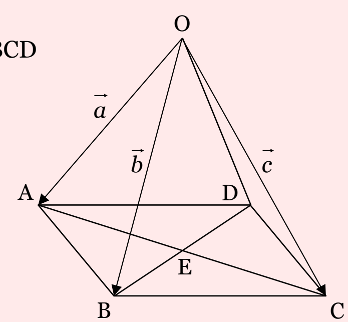
> 공간에 영벡터가 아니면서 어느 두 벡터도 서로 평행하지 않고, 한 평면 위에 있지도 않은 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 잡으면 그 공간의 임의의 벡터 $\vec{p}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$의 일차결합 $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$로 표현할 수 있다.



여기서 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$는 x축, y축, z축의 역할을 하고, l, m, n은 x좌표, y좌표, z좌표의 역할을 한다고 볼 수 있다. 이 점은 「공간벡터의 성분 표시」와 연결된다.

예제3 오른쪽 그림의 정사각뿔 $\mathrm{O-ABCD}$에서 밑면의 대각선의 교점이 E이다.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$로 둘 때, 다음 벡터를 $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$



★ 선분의 내분점과 외분점, 삼각형의 무게중심에 대한 위치벡터는 평면 뿐만 아니라 공간에서도 그대로 성립한다. 이를 이용해서 문제를 풀면 다음과 같다.

풀이 점 O를 위치벡터의 시점으로 보면 세 점 A, B, C의 위치벡터는 각각 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$이다.

(1) 점 E의 위치벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$이고, 점 E가 선분 AC의 중점이므로 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$

(3) 점 E가 선분 AC의 중점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

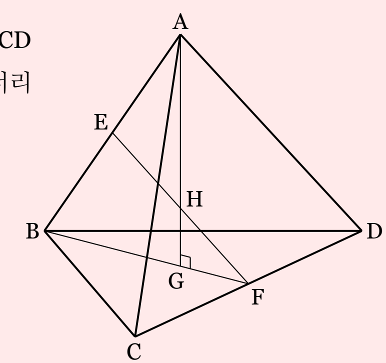
점 E가 선분 BD의 중점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

따라서 $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

[(3)의 다른 풀이]

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\vec{a}+\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

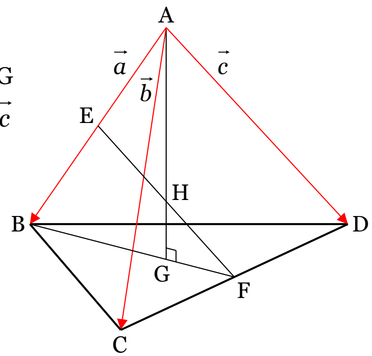
예제4 오른쪽 그림의 정사면체 ABCD에서 모서리 AB의 중점이 E, 모서리 CD의 중점이 F, 꼭짓점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발이 G, 두 선분 AG와 EF의 교점이 H이다.
점 H가 선분 AG를 $m:n$으로 내분할 때, $m+n$의 값을 구하시오.
(단, m, n은 서로소인 자연수)



풀이1 점 A를 위치벡터의 시점으로 보고, 세 점 B, C, D의 위치벡터를 각각

$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{c}$

로 둔 다음, 점 H가 두 직선 EF, AG의 교점임을 이용해서 $\overrightarrow{AH}$를 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$의 일차결합으로 표현해보자.



세 점 E, H, F가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AE}+(1-k)\overrightarrow{AF}$$
$$=k\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)+(1-k)\underbrace{\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}_{\text{점 F는 선분 CD의 중점}}$$
$$=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{1-k}{2}\vec{b}+\frac{1-k}{2}\vec{c}\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

가 성립하고, $\overrightarrow{AH}\,/\!/\,\overrightarrow{AG}$이므로

$$\overrightarrow{AH}=l\overrightarrow{AG}=l\underbrace{\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)}_{\text{점 G는 삼각형 BCD의 무게중심}}=\frac{l}{3}\vec{a}+\frac{l}{3}\vec{b}+\frac{l}{3}\vec{c}\qquad\cdots\cdots\cdots②$$

로 둘 수 있다. (단, k, l은 실수)

①, ②로부터

$$\overrightarrow{AH}=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{1-k}{2}\vec{b}+\frac{1-k}{2}\vec{c}=\frac{l}{3}\vec{a}+\frac{l}{3}\vec{b}+\frac{l}{3}\vec{c}$$

이므로 벡터의 일차결합의 성질 (2)에 의해 k, l의 값은 다음과 같다.

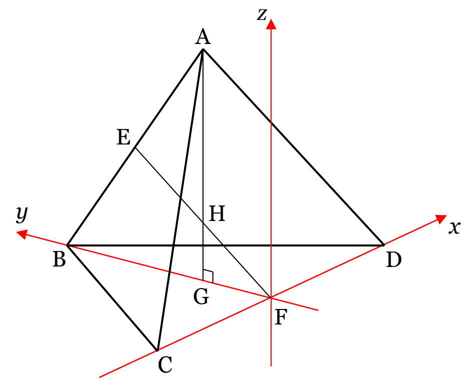
$$\frac{k}{2}=\frac{l}{3},\ \frac{1-k}{2}=\frac{l}{3}\ \Rightarrow\ k=\frac{1}{2},\ l=\frac{3}{4}$$

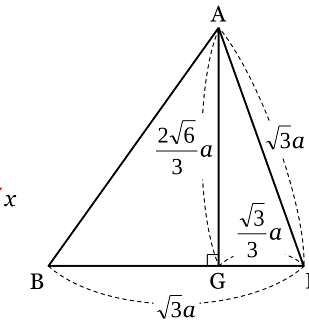
그러므로

$$\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}\ \Rightarrow\ \overline{AH}=\frac{3}{4}\overline{AG}\ \Rightarrow\ \overline{AH}:\overline{HG}=3:1\ \Rightarrow\ m+n=4$$

풀이2 문제에 주어진 그림에 좌표공간을 도입해서 각 꼭짓점의 좌표를 하나하나 구하는 방법으로 풀 수도 있다. (해석기하로 접근하는 방법)

점 F를 원점, 직선 CD를 x축, 직선 FB를 y축, 점 F를 지나면서 직선 AG에 평행한 직선을 z축으로 하는 좌표공간을 그린다. 그리고 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$로 두면 점 A, B, E, G의 좌표는 다음과 같다. (점 A의 좌표는 아래 오른쪽 그림 참고)





$$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}a,\ \frac{2\sqrt{6}}{3}a\right),\ \mathrm{B}\left(0,\ \sqrt{3}a,\ 0\right),\ \mathrm{E}\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}a,\ \frac{\sqrt{6}}{3}a\right),\ \mathrm{G}\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}a,\ 0\right)$$

여기서 직선 AG의 방정식은 $x=0,\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, 직선 EF의 방정식은

$$x=0,\ \frac{y-0}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a-0}=\frac{z-0}{\frac{\sqrt{6}}{3}a-0}\ \Rightarrow\ x=0,\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}y$$

좌표공간에서의 직선의 방정식은 p.145 참고

이고, 연립해서 풀면 점 H의 좌표 $\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}a,\ \frac{\sqrt{6}}{6}a\right)$가 나타난다.

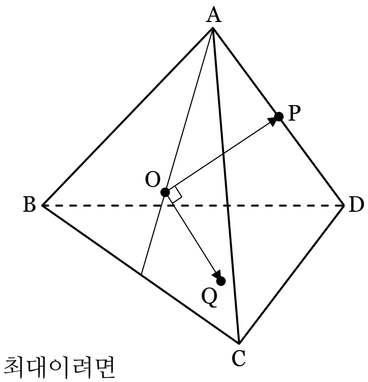
따라서

$$\overline{AH}:\overline{HG}=\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{6}a\right):\frac{\sqrt{6}}{6}a=3:1\ \Rightarrow\ m+n=4$$

[2017학년도 수능 가형 #29]

실력 예제5 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

풀이1 먼저 문제에 주어진 조건을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



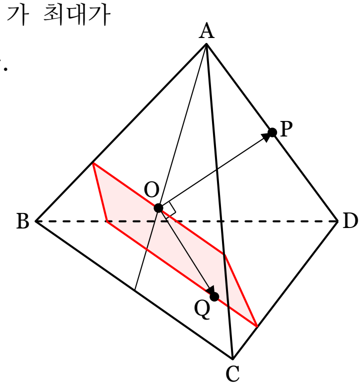
그리고 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$에서 $\overrightarrow{PQ}$의 시점을 O로 변형하면

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\right|$$

가 되고, $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{OP}$를 이용하기 위해 양변을 제곱하면 다음과 같다.

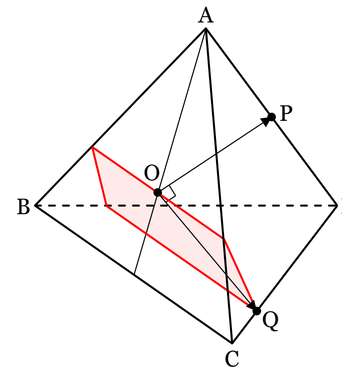
$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2-2\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OP}\\&=\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2\end{aligned}$$

여기서 $\left|\overrightarrow{OP}\right|$가 일정하므로 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$가 최대이려면 $\left|\overrightarrow{OQ}\right|$가 최대여야 한다. 그럼 $\left|\overrightarrow{OQ}\right|$가 최대가 되도록 하는 점 Q의 위치를 알아보자.



사면체 ABCD를 점 O를 지나면서 $\overrightarrow{OP}$에 수직인 평면으로 자르면 단면은 오른쪽 그림의 색칠된 사각형과 같다.

이때, 점 Q는 색칠된 사각형과 밑면 BCD의 교선 위에 존재하므로 $\left|\overrightarrow{OQ}\right|$가 최대이려면 점 Q가 색칠된 사각형과 모서리 BD의 교점 또는 색칠된 사각형과 모서리 CD의 교점에 존재해야 한다. 이 중에서 오른쪽 그림과 같이 점 Q가 색칠된 사각형과 모서리 CD의 교점에 위치하는 경우의 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$를 구해보자.



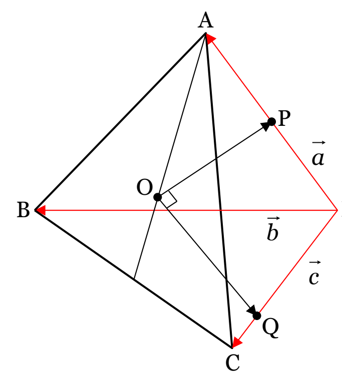
점 D를 위치벡터의 시점으로 보고, 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각

$$\overrightarrow{DA}=\vec{a},\ \overrightarrow{DB}=\vec{b},\ \overrightarrow{DC}=\vec{c}$$

로 두면 $\overrightarrow{PQ}$는

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DP}=k\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

(단, $0<k<1$)



가 된다. 그리고 $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{OP}$를 이용해서 k의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}\bullet\overrightarrow{OP}&=\left(\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DO}\right)\bullet\left(\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DO}\right)\\&=\left\{k\vec{c}-\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\right\}\bullet\left\{\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\right\}\\&=\left\{-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\left(k-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\right\}\bullet\left(\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)\\&=-\frac{1}{18}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{1}{9}\vec{a}\bullet\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{a}\bullet\vec{c}\\&\quad-\frac{1}{18}\vec{b}\bullet\vec{a}+\frac{1}{9}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{1}{9}\vec{b}\bullet\vec{c}\\&\quad+\frac{1}{6}\left(k-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\bullet\vec{a}-\frac{1}{3}\left(k-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\bullet\vec{b}-\frac{1}{3}\left(k-\frac{1}{3}\right)\left|\vec{c}\right|^2\end{aligned}$$

$$=\left\{-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\left(k-\frac{1}{3}\right)\right\}\times 16$$
$$-\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\left(k-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(k-\frac{1}{3}\right)\right\}\times 8$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\because \left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2=16\\ &\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{c}=\vec{c}\bullet\vec{a}=4\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=8\end{aligned}}$$

$$=\frac{20}{3}k+\frac{16}{3}=0 \Rightarrow k=\frac{4}{5}$$

그러므로

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{4}{5}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

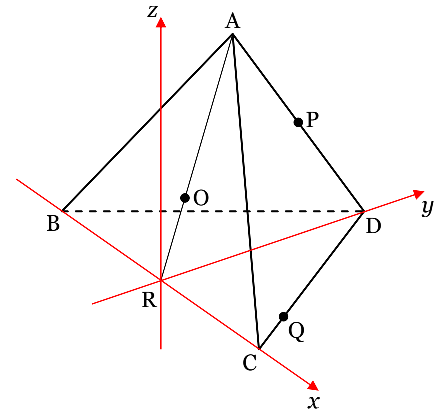
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=\left|\frac{4}{5}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\left(\frac{4}{5}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\bullet\left(\frac{4}{5}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$
$$=\frac{16}{25}\left|\vec{c}\right|^2-\frac{4}{5}\vec{c}\bullet\vec{a}+\frac{1}{4}\left|\vec{a}\right|^2=\frac{16}{25}\times16-\frac{4}{5}\times8+\frac{1}{4}\times16=\frac{196}{25}$$

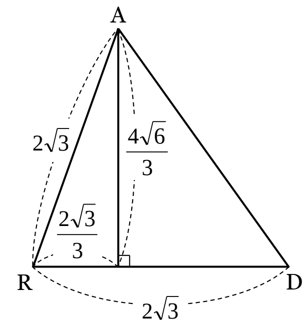
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\frac{14}{5}$$

$$\therefore p+q=19$$

풀이2 문제에 주어진 그림에 좌표공간을 도입해서 각 꼭짓점의 좌표를 하나하나 구하는 방법으로 풀 수도 있다.(해석기하로 접근하는 방법)

모서리 BC의 중점을 R로 두고 점 R를 원점, 직선 BC를 x축, 직선 RD를 y축, 점 R를 지나면서 밑면 BCD에 수직인 직선을 z축으로 하는 좌표공간을 그린다. 이때, 정사면체의 한 모서리의 길이가 4이므로 점 A, B, C, D, O, P의 좌표는 다음과 같다.(점 A의 좌표는 아래 오른쪽 그림 참고)





$$\mathrm{B}(-2,0,0),\ \mathrm{C}(2,0,0),\ \mathrm{D}\left(0,2\sqrt{3},0\right),\ \mathrm{A}\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{6}}{3}\right),$$
$$\mathrm{O}\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{9},\frac{4\sqrt{6}}{9}\right),\ \mathrm{P}\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

점 Q는 직선 CD 위에 있으며, 직선 CD의 방정식이

$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{2\sqrt{3}-0},\ z=0 \Rightarrow x-2=-\frac{1}{\sqrt{3}}y,\ z=9$$

이므로 점 Q의 좌표는 $\left(t+2,-\sqrt{3}t,0\right)$으로 둘 수 있다. 그리고 $\overline{\mathrm{OQ}}\perp\overline{\mathrm{OP}}$에 의해

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(t+2,-\sqrt{3}t-\frac{2\sqrt{3}}{9},-\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)\bullet\left(t+2,-\sqrt{3}t-\frac{2\sqrt{3}}{9},-\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$$
$$=-\frac{10}{3}t-\frac{4}{3}=0 \Rightarrow t=-\frac{2}{5}$$

이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{8}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5},0\right)$이 된다.

따라서

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\begin{array}{c}\text{두 점 P, Q}\\ \text{사이의 거리}\end{array}\right)=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{14\sqrt{3}}{15}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{14}{5} \Rightarrow p+q=19$$