선입견을 깨고
수학 바로보기
미적분 II

김현우 | 백경린

smart is sexy
Orbi

Contents

첫 번째, 무엇을 기본 단위로 볼 것인가?

두 번째, 무엇을 상수로 볼 것인가?

세 번째, 무엇이 경계를 결정하는가?

네 번째, 무엇이 도형을 결정하는가?

첫 번째, 무엇을 기본 단위로 볼 것인가?

논리의 기본 과정은 '이미 알고 있는 정보'를 이용하여 새로운 (정확히는 새롭게 보이는) 정보를 파악하는 데 있다. 따라서 문제를 논리적으로 해결하기 위해서는 무엇보다 주어진 정보를 정확히 확인하는 것이 중요하다.

그런데 주어진 정보를 이해하는 데 종종 걸림돌로 작용하는 것이 있으니, 그것은 알게 모르게 축적된 우리의 선입견이다.

수학의 가장 큰 미덕은 바로 근거 없는 선입견을 깨트리는 것!!

아마도 가장 큰 선입견 중의 하나는 식의 기본 형태에 대한 고정 관념일 것이다.

예를 들어, 함수 $f(x)$에 관한 문제에서 '$xf(x)$' 또는 '$f(x)-x$' 에 대한 정보가 주어져 있는데, 이를 무시하고 고집스럽게 '$f(x)$' 의 형태에만 초점을 맞춘다면 뜻하지 않은 어려움에 빠질 가능성이 높다.

모든 물질에는 기본 단위가 있다..

반대로, 함수는 무조건 $f(x)$의 형태로 나타내야 한다는 선입견을 버리고 **주어진 조건에 따라 함수 '$xf(x)$' 또는 '$f(x)-x$' 를 기본 단위로 볼 수 있다면** 불필요한 사고를 줄일 수 있다는 뜻이다!

문제를 통해 직접 확인해 보자.

1-01
95 수능

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 다음 〈보기〉 중 $x=0$에서 미분가능한 함수를 모두 고르면?

〈보 기〉

ㄱ. $y=xf(x)$

ㄴ. $y=x^2f(x)$

ㄷ. $y=\dfrac{1}{1+xf(x)}$

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 미분계수의 정의에 따라 $x=0$에서 함수 $xf(x)$의 미분가능성을 조사해 보면

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\ (\because\ \text{함수 } f(x)\text{는 } x=0\text{에서 연속})$$

따라서 $y=xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

함수 f(x)는 x=0에서 미분가능하지 않으므로 함수 xf(x)에 대하여 곱의 미분법을 적용할 수는 없다. $(xf(x))' \neq f(x)+xf'(x)$

ㄴ. 함수 $x^2f(x)$에 대하여 미분계수의 정의를 다시 한번 적용할 수도 있지만, ㄱ에서 함수 $xf(x)$가 $x=0$에서 미분가능함을 알았으므로 **함수 '$\boldsymbol{xf(x)}$'를 기본 단위로 보면**

$$y=x^2f(x)=x\cdot\boldsymbol{xf(x)}$$

가 $x=0$에서 미분가능한 두 함수 $y=x$, $y=xf(x)$의 곱으로 이루어져 있음을 알 수 있다. 따라서 곱의 미분법에 의해 함수 $y=x^2f(x)$도 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. ㄴ에서와 같이 미분가능성을 알고 있는 함수를 기본 함수로 이용하는 것은 합 · 차 · 몫의 미분법에 대해서도 동일하게 적용된다! 즉,

$x=0$일 때, $1+\boldsymbol{xf(x)}=1\neq 0$

이므로 몫의 미분법에 의해 함수 $y=\dfrac{1}{1+xf(x)}$도 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

즉, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1-02
13 평가원

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은?

우선, 미분가능한 두 함수 $y=f(x)$, $y=mx$를 이용하여 새로운 함수 $g(x)$의 미분가능성을 조사해 보자.

함수 $g(x)$는 $f(x)>mx$인 구간에서 $g(x)=f(x)$이므로 미분가능하고, $f(x)<mx$인 구간에서는 $g(x)=mx$이므로 역시 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=mx$의 그래프가 만나는 지점에서 접선의 기울기가 서로 같아야 하므로

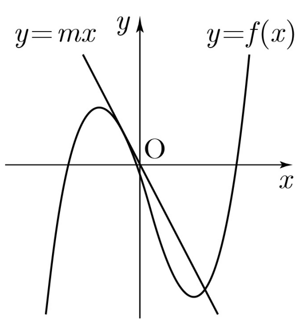
$\underline{f(x)=mx\text{일 때, } f'(x)=m}$ ⋯ ㉠

이 성립해야 한다.

이때, ㉠을 만족하는 m의 값을 찾기 위해 삼차함수 $f(x)$를 미분하여 곡선 $y=f(x)$의 개형을 그리고, 이 곡선에 접하면서 원점을 지나는 직선 $y=mx$의 후보들을 조사한다면 꽤 많은 계산을 거쳐야 할 것이다.

직선 $y=mx$의 후보들이 접점 이외의 지점에서는 곡선과 다시 접할 수 없는 지를 확인해 보아야 때문이다.

대강의 개형 만으로 답을 확정할 수는 없으니..



하지만, ㉠에서 두 번째 식은 첫 번째 식을 미분한 결과와 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=mx$의 관계가 아니라, 하나의 함수 $f(x)-mx$와 x축의 관계로 해석하면 함수식을 간단히 끌어낼 수 있다.

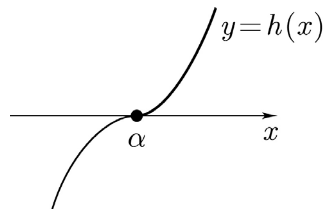
즉, 삼차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=mx$ 대신 **삼차함수 '$h(x)=f(x)-mx$' 를 기본 단위로 보면**

$\underline{h(x)=0\text{일 때, 항상 } h'(x)=0}$

이 성립해야 하므로 삼차방정식 $h(x)=0$의 모든 실근은 중근이어야 한다!

(삼차방정식의 실근의 개수는 최대 3개이므로 정확하게는 삼중근을 가져야 한다.)

이때, $h(x)$의 최고차항의 계수는 $f(x)$의 최고차항의 계수인 1과 같으므로 삼중근을 α라고 하면



$$h(x)=(x-\alpha)^3$$

$$\therefore\ (x^3-3x^2-9x-1)-mx=(x-\alpha)^3$$

따라서 위의 등식의 양변을 x에 대하여 두 번 미분하면

양변의 상수항을 비교하여 $\alpha=1$임을 바로 확인할 수도 있다.

$$6(x-1)=6(x-\alpha)\qquad\therefore\ \alpha=1$$

이므로

$$(x^3-3x^2-9x-1)-mx=(x-1)^3$$

결국, 위의 결과에 $x=1$을 대입하면

$$-12-m=0$$

이므로 구하는 값은 $m=-12$임을 알 수 있다.

1-03

12 평가원

양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$$

에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것을 있는 대로 고르면?

〈보 기〉

ㄱ. 점 $(2,\,2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.

ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.

위와 같은 명제 판단 문제는 늘 〈보기〉 ㄱ, ㄴ, ㄷ 사이의 연관성을 염두에 둘 필요가 있다.

(i) ㄱ에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$에 대하여

$$\{f(x)-x\}''=f''(x)$$

이므로 곡선 $y=f(x)-x$의 변곡점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표와 같다.

(ii) ㄴ에서는 방정식 $f(x)-x=0$의 실근이 $x=2$임을 확인해야 한다.

서로 역함수 관계에 있는 두 함수의 그래프는 직선 y=x에 대하여 대칭이므로..

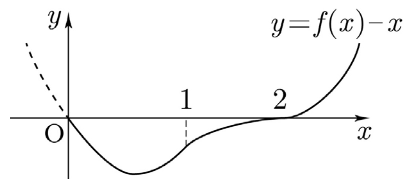
(iii) ㄷ에서도 $x=2$의 근방에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 위치 관계를 알면 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 위치 관계를 추론할 수 있다.

(i)~(iii)을 종합해 보면 함수 $f(x)$ 대신 **사차함수 '$f(x)-x$'를 기본 단위로** 이용하는 것이 매우 유리해 보인다!

ㄱ. 곡선 $y=f(x)-x$의 변곡점을 조사하기 위해 $f(x)-x$를 정리해 보면

$$f(x)-x=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)-x$$

$$=\frac{1}{27}x(x-2)^3 \ (\text{단, } x>0) \cdots ㉠$$



이므로 곡선 $y=f(x)-x$의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

이때, 점 $(2, 0)$이 곡선 $y=f(x)-x$의 변곡점이므로 점 $(2, 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점임을 알 수 있다. (참)

f(x)를 그대로 이용한다면 ㄱ, ㄴ, ㄷ을 판단하는 동안 여러 번의 미분과 인수분해를 반복해야 한다.

ㄴ. ㄱ의 결과에 의해 방정식 $f(x)-x=0$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$뿐임을 알 수 있다. (참)

ㄷ. 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 ㄱ에서 구한 곡선 $y=f(x)-x$의 개형에 의해

$$|f(x)-g(x)|=\begin{cases} f(x)-g(x) & (x \geq 2) \\ g(x)-f(x) & (x<2) \end{cases}$$

임을 알 수 있다.

이때, ㉠에서 $f(2)=2$, $f'(2)=1$이므로

$$g(2)=2,\ g'(2)=\frac{1}{f'(2)}=1 \qquad \therefore\ f'(2)=g'(2)$$

따라서 $h(x)=|f(x)-g(x)|$로 놓으면

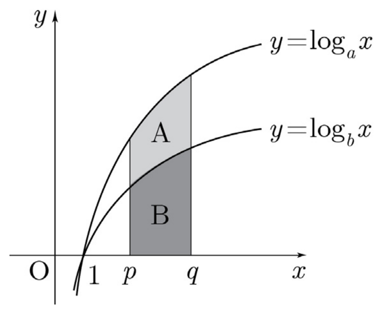
$$\lim_{x\to 2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)-f'(2)=f'(2)-g'(2)=\lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$$

이므로 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다. (참)

즉, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

01 그림과 같이 두 직선 $x=p$, $x=q$와 x축 및 곡선 $y=\log_a x$로 둘러싸인 부분을 곡선 $y=\log_b x$가 두 부분 A와 B로 나눈다. A와 B의 넓이를 각각 α, β라 할 때, $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값은?

(단, $1<a<b$, $1<p<q$)



① $\left(\dfrac{b}{a}-1\right)(q-p)$　　② $\dfrac{a}{b}-1$

③ $\log_a b-1$　　④ $\log_b a-1$　　⑤ $(q-p)\log_b a$

02 $x=0$에서 극댓값을 갖는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고르면?

〈보　기〉

ㄱ. 함수 $|f(x)|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(|x|)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $f(x)-x^2|x|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

정답 및 해설 96p

03 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-2}$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르면?

〈보 기〉

ㄱ. 최솟값은 $-1-\sqrt{2}$ 이다.

ㄴ. $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 최댓값을 갖는다.

ㄷ. $x=\dfrac{5}{4}\pi$에서 극댓값을 갖는다.

04 $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.

(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)

(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$ 일 때, M의 최솟값을 구하시오.

05 양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
(나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오.

06 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge f'(x)$이다.

정답 및 해설 96p

07 함수 $y=x^3+ax$ 의 그래프를 양의 방향으로 $45°$ 회전시켜서 얻은 곡선이 실수 전체에서 정의된 어떤 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 되는 a 의 범위는?

08 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$
(나) $g(x)=\dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$

$f(1)=\dfrac{1}{e}$ 일 때, $f(2)-g(2)$ 의 값은?

정답 및 해설

첫 번째, 무엇을 기본 단위로 볼 것인가! P.18

01) 답 ③

로그함수의 적분은 $\ln x$를 기본 단위로 이용하는 것이 유리하다. 즉,

$$\alpha=\int_p^q(\log_a x-\log_b x)dx=\int_p^q\frac{\ln x}{\ln a}dx-\int_p^q\frac{\ln x}{\ln b}dx,\ \ \beta=\int_p^q\log_b x\,dx=\int_p^q\frac{\ln x}{\ln b}dx$$

이므로

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{1}{\ln a}\int_p^q\ln x\,dx-\frac{1}{\ln b}\int_p^q\ln x\,dx}{\frac{1}{\ln b}\int_p^q\ln x\,dx}=\frac{\ln b}{\ln a}-1\qquad\therefore\ \frac{\alpha}{\beta}=\log_a b-1$$

02) 답 ㄴ, ㄷ

연속함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 0을 포함하는 어떤 열린 구간의 모든 x에 대하여

$f(x)\le f(0)$ … ㉠

ㄱ. ㉠에 의해 $f(0)<0$이면

$|f(x)|\ge|f(0)|$

이므로 일반적으로 함수 $|f(x)|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. ㉠은 x값의 부호에 관계없이 성립하므로

$x\ge0$이면 $f(|x|)=f(x)\le f(0)$, $x<0$이면 $f(|x|)=f(-x)\le f(0)$

따라서 함수 $f(|x|)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $-x^2|x|=-|x^3|\le 0$

이므로 함수 $g(x)=-x^2|x|$는 $x=0$에서 극대이다.

따라서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 기본 단위로 보면 0을 포함하는 어떤 열린 구간의 모든 x에 대하여

$f(x)+g(x)\le f(0)+g(0)$

이 성립하므로 함수 $f(x)-x^2|x|$는 $x=0$에서 극대임을 알 수 있다. (참)

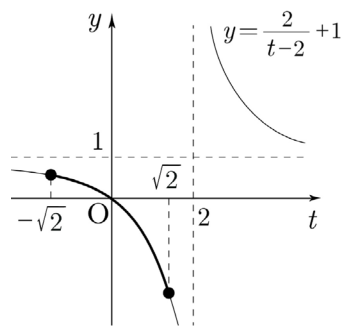
03) 답 ㄱ, ㄷ

$\sin x+\cos x=t$를 기본 단위로 보면

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ … ㉠

이므로

$f(x)=\dfrac{t}{t-2}=\dfrac{2}{t-2}+1$ (단, $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$)



ㄱ. $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ 에서 함수 $f(x)=\dfrac{2}{t-2}+1$은 감소하므로

$t=\sqrt{2}$ 일 때 최솟값

$$\frac{2}{\sqrt{2}-2}+1=-1-\sqrt{2}$$

를 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)=\dfrac{2}{t-2}+1$은 $t=-\sqrt{2}$ 일 때 최댓값을 갖는다.

그런데, ㉠에 의해 $t=-\sqrt{2}$ 일 때, $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ 이므로

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \qquad \therefore\ x+\frac{\pi}{4}=\cdots,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi,\ \cdots$$

따라서 $f(x)$는 $x=\cdots,\ -\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{13}{4}\pi,\ \cdots$ 에서 최댓값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-2}$는 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)$의 최댓값은 극댓값 중의 하나이다. 그런데, ㄴ의 결과에서 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$에서 최댓값을 가지므로 역시 $x=\dfrac{5}{4}\pi$에서 극댓값을 가짐을 알 수 있다. (참)

04) 답 216

조건 (가)에서

$(x-a)f(x)=g(x)$ (단, $x>a$) $\cdots$ ㉠

이므로 '사차함수 $g(x)$' 의 정보를 통해 $f(x)$의 극댓값 M의 정보를 파악해 보자.

조건 (나)에 의해

$f(\alpha)=f(\beta)=M,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $\cdots$ (i)

이므로 ㉠의 양변을 미분해 보면

$f(x)+(x-a)f'(x)=g'(x)$ $\cdots$ ㉡

이때, ㉠, ㉡에 각각 α, β를 대입해 보면 (i)에 의해

$g(\alpha)=M(\alpha-a),\ g(\beta)=M(\beta-a)$ ($\because$ ㉠)

$g'(\alpha)=M,\ g'(\beta)=M$ ($\because$ ㉡, ㉢)

이므로 사차함수 $g(x)$에 대하여 α, β는 두 방정식

$g(x)=M(x-a),\ g'(x)=M$ $\cdots$ (ii)

의 실근이다.

그런데, (ii)에서 두 번째 식은 첫 번째 식을 미분한 결과와 같으므로 두 함수 $y=g(x)$, $y=M(x-a)$ 대신 함수 $y=g(x)-M(x-a)$를 기본 단위로 보면 최고차항의 계수가 -1인 사차방정식